

# MAKİNA DINAMİĞİ DERS NOTLARI

## 1. GİRİŞ

### 1.1. Dinamik Prensipler

Dinamik analizlerde kullanılan temel prensipler Newton'un hareket kanunlarıdır. Maddesel bir nokta (parçacık) için bu kanullar şu şekilde ifade edilebilirler:

1. Bir maddesel noktaya etki eden bileske kuvvet sıfır ise ( $\sum \vec{F}_{\text{dis}} = \vec{0}$ ), nokta başlangıçta duruyor ise durmasına devam eder, eğer bir doğru yönünde hareket ediyor ise aynı yönde hareketin sürdürür.
2. Bir maddesel noktaya etki eden kuvvetlerin bileskesi sıfır değilse ( $\sum \vec{F}_{\text{dis}} \neq \vec{0}$ ), maddesel noktadaki momentum değişimi bileske kuvvetin şiddeti ile orantılı ve bu bileske kuvvetin yönündedir.

$$\sum \vec{F}_{\text{dis}} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \frac{d \vec{P}}{dt} \rightarrow \vec{P} = m \vec{v}$$

$m$ : maddesel noktanın kütleşi

$\vec{v}$ : " " hızı

$\vec{P}$ : " " momentum vektörüdür.

Eğer kütle,  $m$ , sabit ise bu denklem

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde  $\vec{a}$ , maddesel noktanın doğrusal ırmesidir ve  $\vec{F}$  ve  $\vec{a}$  vektörel değerlerdir.

3. Her etkiye, eşit ve ters yönde bir tepki vardır.

Uludağ Elektrik ve İletişim Teknolojileri  
Bölümü - Kırkpınar Mahallesinde

Ale

## SI Birim Sistemi

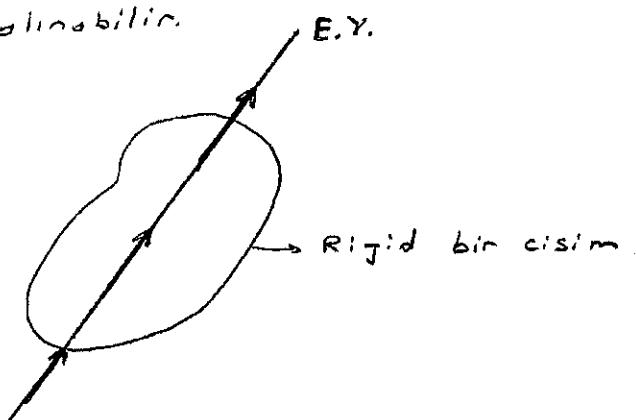
<u>Değer</u>	<u>Birim İsmi</u>	<u>Simbol</u>
Uzunluk	metre	m
Kütle	kilogram	kg
Zaman	saniye	s
Kuvvet	Newton	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
İs ve Enerji	Joule	$J = N \cdot m$
Güç	Watt	$W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s}$
Frekans	Hertz	$Hz = \left( \frac{\text{devir}}{s} \right)$

## 1.2. Kuvvet ve Kuvvet Çiftleri

Kuvvet vektörel bir değerdir. Yani

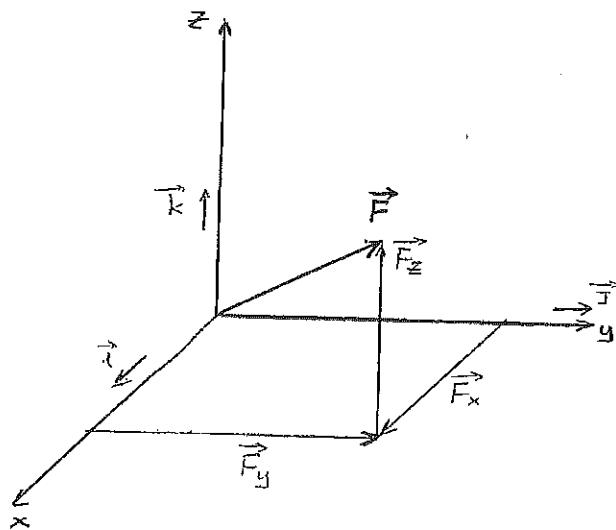
- i) siddeti
- ii) Yönü
- iii) Etki noktası

Vardır. Rigid bir cisim için, kuvvet etki yeri doğrultusunda kaydırılabilir. Yani kuvvetin etki noktası, etki yönünde herhangi bir nokta alınabilir.



## Kuvvet Göstergeleri

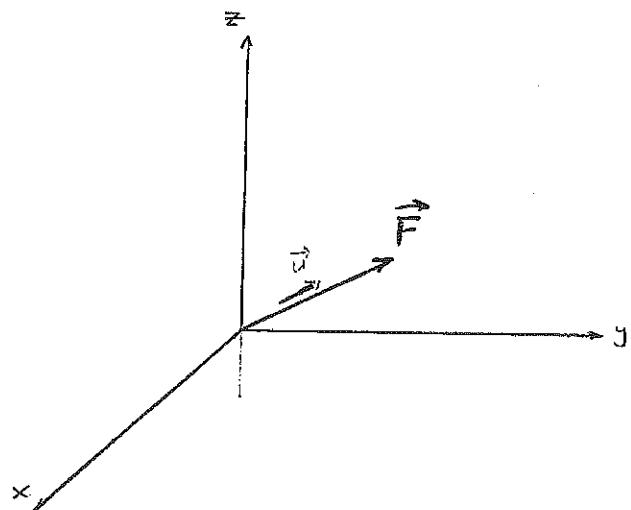
a) Uzayda



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ : sırasıyla  $x, y$  ve  $z$  doğrultularındaki birim vektörlerdir.



$\vec{u}$ :  $\vec{F}$  kuvveti yz düzleğindeki birim vektördür.

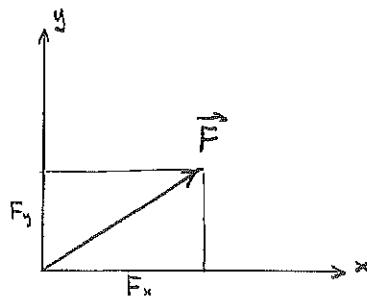
$$\vec{F} = F \vec{u}$$

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

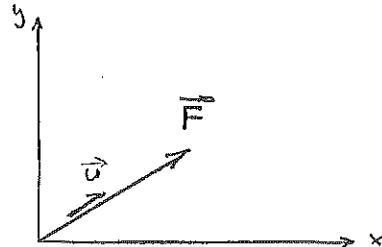
$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

b) Düzlemede

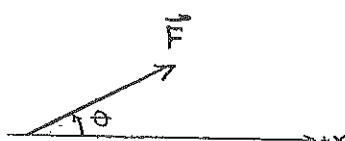


$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$



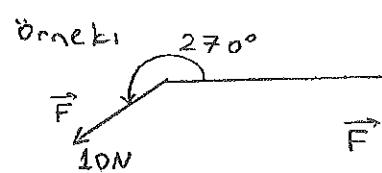
$$\vec{F} = F \vec{u}, \quad \vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}, \quad |\vec{u}| = 1$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



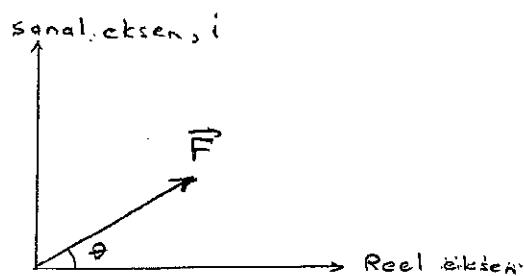
$$\vec{F} = F \angle \theta$$

$\theta$ :  $\vec{F}$  kuvvetinin pozitif  $x$  ekseni ile yapmış olduğu açı



$$\vec{F} = 10 \angle 270^\circ N$$

## Kompleks Düzlemden Geçişselim



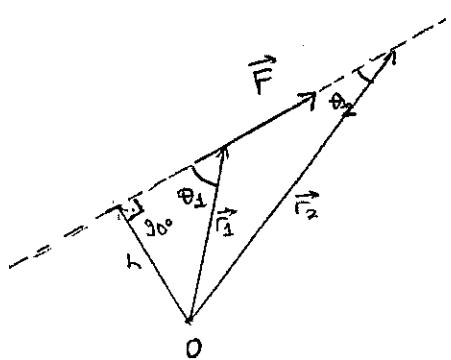
$$\vec{F} = F e^{i\theta} = F(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$i = \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos\theta \\ F_y &= F \cdot \sin\theta \end{aligned} \Rightarrow \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} ; \begin{array}{l} \text{kompleks} \\ \text{düzleme} \end{array}$$

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} ; \begin{array}{l} \text{kartezi} \\ \text{düzleme} \end{array}$

Moment : Bir  $\vec{F}$  kuvvetinin herhangi bir O noktasında göre momenti şu şekilde ifade edilir.



$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$ : O noktasından kuvvet vektöründen doğrultusundaki herhangi bir noktasaya gizilen uzaklık vektörüdür.

$$\vec{M}_o = \vec{r}_2 \times \vec{F} = r_2 \times \vec{F}$$

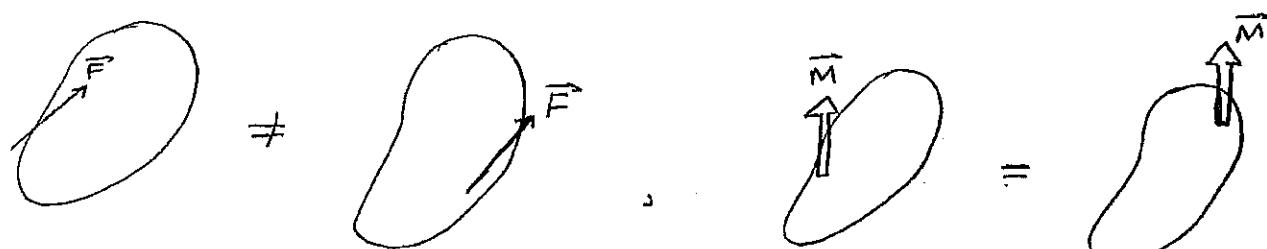
$$|\vec{M}_o| = r_2 |F| \sin\theta_1 = r_2 |F| \sin\theta_2 = F \cdot h$$

Moment serbest bir vektördür. Yani

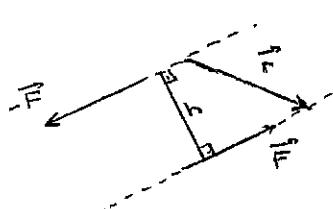
i) şiddeti

ii) Yönü

vardır. Fakat herhangi bir etki noktası yoktur.



Kuvvet Çifti: Kuvvet çiftleri bir moment oluşturur. Bu moment,



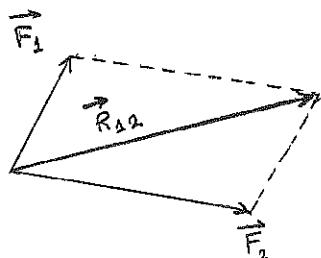
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = h F \quad \text{seklinde ifade edilebilir.}$$

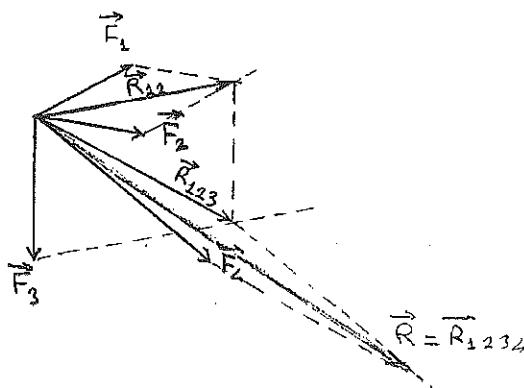
## Kuvvetlerin Toplanması

a) Bir noktada çakışan kuvvetler

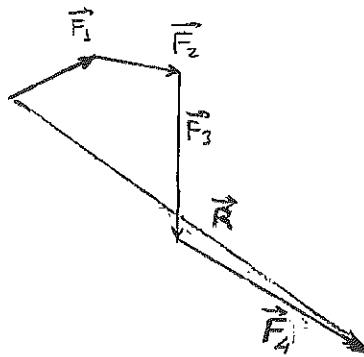
Paralelogram kuralı geçerlidir.



Birçok kuvvetin bir noktada çakıştığı durumlarda paralelogram kuralı kuvvetlere çiftler çiftler uygulanabilir.



Vektör çokgeni oluşturularak da kuvvetlerin toplamı bulunabilir.



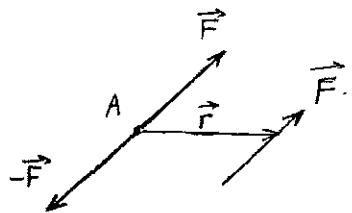
Genel bir ifade ile bileşke kuvveti ve bileşenleri aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

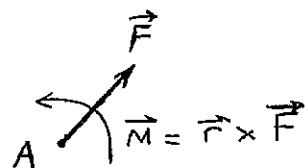
$$R_x = \sum_i F_{ix}, \quad R_y = \sum_i F_{iy}, \quad R_z = \sum_i F_{iz}$$

b) Bir noktada çakışmayan kuvvetler

Herhangi bir  $\vec{F}$  kuvvetinin etki doğrultusunu A noktasından geçenek şekilde getirmek için A noktasına etki eden  $\vec{F}$  ve  $-\vec{F}$  kuvvetleri olduğunu düşünelim.



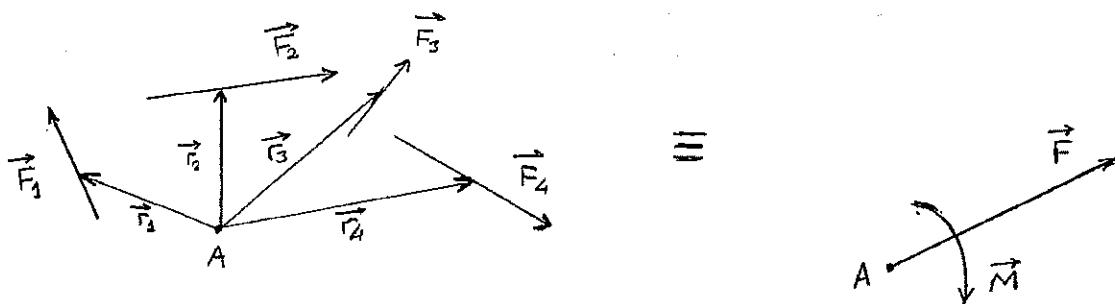
$\equiv$



$\vec{F}$  ve  $-\vec{F}$  kuvvet çifti oluşturur.

Böylece, herhangi bir etki doğrultusu olan bir kuvvet, bu etki doğrultusuna paralel, A noktasından geçen şiddeti aynı bir kuvvete ve bu etki doğrultusu ile A noktasının tanınmadığı düzleme dik yönde bir momente indirgenmiş olur.

Bu tanım kullanılarak, tek noktada çakışmayan bir kuvvet sistemi, etki doğrultusu segilen herhangi bir noktadan geçen bir kuvvete ve bununla birlikte bir momente indirgenebilir.



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad , \quad \vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

Kuvvet ve momentten oluşan bu bileşke tek bir  $\vec{R}$  kuvvetinde indirgenebilir. Bu durumda  $\vec{R}$  kuvvetinin A noktasında oluşturacağı moment, kuvvet sisteminin A noktasına göre oluşturduğu momente eşit olmalıdır.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

Moment ıgin genel bir sıkıntımı:

Kurvet vektörünü

$$\vec{F} = F \vec{v}$$

şeklinde gösterelim. Burada  $F$ ,  $\vec{F}$  kurvetinin siddetini ve  $\vec{v}$  ise  $\vec{F}$  kurveti üzerinde bir birim vektörü göstermektedir.

$\vec{F}$  kurveti üzerinde bir birim vektörü  $\vec{r}$ 'yi

Benzer bir şekilde konum vektörü  $\vec{r}$ 'yi

$\vec{r} = r \vec{u}$  olarak gösterebiliriz. Burada  $r$ , O noktasından  $\vec{F}$  kurvetinin etki doğrusunu üzerinde bir noktasına çizilen konum vektörünün uzunluğunu,  $\vec{u}$  ise bu konum vektörünün üzerinde bir birim vektörü göstermektedir.

$\vec{F}$  kurvetinin O noktasından geçen ve yüzeye düzeye dik olan bir eksene göre momenti:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (r \vec{u}) \times (F \vec{v}) = r F (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$\vec{u} = 1 \angle \alpha = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

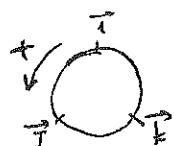
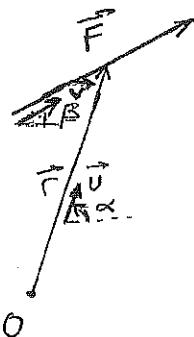
$$\vec{v} = 1 \angle \beta = \cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}$$

$\alpha$ : Konum vektörü doğrusunda çizilen birim vektörin  $+x$  ekseni ile yapmış olduğu açı

$\beta$ : Kurvet vektörü doğrusunda çizilen birim vektörin  $+x$  ekseni ile yapmış olduğu açı

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= (\cos \alpha, \sin \beta) \vec{k} + (\sin \alpha, \cos \beta) (-\vec{k}) \\ &= (\sin \beta \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \beta) \vec{k} \\ &= \sin(\beta - \alpha) \vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin(\beta - \alpha) \vec{k}$$



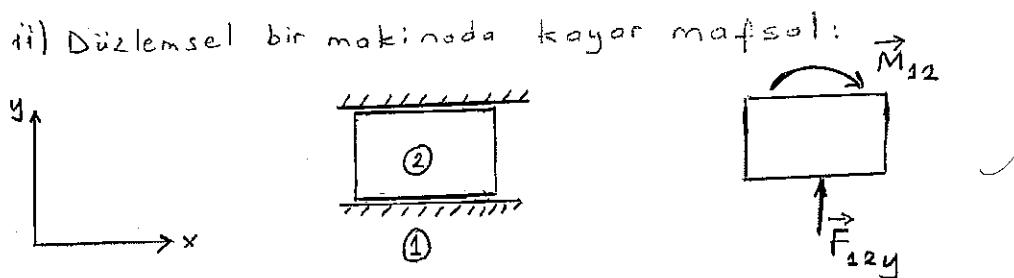
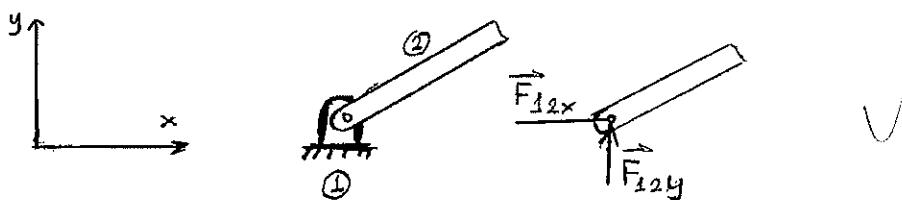
### 1.3. Makinolarda Kuvvetler

Not: Kuvvet ve momente genelleştirilmiş kuvvet diyeceğiz ve bazen kuvvet denildiğinde bunun bir kuvvet veya moment olabileceği düşünülmeli.

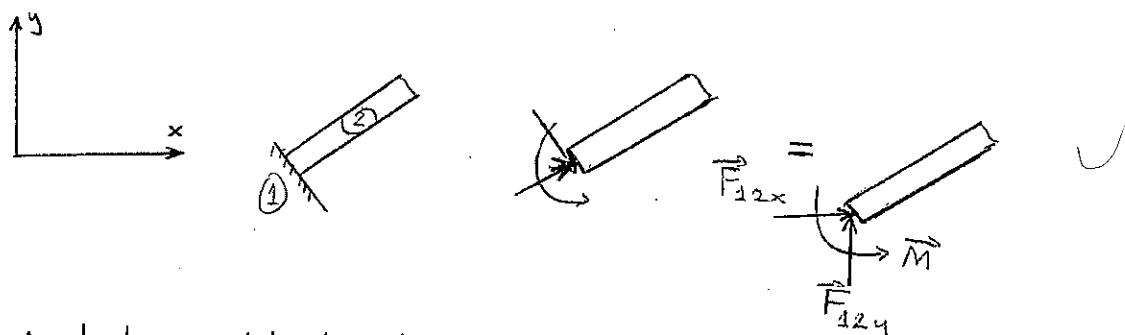
#### a) Tepki Kuvvetleri (Mafsal Kuvvetleri)

Mafsal kuvveti bileşenleri, o mafsalda hareket serbestisiinin sınırlandırıldığı yönlende olacaktır.

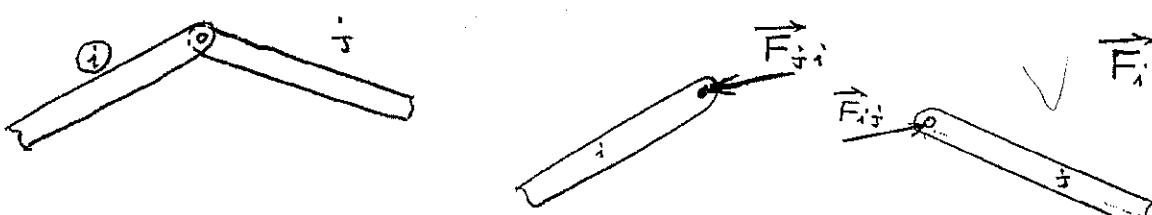
i) Düzlemsel bir makinada döner mafsal:



iii) Sabit (ankastre) kugelantı:



Mafsal kuvvetleri etki-tepki prensibine göre herbir uzunluğa eşit ve ters yöndedir.



$\vec{F}_{ij}$ : i uzunluğun  $j$  uzununa uyguladığı kuvvet

$\vec{F}_{ji}$ :  $j$  " "  $i$  " "

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$|\vec{F}_{ij}| = |\vec{F}_{ji}|$$

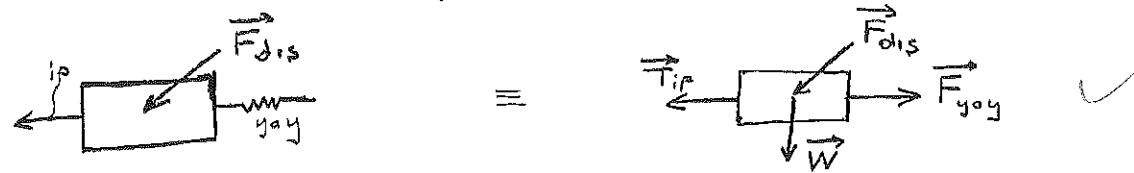
vega

$F_{ij} = F_{ji}$

siddetleri  
esit  
olmalıdır.

## b) Fiziksel Kuvvetler:

- Dış kuvvetler
- Cisimlerin ağırlığı
- Cisme bağlı olan yay veya ipde oluşan kuvvetler



## c) Sürünme veya direnç kuvvetleri:

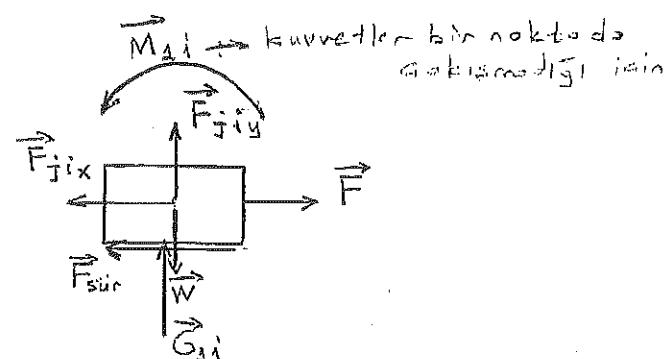
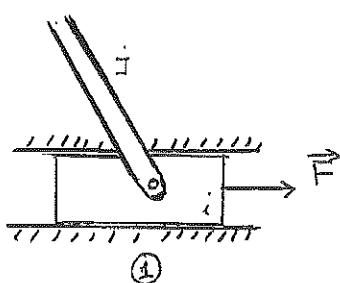
- \* Statik sürünme kuvveti
- \* Coulomb kuru sürünme kuvveti ✓
- \* Viskos sürünme kuvveti

## d) Atelet kuvvetleri: ✓

Bu kuvvetler cisim ateletinden dolayı oluşan virtüel (sanal) kuvvetlerdir.

### 1.4. Serbest Cismi Diyagramı (Görüntüsü)

Makinalarda statik veya dinamik kuvvet analizinin başlangıç noktası serbest cisim görüntülerinin çizilmesidir. Bu görüntüler oluşturulduktan sonra Newton kanunları kullanılarak hareket denklemleri elde edilir ve bu denklemler bilinmeyen değerler için çözülür. Doğru bir sonuc elde etmek için mutlaka doğru bir serbest cisim görüntüsünün çizilmesi gereklidir. ✓



## • 2. MAKİNALARDA STATİK KUVVET ANALİZİ

### 2.1. Statik Denge

Statik denge şartları şu şekildedir.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

Bu denklemeler 3 boyutlu ve düzlemsel sistemler için aşağıdaki gibi ifade edilebilir

#### i) 3 boyutlu (uzayosal) sistemlerde

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \sum \vec{M}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad \sum \vec{M}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_z = 0 \quad \sum \vec{M}_z = 0$$

#### ii) 2 boyutlu (düzlemsel) sistemlerde

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \sum \vec{M}_z = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

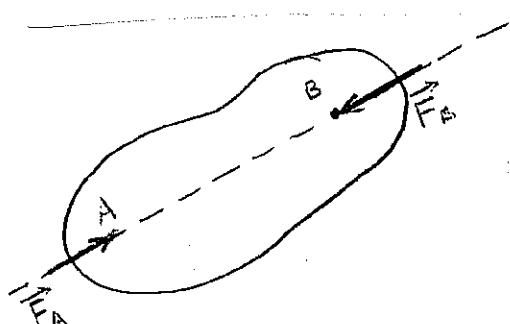
Statik denge problemlerini çözmek için; (herbir uzun ikin)

a) Serbest cisim diyagramı çiz

b) Yukarıdaki denklemeleri kullan

Düzlemsel kuvvet sistemlerinde statik dengede olan bir cisim ikin asağıda gösterilen durumlardan birisi geçerlidir:

a) İki kuvvet etkisi altında denge:

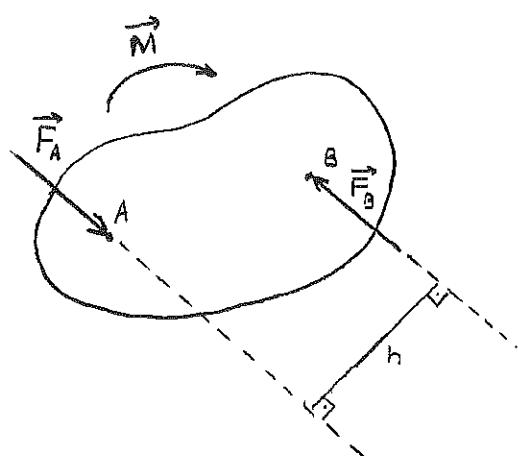


- Kuvvetler aynı doğrultuda etki etmelidir
- Kuvvetlerin siddetleri birbirine eşit olmalıdır.
- Kuvvetlerin yönleri birbirine ters olmalıdır.

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \quad \text{ve} \quad F_A = F_B$$

siddet

b) iki kuvvet ve bir moment etkisi altında denge

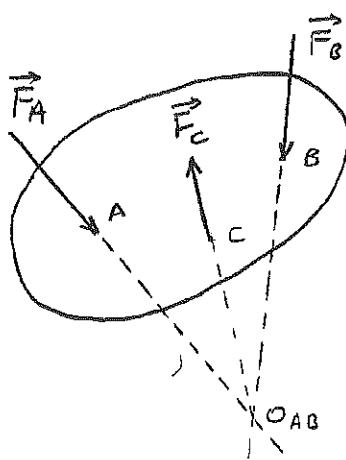


\* Etki eden iki kuvvet bir kuvvet çifti oluşturmalıdır. Bu kuvvet çiftin oluşturduğu moment, etki eden momente siddet olarak eşit ve ters yönde olmalıdır.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \Rightarrow \vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

$$|\vec{M}| = h |\vec{F}_A| = h |\vec{F}_B|$$

c) üç kuvvet etkisi altında denge



$\vec{F}_A$  ve  $\vec{F}_B$  kuvvetlerinin bilişliğini kabul edelim ve statik dengein sağlanması bilmesi için  $\vec{F}_C$  kuvvetini belirleyelim. Bunun için  $\vec{F}_A$  ve  $\vec{F}_B$  kuvvetlerinin etki doğrultularının kesişiminde bir  $O_{AB}$  noktası olalım.

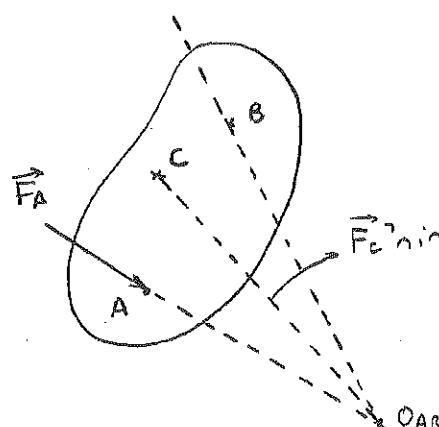
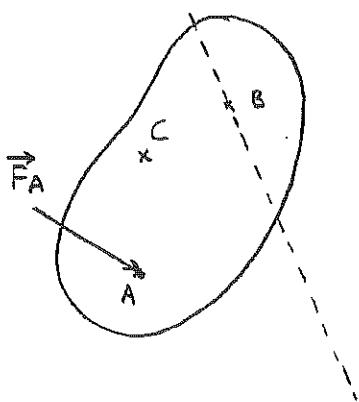
Statik denge için  $\sum \vec{M}_{O_{AB}} = 0$  olmalıdır.

$\therefore \vec{F}_C$ ,  $O_{AB}$  noktasından geçmelidir.

Yani statik denge için üç kuvvet aynı noktasında kesişmelidir ve  $\sum \vec{F} = 0$  şartından

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \text{ olmalıdır.}$$

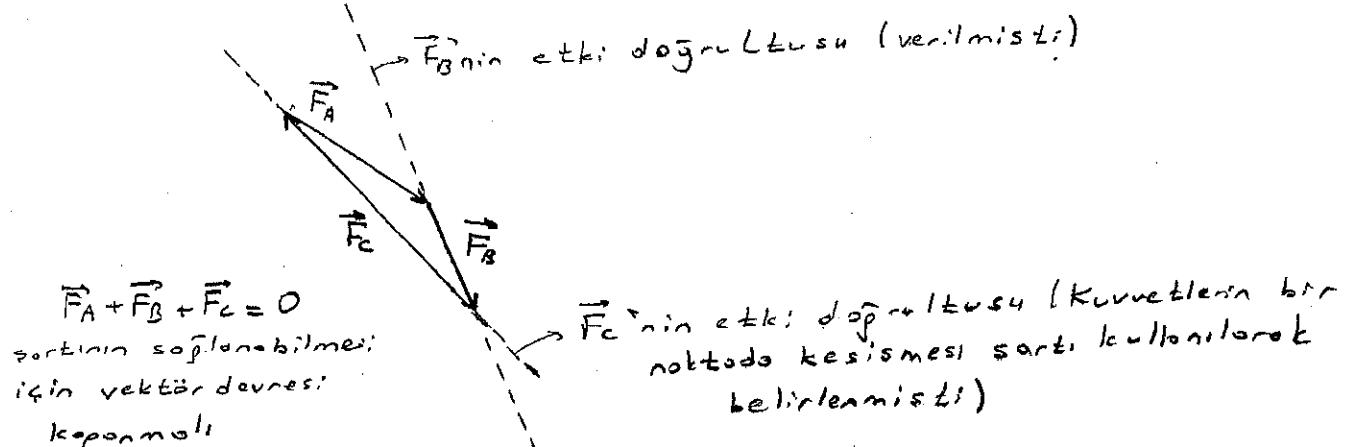
\*  $\vec{F}_A$  kuvveti ve  $\vec{F}_B$ 'nın etki doğrultusu verilmiş olsun statik denge için  $\vec{F}_B$  ve  $\vec{F}_C$  kuvvetlerini bulalım.



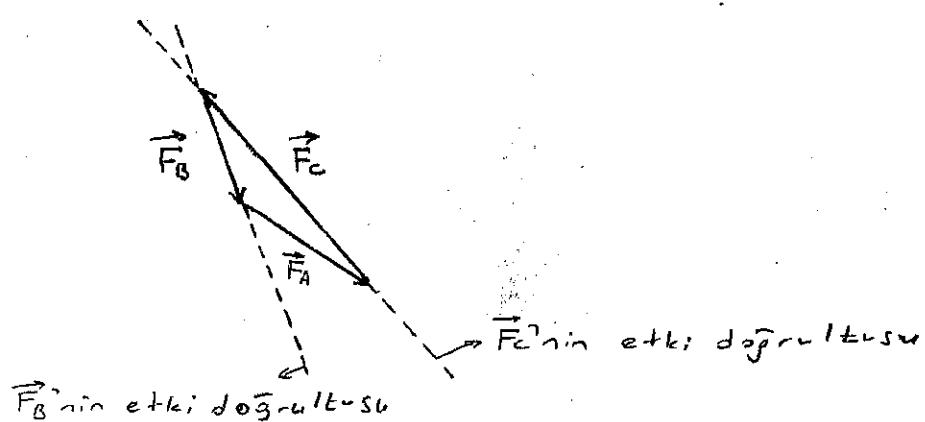
$\vec{F}_C$ 'nın etki doğrultusu

$O_{AB}$

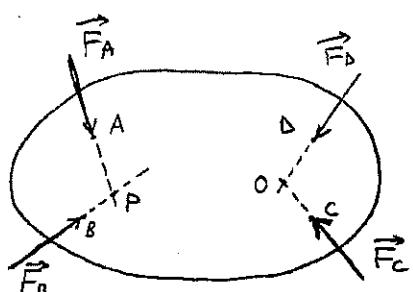
Bilinen  $\vec{F}_A$  kuvveti belli bir etkeden çizilir.  $\vec{F}_A$ 'nın bir ucuna  $\vec{F}_B$ 'nın etkisi doğrultusu yanlarında bir doğru, diğer ucuna  $\vec{F}_C$ 'nın etkisi doğrultusu yanlarında bir doğru çizilir. Bu doğruların kesim noktası kullanılarak  $\vec{F}_B$  ve  $\vec{F}_C$  kuvvetleri belirlenir.



veya



d) Dört kuvvet etkisi altında denge



$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{R}_{AB}$$

$$\vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{R}_{CD}$$

Denge şartları:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = 0$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{AB} + \vec{R}_{CD} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{AB} = -\vec{R}_{CD} \text{ olmalı}$$

$$\sum \vec{M} = 0$$

$\Rightarrow \vec{R}_{AB}$  ve  $\vec{R}_{CD}$  aynı doğrultuda olmalı  
(O ve P noktalarını birleştiren doğruluk üzerinde)

$\therefore \vec{R}_{AB}$  ve  $\vec{R}_{CD}$ , aynı doğrultuda, siddetleri eşit, yönleri zıt iki vektör olmalıdır.

2.2. Sürükmenin olmadığı durum

Sisteme etki eden kuvvetler fiziksel kuvvetler ve mafsal kuvvetleri olacaktır.

Analitik çözüm için herbir uzunun ayrı ayrı serbest cisim  
görüntüsü çizilir. Bilinen ve bilinmeyen kuvvetler belirlenir. Sonra  
her bir uzun için statik denge denklemleri ( $\sum \vec{F} = 0$ ,  $\sum \vec{M} = 0$ )  
yazılır. Bu denklemler kullanılarak bilinmeyen kuvvetler belirlenir.

**Örnek:** Dört-qubuk (dört-kol) mekanizması

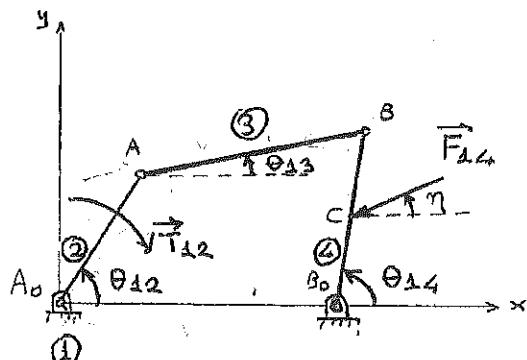
$$A_0 B_0 = \alpha_1, \quad A_0 A = \alpha_2$$

$$AB = \alpha_3 \quad , \quad B_0 B = \alpha_4$$

$$B_0 C = F_4$$

F14

$$\theta_{22}, \theta_{33}, \theta_{24} : \checkmark$$



Sistem  $\vec{F}_{14}$  kuvveti ve  $\vec{T}_{12}$  momentinin etkisi altında statik dengede durmaktadır. Sisteme sürünme yoktur ve nesnelerin ihmali edilebilir. Sistemin statik olarak dengede olabilmesi için  $\vec{T}_{12}$  momentini ve mafsal kuvvetlerini belirleyiniz. ✓

Gözüm: İlk önce bütün uzuvların serbest cisim görüntülerini çizilmelidir.

Uzur 3: iki kuvvet etkisi altında dengede bulunmaktadır. Bu durumda bu uzur etki eden iki kuvvet,  $\vec{F}_{23}$  ve  $\vec{F}_{43}$ 'ün şiddetleri birbirine eşit, yönleri birbirine ters ve etki doğrultuları AB doğrusu olmalıdır.

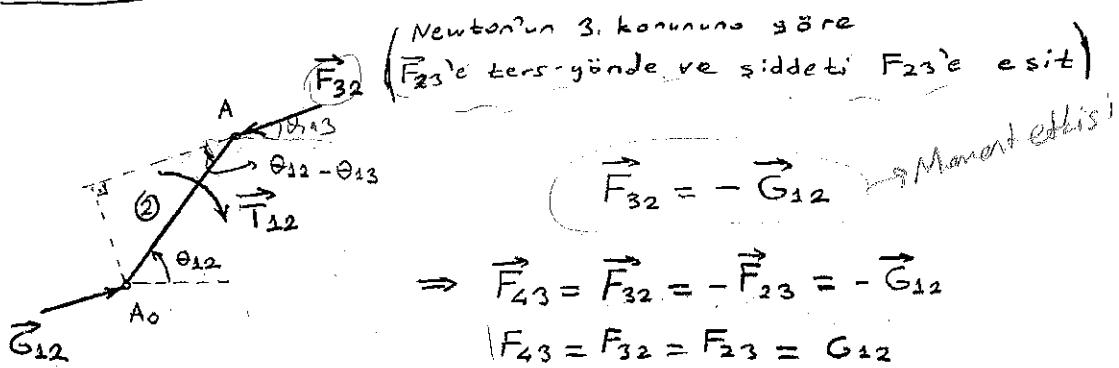
$$\vec{F}_{43} = -\vec{F}_{23}$$

$$F_{43} = F_{23}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F_{A3} \times d_3 = \text{sinket}$$

$$F_{2,3} y \cos \theta_{13} = 0$$

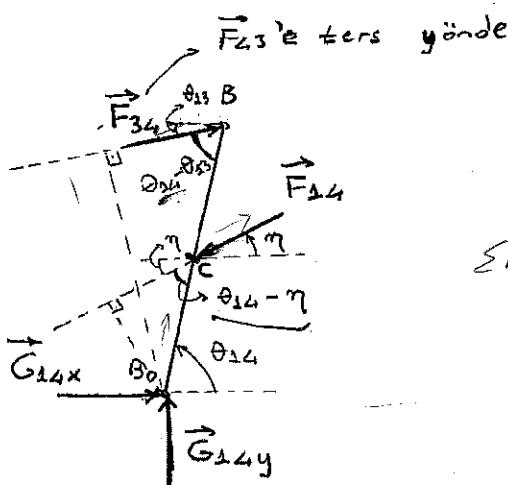
Uzuv 2 : iki kuvvet ve bir moment etkisi altında dengededir.



$$\sum M_{A_0} = 0 \Rightarrow F_{32} \cdot a_2 \cos \theta_{12} - F_{32} \cdot a_2 \sin \theta_{12} \cdot T_{12} = 0$$

Uzuv 4 : 3 kuvvet etkisi altında dengededir.

$$\sum M_{A_0} = 0 \Rightarrow F_{32} a_2 (\sin(\theta_{12} - \theta_{13})) + T_{12}$$



Gizilen serbest cisim görüntülerine göre

$$\vec{F}_{43} = \vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23} = -\vec{G}_{12} = -\vec{F}_{34}$$

$F_{43} = F_{32} = F_{23} = G_{12} = F_{34} = F$   
 seklindedir. Aynı zamanda vektörel olarak

$$\vec{F}_{23} = \vec{F}_{34} = \vec{G}_{12} = F \angle \theta_{13}$$

$$\vec{F}_{43} = \vec{F}_{32} = F \angle \theta_{13} + 180^\circ \quad \text{seklindedir.}$$

Bilinmeyen kuvvet ve momentler:  $F$ ,  $G_{14x}$ ,  $G_{14y}$ ,  $T_{12}$  'dir.

Bilinmeyen kuvvetleri sözmek için 4 uzvu için 3 denge denklemi, 2 uzvu için ise bir denge denklemi (moment denge denklemi) yazmamız yeterli olacaktır. Şimdi bu denklemeleri yazalım

Net yönleri farklı  $F$



(14)

$$\sum M_{B_0} = F \cdot l_4 \sin(\beta - \alpha)$$

### 1. uzun için

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow -F_{14} \cdot \cos \eta + F \cdot \cos \theta_{13} + G_{14x} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow -F_{14} \cdot \sin \eta + F \cdot \sin \theta_{13} + G_{14y} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum \vec{M}_{B_0} = 0 \Rightarrow \left[ F_{14} \cdot r_4 \cdot \sin(\theta_{14} - \eta) \right] - F \cdot a_4 \cdot \sin(\theta_{14} - \theta_{13}) = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$\oplus$

### 2. uzun için

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow F \cdot a_2 \cdot \sin(\theta_{12} - \theta_{13}) - T_{12} = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

Üç denklem 4 bilinmeyen bulunmaktadır. (3) numaralı denklem kullanılarak  $F$  kuvveti bulunabilir. Daha sonra bulunan  $F$  değerini (1) ve (2) numaralı denklemlerde yerine yazılarak  $G_{14x}$  ve  $G_{14y}$  bulunur. Son olarak (4) numaralı denklem kullanılarak  $T_{12}$  bulunur. Gözüm sonucunda eğer herhangi bir kuvvetin siddeti eksiz işaretli olursa, bu o kuvvetin yönünün önceden serbest cisim diyeğrimde gösterilmiş olan yöne göre ters yönde olduğunu gösterir.

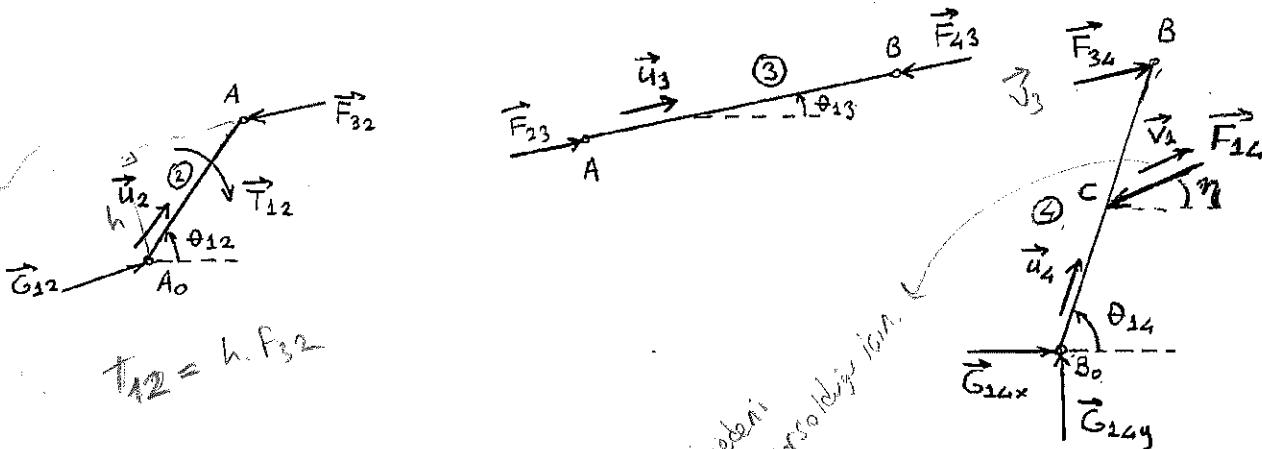
Yukarıda anlattıklarımızı genelleştirirsek

- iki kuvvetin etkisi altında denpede olan bir cisim için denge denklemini yazmamız gereklidir.
- iki kuvvet ve bir moment etkisi altındaki bir cisim denge ise, sadece moment denge denklemini yazmamız yeterlidir.
- Üç veya daha fazla kuvvetin etkisi altında denge durumunda üç denge denklemi de ( $\sum \vec{F}_x = 0$ ,  $\sum \vec{F}_y = 0$ ,  $\sum \vec{M} = 0$ ) yazmamız gereklidir.

Mehmet A.

Note: Moment denge denklemlerini, moment konusunda görmüş olduğumuz genel ekuasyon kullanarak da elde edebiliriz.

Dört kol mekanizmasının serbest cisim diyagramını tekrar çizerek



1 uzun için moment denklemi

$$\sum \vec{M}_{B_0} = 0 \Rightarrow (\alpha_4 \vec{u}_4) \times (\vec{F}_{32}) + (r_4 \vec{u}_4) \times [\vec{F}_{14}(-\vec{v}_1)] = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_4 F \sin(\theta_{23} - \theta_{14}) - r_4 F_{14} \sin(\eta - \theta_{14}) = 0$$

Sonra devam etti

$$= -\sin(\theta_{14} - \theta_{23}) \quad = -\sin(\theta_{14} - \eta)$$

2 uzun için moment denklemi:

$$\sum M_{A_0} = 0 \Rightarrow (\alpha_2 \vec{u}_2) \times [F(-\vec{u}_3)] - T_{12} \vec{k} = \vec{0}$$

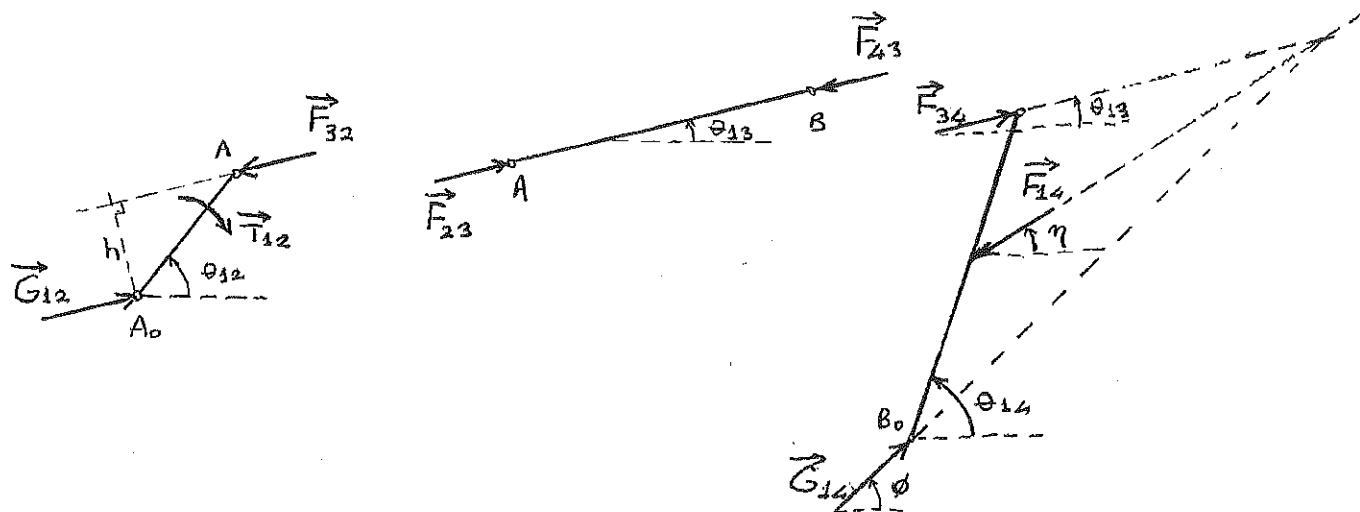
$$\Rightarrow [-\alpha_2 F \sin(\theta_{23} - \theta_{12}) - T_{12}] \vec{k} = \vec{0}$$

elde edilenin  
ve ve bu iki ekuasyon  
birlikte de olur.

$$\Rightarrow \alpha_2 F \sin(\theta_{12} - \theta_{23}) - T_{12} = 0$$

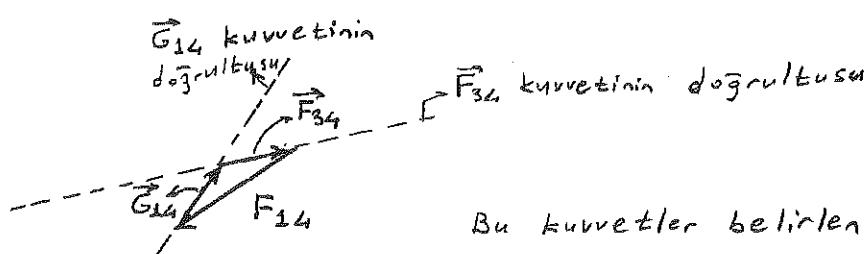
olarak yazılabilir. Bu denklemler de önceden dik vektörler, kullanarak elde etmiş olduğumuz moment denge denklemleri ile aynıdır. Ancak denklemler deko basit bir şekilde elde edilebilmiştir.

Şimdi aynı soruyu Grafiksel metod kullanarak tekrar çözelim.



4 uzunun üç kuvveti etkisi altında dengede olmasından dolayı, kuvvetler bir noktada kesişmelidir.  $\vec{F}_{14}$  kuvvetinin yönü ve şiddeti bilindiginden ve  $F_{34}$  kuvvetinin yönü bilindiginden,  $\vec{G}_{14}$  kuvvetinin yönü ( $\phi$  osası),  $B_0$  ile çıkışma noktası birleştirilerek bulunur.

Daha sonra kuvvet çökgeni çizilerek bilinmeyen  $\vec{G}_{14}$  ve  $\vec{F}_{34}$  kuvvet şiddetleri belirlenir. Bunun için ilk olarak  $\vec{F}_{14}$  kuvveti belirli bir ölçek kullanılarak (örneğin mm/N gibi) çizilir. Bundan sonra gizmis olduğumuz  $\vec{F}_{14}$  kuvvetinin iki ucundan  $\vec{G}_{14}$  ve  $\vec{F}_{34}$  kuvvetlerinin bilinen yönlerine paralel doğrular çizilir. Bu iki çizginin kesistiği noktası  $\vec{G}_{14}$  ve  $\vec{F}_{34}$  kuvvetlerinin üç noktalarıdır.

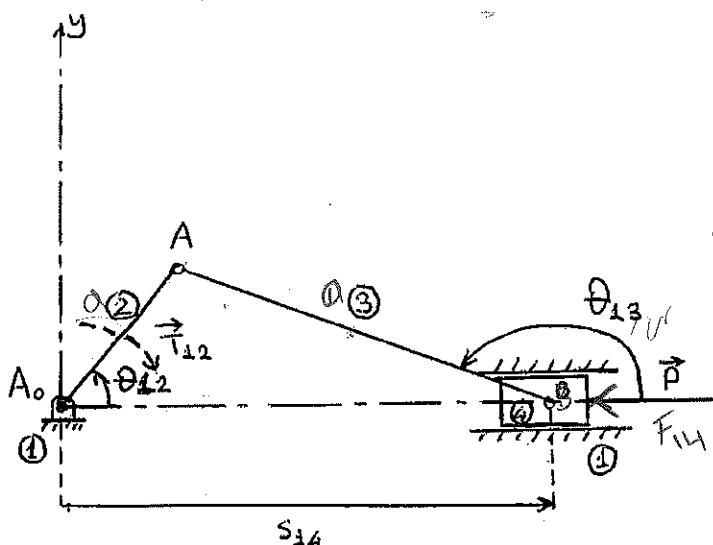


Bu kuvvetler belirlendikten sonra,

$$\vec{F}_{43} = -\vec{F}_{34}, \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{43}, \vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23} \text{ ve } \vec{G}_{12} = -\vec{F}_{32}$$

Kuvvetleride belirlenmiş olur. Böylece tüm mafsul kuvvetleri belirlenmiş olur. Böylece  $\vec{T}_{12}$  giriş momentini bulmak için,  $A_0$  noktasından  $\vec{F}_{32}$  kuvvetinin etki doğrultusuna bir dik çizdigimizde bu dikme uzunluğu  $h$  ise,  $T = h \cdot F_{32}$  olsatır bulunur. Bu giriş momentinin yönü  $\vec{F}_{23}$  ve  $\vec{G}_{12}$  kuvvetlerinin oluşturduğu kuvvet çifti momentine ters yöndedir.

## Örnek: Krank-Bigel Mekanizması



$$A_0 A = a_2$$

$$AB = a_3$$

④ uzvuna  $\vec{P}$  kuvveti için mekanizmayı statik olarak dengede tutacak ② uzvuna uygulanması gereken  $\vec{T}_{12}$  torju uygulaması gereken  $\vec{T}_{13}$  torju  $\theta_{12}$  nin bütün değerler için hesaplayınız. Sistemde sürünme yoktur ve uzv uğırlıkları ihmal edilebilir. Ayrıca mafsal kuvvetlerini belirleyiniz.

Cözüm: İlk önce  $\theta_{13}$  ve  $s_{14}$ 'in alacağı değerler  $\theta_{12}$  cinsinden belirlenir. (Konum analizi)

$$\overrightarrow{A_0 A} = \overrightarrow{A_0 B} + \overrightarrow{B A} \quad (\text{Derle kopulluk denklemi})$$

$$a_2 e^{i\theta_{12}} = s_{14} + a_3 e^{i\theta_{13}}$$

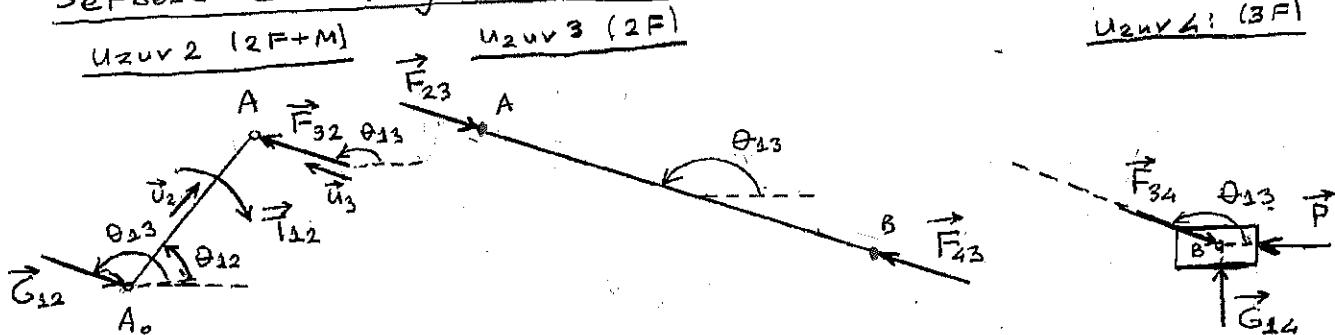
$$\text{Re: } a_2 \cos \theta_{12} = s_{14} + a_3 \cdot \cos \theta_{13} \quad \dots \dots \quad (1)$$

$$\text{Im: } a_2 \sin \theta_{12} = a_3 \cdot \sin \theta_{13} \quad \dots \dots \quad (2)$$

$$(2) \text{den: } \theta_{13} = \sin^{-1} \left( \frac{a_2}{a_3} \sin \theta_{12} \right) \quad , \quad |\theta_{13}| > 90^\circ$$

$$(1) \text{den: } s_{14} = a_2 \cdot \cos \theta_{12} - a_3 \cdot \cos \theta_{13}$$

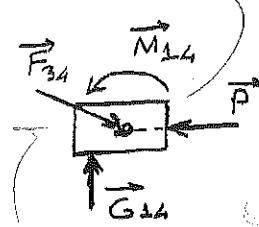
Serbest cisim görüntülerleri:



$$\vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43} = \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32} = \vec{G}_{12}$$

$$F_{34} = F_{43} = F_{23} = F_{32} = G_{12} = F$$

Not:  $\vec{G}_{14}$  kuvveti kayar mafsal eksenine dik olmak üzere 4 uzun üzerinde herhangi bir noktaya etki edebilir.



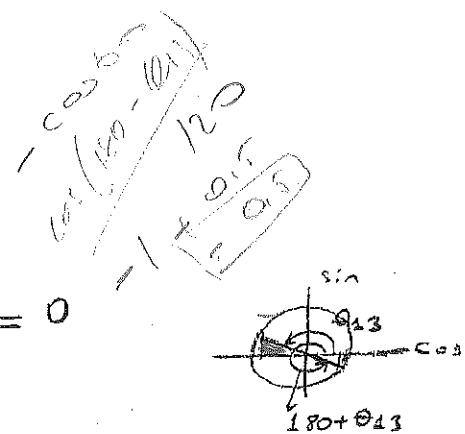
4 uzun static dengede olduğundan bu yerlestirme sadece  $M_{14}$  momenti değerini etkileyecektir.

Eğer  $\vec{G}_{14}$  kuvveti,  $\vec{P}$  ve  $\vec{F}_{34}$  kuvvetlerinin etkisine neden olduğundan geçerelik şekilde yerleştiriliyor ise,  $M_{14}$  momenti 0 olacaktır. Aynı akıl yürütmesi  $\vec{P}$ 'nin farklı bir noktadan etki etme durumu içinde geçerlidir.

### Denge Denklemleri:

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \text{ uzun için:} \\ \hline \sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow & \\ \hline \end{array}$$

$$-P + F \cdot \cos(\theta_{13} + 180^\circ) = 0 \\ = -\cos \theta_{13}$$



$$\Rightarrow -P - F \cdot \cos \theta_{13} = 0$$

$$\Rightarrow F = -\frac{P}{\cos \theta_{13}}$$

$\Rightarrow$  Mafsal kuvvetleri şu şekilde dir. (Bulunan sıddet  $\angle$  Serbest cis. Gör'deki açı)

$$\vec{F}_{34} = \vec{F}_{23} = \vec{G}_{12} = -\frac{P}{\cos \theta_{13}} \quad \angle \theta_{13} + 180^\circ$$

$$\vec{F}_{43} = \vec{F}_{32} = -\frac{P}{\cos \theta_{23}} \quad \angle \theta_{23}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow G_{14} + F \cdot \sin(\theta_{13} + 180^\circ) = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= -\sin \theta_{13}$$

$$\Rightarrow G_{14} - F \cdot \sin \theta_{13} = 0$$

$$\Rightarrow G_{14} = F \cdot \sin \theta_{13} = -P \frac{\sin \theta_{13}}{\cos \theta_{13}} = -P \cdot \tan \theta_{13}$$

$$\vec{G}_{14} = -P \cdot \tan \theta_{13} \angle 90^\circ = -P \cdot \tan \theta_{13} (\cos 90^\circ \hat{i} + \sin 90^\circ \hat{j}) = -P \cdot \tan \theta_{13} \hat{j}$$

## 2. Uzvu için

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow (\alpha_2 \vec{u}_2) \times (F \vec{u}_3) + T_{12} (-\vec{k}) = 0$$

$$\Rightarrow [a_2 F \sin(\theta_{23} - \theta_{42}) - T_{12}] \vec{k} = 0$$

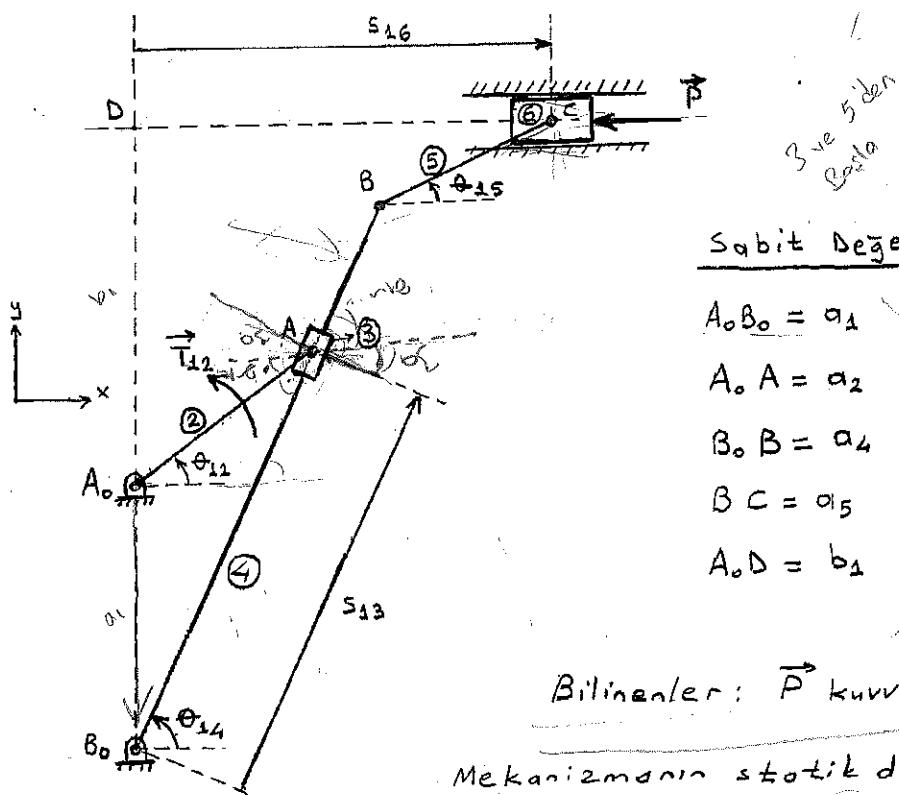
$$\Rightarrow T_{12} = a_2 \cdot F \cdot \sin(\theta_{23} - \theta_{42})$$

$$\Rightarrow T_{12} = -a_2 \cdot P \cdot \frac{\sin(\theta_{23} - \theta_{42})}{\cos \theta_{13}}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_{12} = T_{12} (-\vec{k}) = a_2 \cdot P \cdot \frac{\sin(\theta_{23} - \theta_{42})}{\cos \theta_{13}} \vec{k}$$

$\theta_{42}$	$T_{12}$
0°	0
5°	—
10°	—
—	—
—	—
360°	—

Örnek:



Sabit Değerler

$$A_0 B_0 = a_1$$

$$A_0 A = a_2$$

$$B_0 B = a_4$$

$$B C = a_5$$

$$A_0 D = b_1$$

Konum Değişkenleri

$$\theta_{12}$$

$$\theta_{14}$$

$$\theta_{15}$$

$$s_{13}$$

$$s_{16}$$

Bilinenler:  $\vec{P}$  kuvveti, sabit değerler,  $\underline{\theta_{12}}$

Mekanizmanın statik dengede olması için 2 uzunluğunu uygulanması gereken  $\vec{T}_{12}$  torkunu hesaplayınız.

Mesal kuvvetlerini belirleyiniz. (Sistemdeki sürtünmeyi ve uzuv ağırlıklarını ihmal ediniz.)

Gözüm: İlk önce mekanizmanın konum analizinden konum değişkenleri  $\theta_{14}, \theta_{15}, s_{13}$  ve  $s_{16} \rightarrow \theta_{12}$  cinsinden belirlenmelid.

Mekanizma modeli,

$$\begin{array}{l} \text{Mafsal sayısı : } j = 7 \\ \text{Uzur " : } l = 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Bağımsız vektör devre} \\ \text{denklemi sayısı} \end{array} : L = j - l + 1 = 2$$

Bağımsız vektör devre denklemleri:

$$\vec{A_0 A} = \vec{A_0 B_0} + \vec{B_0 A} \quad \dots \quad (1)$$

$$\vec{B_0 B} + \vec{B C} = \vec{B_0 D} + \vec{D C} \quad \dots \quad (2)$$

$$(1)'den : a_2 \cdot e^{i\theta_{12}} = -i(a_1) + s_{13} \cdot e^{i\theta_{14}} \quad \dots \quad (3)$$

$$(2)'den : a_4 \cdot e^{i\theta_{14}} + a_5 \cdot e^{i\theta_{15}} = i(a_1 + b_1) + s_{16} \quad \dots \quad (4)$$

(3) numaralı denklemi reel ve sanal kisimlarına ayırsak

$$\text{Re: } a_2 \cdot \cos \theta_{12} = s_{13} \cdot \cos \theta_{14} \Rightarrow s_{13} \cdot \cos \theta_{14} = a_2 \cdot \cos \theta_{12} \quad (5)$$

$$\text{Im: } a_2 \cdot \sin \theta_{12} = -a_1 + s_{13} \cdot \sin \theta_{14} \Rightarrow s_{13} \cdot \sin \theta_{14} = a_1 + a_2 \cdot \sin \theta_{12} \quad (6)$$

(6) numaralı denklemi (5) numaralı denklem'e bölersenk

$$s_{13} \cdot \tan \theta_{14} = \frac{a_1 + a_2 \cdot \sin \theta_{12}}{a_2 \cdot \cos \theta_{12}} \Rightarrow \theta_{14} = \tan^{-1} \left( \frac{a_1 + a_2 \cdot \sin \theta_{12}}{a_2 \cdot \cos \theta_{12}} \right)$$

(5) ve (6)'nın karelerini al ve taraf taraf'a topla

$$s_{13}^2 \cos^2 \theta_{14} + s_{13}^2 \sin^2 \theta_{14} = a_2^2 \cos^2 \theta_{12} + a_1^2 + a_2^2 \sin^2 \theta_{12} + 2a_1 a_2 \sin \theta_{12} = a_1^2$$

$$\Rightarrow s_{13} = \sqrt{a_2^2 + a_1^2 + 2a_1 a_2 \sin \theta_{12}}$$

(4) numaralı denklemi reel ve sanal kisimlarına ayırsak;

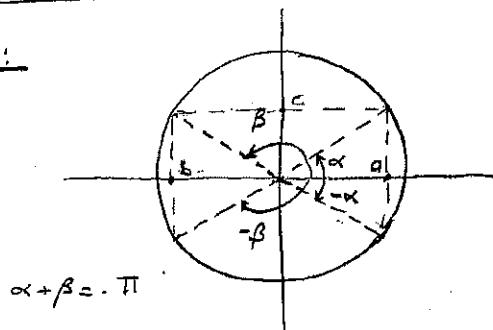
$$\text{Re: } a_4 \cdot \cos \theta_{14} + a_5 \cdot \cos \theta_{15} = s_{16} \quad \dots \quad (7)$$

$$\text{Im: } a_4 \cdot \sin \theta_{14} + a_5 \cdot \sin \theta_{15} = a_1 + b_1 \quad \dots \quad (8)$$

(8) numaralı denklemler:

$$\sin \theta_{15} = \frac{a_1 + b_1 - a_4 \cdot \sin \theta_{14}}{a_5} \Rightarrow \theta_{15} = \sin^{-1} \left( \frac{a_1 + b_1 - a_4 \cdot \sin \theta_{14}}{a_5} \right)$$

Not:



$$\cos^{-1}(a) = \alpha, -\alpha$$

$$\cos^{-1}(b) = \beta, -\beta$$

$$\sin^{-1}(c) = \alpha, (\pi - \alpha) = \beta$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}(x) = \sigma |\cos^{-1}(x)|, \sigma = \pm 1$$

(II)	$\sin$	(I)	
$\sin: +$		$\sin: +$	
$\cos: -$		$\cos: +$	$\cos$
→			
(III)	$\sin: -$	$\sin: -$	(IV)
$\cos: -$		$\cos: +$	

$$\sin(\theta) = \sin(-\pi - \theta)$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Eğer  $\theta_{15}$ 'i kosinüs cinsinden ifade etmek isterseniz:

(8) numaralı denkleme  $\sin \theta_{15}$ 'i, kosinüs cinsinden yazalım.

$$a_5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{15}\right) = a_1 + b_1 - a_4 \cdot \sin \theta_{14}$$

$$= \cos\left(\theta_{15} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_{15} = \frac{\pi}{2} + \sigma \left| \cos^{-1} \left( \frac{a_1 + b_1 - a_4 \cdot \sin \theta_{14}}{a_5} \right) \right|$$

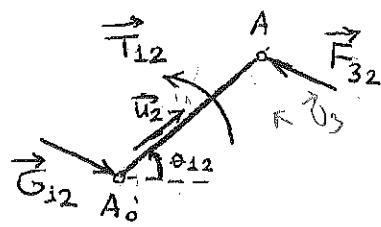
Son olarak (7) numaralı denklemler

$$s_{16} = a_4 \cdot \cos \theta_{14} + a_5 \cdot \cos \theta_{15}$$

olarak bulunur. Şimdi herbir uzunluk serbest cisim  
görüntülerini çizilebilir.

## Serbest Cisim Görüntüleri:

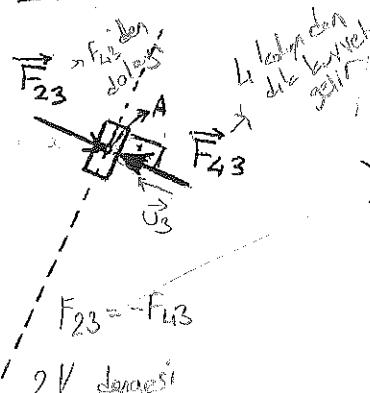
Uzuv 2 (2F + M)



$$G_{12} = -F_{32}$$

2 küteli 1 momenli dalgı

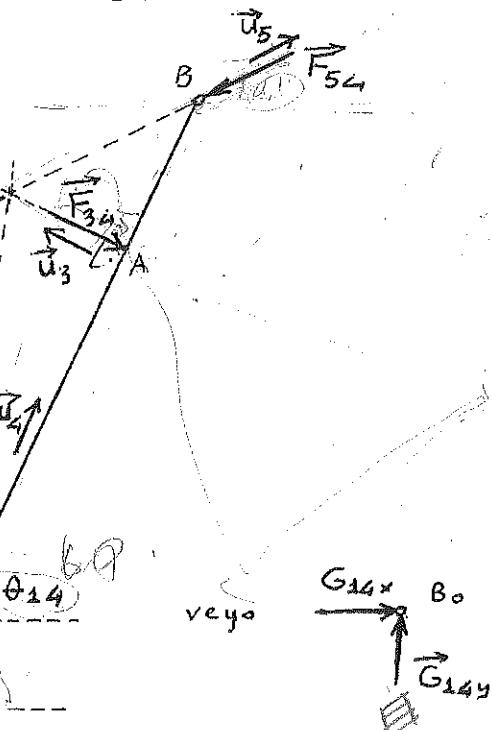
Uzuv 3' (2F)



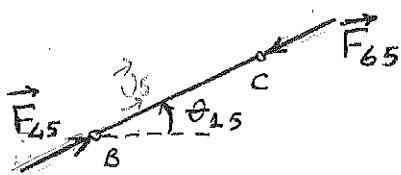
$$F_{23} = -F_{43}$$

2K dengesi

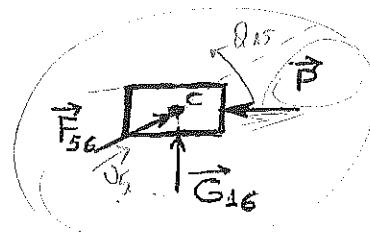
Uzuv 4 (3F)



Uzuv 5: (2F)



Uzuv 6: (3F)



Serbest cisim görünümlerinden aşağıdaki denklemleri yazabiliriz:

$$\vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43} = \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32} = \vec{G}_{12}, \quad F_{34} = F_{43} = F_{23} = F_{32} = G_{12} = \boxed{F_1}$$

$$\vec{F}_{56} = -\vec{F}_{65} = \vec{F}_{45} = -\vec{F}_{54}, \quad F_{56} = F_{65} = F_{45} = F_{54} = F_2$$

120.

## Denge Denklemleri:

Uzuv 6 :

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_2 \cos \theta_{15} - P = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{F_2 = \frac{P}{\cos \theta_{15}}} \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_2 \sin \theta_{15} + G_{16} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{G_{16} = -F_2 \sin \theta_{15}} \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow G_{16} = -P \cdot \frac{\sin \theta_{15}}{\cos \theta_{15}}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{16} = -P \tan \theta_{15}}$$

(123)

Verilen konum iken  $\tan \theta_{15}$  pozitif bir sayı olduğundan  $G_{16}$ 'nın şiddeti eksli bir değer almaktadır. Dolayısıyla  $G_{16}$  küteli osayı yarlı olmalıdır.

Uzuv 4:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow G_{14} \cdot \cos \phi + F_1 \cdot \cos(\theta_{14} + \frac{3\pi}{2}) + F_2 \cdot \cos(\theta_{15} + \pi) = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow G_{14} \cdot \sin \phi + F_1 \cdot \sin(\theta_{14} + \frac{3\pi}{2}) + F_2 \cdot \sin(\theta_{15} + \pi) = 0 \quad (4)$$

$$\sum \vec{M}_{B_0} = 0 \Rightarrow (\alpha_4 \vec{u}_4) \times [F_2 (-\vec{u}_5)] + (s_{13} \vec{u}_4) \times [F_1 (-\vec{u}_3)] = 0$$

$$\Rightarrow -\alpha_4 \cdot F_2 \cdot \sin(\theta_{15} - \theta_{14}) - s_{13} \cdot F_1 \cdot \sin\left(\theta_{14} + \frac{\pi}{2} - \theta_{14}\right) = 0$$

once  
kutup  
olarak  
sentetik  
vektör  
olarak  
gösterilebilir

$$-\alpha_4 \cdot F_2 \cdot \sin(\theta_{15} - \theta_{14}) - s_{13} \cdot F_1 = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow F_1 = -\frac{\alpha_4 \cdot F_2 \cdot \sin(\theta_{15} - \theta_{14})}{s_{13}} = -\frac{\alpha_4 \cdot P \cdot \sin(\theta_{15} - \theta_{14})}{s_{13} \cdot \cos \theta_{15}}$$

(3) ve (4) numaralı denklemlerden  $G_{14}$  ve  $\phi$  bulunabilir.  
veya ( $G_{14x}$  ve  $G_{14y}$ )

Uzuv 2:

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow (\alpha_2 \vec{u}_2) \times (F_1 \vec{u}_3) + T_{12} \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow [\alpha_2 \cdot F_1 \cdot \sin(\theta_{14} + \frac{\pi}{2} - \theta_{12}) + T_{12}] \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = -\alpha_2 \cdot F_1 \cdot \sin(\theta_{14} + \frac{\pi}{2} - \theta_{12})$$

$\vec{T}_{12}$  torku ve mafsal kuvvetleri vektörel olarak su şekilde yazılabilir:  
 (Kuvvet vektörü = Hesaplanan siddet  $\angle$  serbest cisim görünümlerinde gösteriliyor  
 $+x$  eksen ile yaptığı açı)

$$\vec{T}_{12} = -\frac{\alpha_2 \cdot \alpha_4 \cdot P \cdot \sin(\theta_{15} - \theta_{14}) \cdot \sin(\theta_{14} + \frac{\pi}{2} - \theta_{12})}{s_{13} \cdot \cos \theta_{15}} \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{56} &= \vec{F}_{45} = \frac{P}{\cos \theta_{15}} \angle \theta_{15} = \frac{P}{\cos \theta_{15}} (\cos \theta_{15} \vec{i} + \sin \theta_{15} \vec{j}) \\ &= P \vec{i} + P \cdot \frac{\sin \theta_{15}}{\cos \theta_{15}} \vec{j} \end{aligned}$$

(24)

$$\vec{F}_{65} = \vec{F}_{54} = \frac{P}{\cos \theta_{45}} \angle \theta_{45} + 180^\circ = -P \vec{i} - P \cdot \frac{\sin \theta_{45}}{\cos \theta_{45}} \vec{j}$$

$$\vec{G}_{16} = -P \cdot \tan \theta_{45} \angle 90^\circ = -P \cdot \tan \theta_{45} \vec{j}$$

$$\vec{F}_{34} = \vec{F}_{23} = \vec{G}_{12} = -\left( \frac{\alpha_4 \cdot P \cdot \sin(\theta_{45} - \theta_{44})}{s_{13} \cdot \cos(\theta_{13})} \right) \angle \theta_{44} + 270^\circ$$

$$\vec{F}_{43} = F_{32} = -\left( \frac{\alpha_4 \cdot P \cdot \sin(\theta_{45} - \theta_{44})}{s_{13} \cdot \cos(\theta_{13})} \right) \angle \theta_{44} + 90^\circ$$

$$G_{14x} = \left( \frac{\alpha_4 \cdot P \cdot \sin(\theta_{45} - \theta_{44})}{s_{13} \cdot \cos \theta_{45}} \right) \cdot \cos\left(\theta_{44} + \frac{3\pi}{2}\right) = P \cdot \frac{\cos(\theta_{45} + \pi)}{\cos(\theta_{45})} = -1$$

$$G_{14y} = \frac{\alpha_4 \cdot P \cdot \sin(\theta_{45} - \theta_{44})}{s_{13} \cdot \cos \theta_{45}} \cdot \sin\left(\theta_{44} + \frac{3\pi}{2}\right) = P \cdot \frac{\sin(\theta_{45} + \pi)}{\cos \theta_{45}}$$

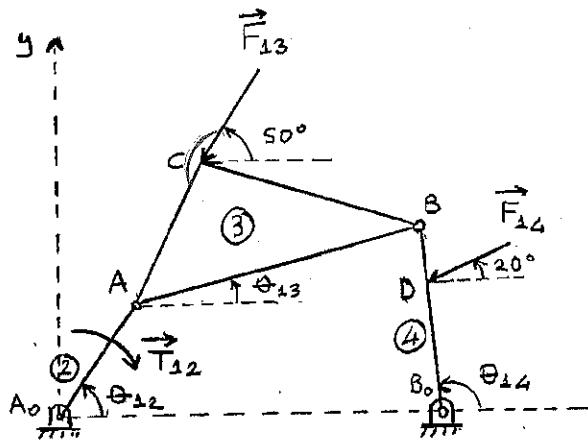
$$\vec{G}_{14} = G_{14x} \vec{i} + G_{14y} \vec{j}$$

Kitabınızda iki örnek daha var. Bunlara da bakın

Örnek 1.1 : Widworth vurgel mekanizmasının farklı bir şekli

Örnek 1.2 : Bir piyomatik pres

Örnek:



$$A_0 A = a_2 = 80 \text{ mm} = 0,08 \text{ m}$$

$$A B = a_3 = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$$

$$B_0 B = a_4 = 120 \text{ mm} = 0,12 \text{ m}$$

$$A_0 B_0 = a_1 = 140 \text{ mm} = 0,14 \text{ m}$$

$$A C = b_3 = 70 \text{ mm} = 0,07 \text{ m}$$

$$B C = c_3 = 80 \text{ mm} = 0,08 \text{ m}$$

$$B_0 D = b_4 = 90 \text{ mm} = 0,09 \text{ m}$$

$$\vec{F}_{13} = 50 \text{ N} \angle 230^\circ, \quad \vec{F}_{14} = 100 \text{ N} \angle 200^\circ$$

Giriş kolu açısı,  $\theta_{12} = 60^\circ$  iken, sistemi statik olarak denged tutacak  $\vec{T}_{12}$  torkunu hesaplayınız. Motsal kuvvetlerini belirleyiniz.  
Not: Uzun ağırlıkları ve sürtünmeler ihmal edilecektir.

Çözüm:

### Kinematik Analiz

$$j=4, \quad l=4 \Rightarrow L=j-l+1=1 : B \text{IMSIZ vektördeye denklen sayısı}$$

$$\vec{A}_0 A + \vec{A} B = \vec{A}_0 B_0 + \vec{B}_0 B$$

$$\Rightarrow a_2 \cdot e^{i\theta_{12}} + a_3 \cdot e^{i\theta_{13}} = a_1 + a_4 \cdot e^{i\theta_{14}}$$

$$\text{Re: } a_2 \cdot \cos \theta_{12} + a_3 \cdot \cos \theta_{13} = a_1 + a_4 \cdot \cos \theta_{14}$$

$$\text{Im: } a_2 \cdot \sin \theta_{12} + a_3 \cdot \sin \theta_{13} = a_4 \cdot \sin \theta_{14}$$

$$\underline{\theta_{12} = 60^\circ \Rightarrow}$$

$$\text{Re: } 0,08 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot \cos \theta_{13} = 0,14 + 0,12 \cdot \cos \theta_{14}$$

$$0,1 \cdot \cos \theta_{13} = 0,1 + 0,12 \cdot \cos \theta_{14}$$

$$\Rightarrow \cos \theta_{13} = 1 + 1,2 \cdot \cos \theta_{14} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Im: } 0,069282 + 0,1 \cdot \sin \theta_{13} = 0,12 \cdot \sin \theta_{14}$$

$$\Rightarrow \sin \theta_{13} = -0,69282 + 1,2 \cdot \sin \theta_{14} \quad \dots \dots \dots (2)$$

(1) ve (2)'nin körelerini alıp toraf toraf topla yalım.

$$1 = 1 + 1,44 \cdot \cos^2 \theta_{14} + 2,4 \cdot \cos \theta_{14} + 0,48 + 1,44 \sin^2 \theta_{14} - 1,662768$$

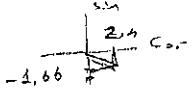
$\sin \theta_{14}$

$$\Rightarrow 2,4 \cdot \cos \theta_{14} - 1,662768 \cdot \sin \theta_{14} = -1,92 \quad \dots \quad (3)$$

(3) numaralı denklem iki farklı şekilde çözülebilir:

Metod 1:  $A \cdot \cos \theta_{14} + B \cdot \sin \theta_{14} = C$

$$A = 2,4, \quad B = -1,662768, \quad C = -1,92$$

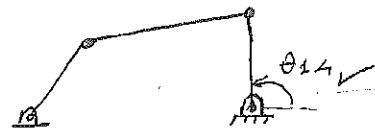


$$\begin{aligned} A = D \cdot \cos \phi \\ B = D \cdot \sin \phi \end{aligned} \Rightarrow D = \sqrt{A^2 + B^2} = 2,9197, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = -34,715^\circ$$

$$\begin{aligned} D \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta_{14} + D \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta_{14} &= C \\ D \cdot \cos(\theta_{14} - \phi) &= C \Rightarrow \cos(\theta_{14} - \phi) = \frac{C}{D} \end{aligned}$$

$$\theta_{14} = \phi + \sigma \left| \cos^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) \right|$$

$\sigma = 1$ : Aşik konfigürasyon :



$\sigma = -1$ : Gaproz :



$$\Rightarrow \boxed{\theta_{14} = -34,715^\circ + \cos^{-1}\left(\frac{-1,92}{2,9197}\right)} = \boxed{96,40^\circ} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \theta_{14} &= -34,715^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{-1,92}{2,9197}\right) = -165,83^\circ \times \\ &\quad = 194,17^\circ \end{aligned}$$

Metod 2:  $\tan \frac{\theta_{14}}{2} = t_4 \Rightarrow \cos \frac{1-t_4^2}{1+t_4^2}, \quad \sin \theta_{14} = \frac{2 \cdot t_4}{1+t_4^2} \quad \left( \text{Yorum konjunkt formu} \right)$

$$\Rightarrow \frac{A}{1+t_4^2} (1-t_4^2) + \frac{B}{1+t_4^2} \cdot 2t_4 = C \Rightarrow \boxed{(A+C)t_4^2 - 2Bt_4 - (A-C) = 0}$$

2. Dereceden denklem

$$t_4 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + A^2 - C^2}}{A + C}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{14} = 2 \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{B + \sigma \sqrt{B^2 + A^2 - C^2}}{A + C} \right]}$$

$\theta_{14}$  hesaplandıktan sonra  $\theta_{13}$  (1 veya 2) numaralı denklemleri kolaylıkla hesaplanabilir.

Kinemotik analiz sonucunda,  $\theta_{12} = 60^\circ$  iken,

$$\theta_{13} = 29,98^\circ$$

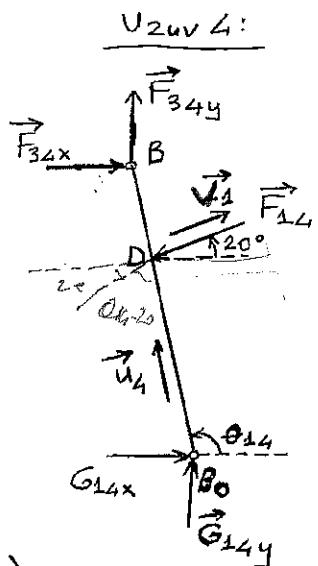
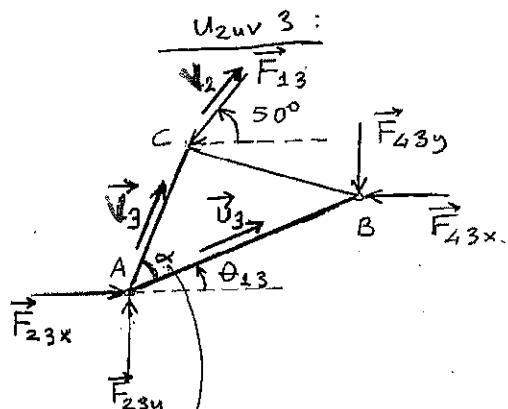
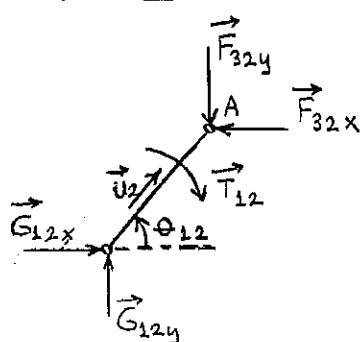
$$\text{ve } \theta_{14} = 96,40^\circ$$

olarak bulunur.

Şimdi her bir uzunun serbest cisim görünümüne gözlebilir.

Serbest cisim görüntülerini:

Uzuv 2



kosinüs teoremininden

$\alpha = 52,62^\circ$  olarok

bulunabilir ( $c_3^2 = a_3^2 + b_3^2 - 2 a_3 b_3 \cos \alpha$ )

$$\vec{G}_{12x} = -\vec{F}_{32x} = \vec{F}_{23x} \Rightarrow G_{12x} = F_{32x} = F_{23x} = F_{1x}$$

$$\vec{G}_{12y} = -\vec{F}_{32y} = \vec{F}_{23y} \Rightarrow G_{12y} = F_{32y} = F_{23y} = F_{1y}$$

$$\vec{F}_{34x} = -\vec{F}_{43x} \Rightarrow F_{34x} = F_{43x} = F_{2x}$$

$$\vec{F}_{34y} = -\vec{F}_{43y} \Rightarrow F_{34y} = F_{43y} = F_{2y}$$

Denge Denklemleri:

Uzuv 4 için:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow (\vec{F}_{2x}) + (\vec{G}_{14x}) - F_{14} \cdot \cos 20^\circ = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow (\vec{F}_{2y}) + (\vec{G}_{14y}) - F_{14} \cdot \sin 20^\circ = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$\sum \vec{M}_{B_0} = 0 \Rightarrow (a_4 \vec{u}_4) \times (F_{2x} \vec{i}) + (a_4 \vec{u}_4) \times (F_{2y} \vec{j}) + (b_4 \vec{u}_4) \times [F_{14} (-\vec{u}_1)] = 0$$

$$\Rightarrow a_4 (\vec{F}_{2x}) \sin (0^\circ - \theta_{14}) + a_4 (\vec{F}_{2y}) \sin (90^\circ - \theta_{14}) - b_4 F_{14} \sin (20^\circ - \theta_{14}) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

Bilinmeyenler:  $F_{2x}, F_{2y}, G_{14x}, G_{14y}$   
(28)

3 denklem 4 bilinmeyen  $\rightarrow$  çözüm yapılmaz

Diger uzurlar için denklemleri yazilmaya devam edilir.

Uzur 3 ikin:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{1x} - F_{2x} - F_{13} \cdot \cos(50^\circ) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{1y} - F_{2y} - F_{13} \cdot \sin(50^\circ) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_A = 0 &\Rightarrow (a_3 \vec{u}_3) \times [F_{2x}(-\vec{i})] + (a_3 \vec{u}_3) \times [F_{2y}(-\vec{j})] + (b_3 \vec{v}_3) \times [F_{13}(-\vec{k})] = \\ &\Rightarrow \underbrace{-a_3 F_{2x}}_1 \sin(0^\circ - \theta_{13}) - a_3 F_{2y} \sin(90^\circ + \theta_{13}) + b_3 F_{13} \cdot \sin(50^\circ - \theta_{13} - \alpha) = 0 \quad \dots \quad (6) \end{aligned}$$

(4), (5) ve (6) numarali denklemler göz önüne alınırsa

Bilinmeyenler:  $F_{1x}, F_{2x}, F_{1y}, F_{2y}$

3 denklem 4 bilinmeyen  $\Rightarrow$  çözüm yapılmaz.

\* Eğer (1)'den (6)'ye kadar olan denklemler birlikte çözülür, elimizde altı adet denklem olur. Bilinmeyen sayısı ise,  $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, G_{1x}$  ve  $G_{1y}$  olmak üzere altıdır. Bu denklemler birlikte çözülebilir.

(3) ve (6) numarali denklemler  $F_{2x}$  ve  $F_{2y}$  değerlerini belirlemek üzere ortak çözülebilir. Bilinen değerler yerlerine konur ve isadeleştirilirler yapsız ise: (virgülden sonra 5 hane olındı)

$$-149,25215 F_{2x} - 13,37627 F_{2y} + 8747,649 = 0 \quad (\sum \vec{M}_{B_0} = 0)$$

$$49,96977 F_{2x} - 86,61999 F_{2y} + 1885,698 = 0 \quad (\sum \vec{M}_A = 0)$$

Bu iki denklem ortak çözülsünse;

$$F_{2x} = 66,60 \text{ N} \quad , \quad F_{2y} = 60,19 \text{ N} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Böylece:  $\vec{F}_{34} = F_{2x} \vec{i} + F_{2y} \vec{j} = 66,60 \vec{i} + 60,19 \vec{j} = 89,77 \text{ N} \angle 42,106^\circ$

$$\vec{F}_{43} = -66,60 \vec{i} - 60,19 \vec{j} = 89,77 \text{ N} \angle 222,106^\circ \quad \text{olarak bulunur.}$$

(29)

(1), (2), (4) ve (5) numaralı denklemlerden;

$$G_{14x} = 27,37 \text{ N}, G_{14y} = -25,99 \text{ N}$$

$$F_{1x} = 98,74 \text{ N}, F_{1y} = 98,49 \text{ N}$$

olarak bulunur. Böylece diğer mafsal kuvvetleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

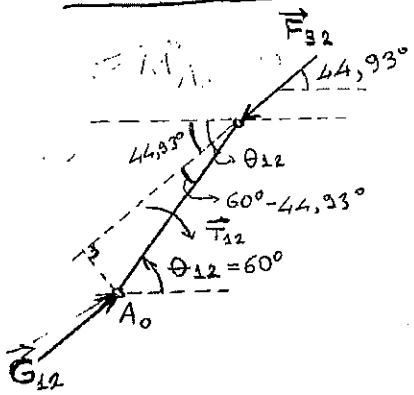
$$\vec{F}_{23} = \vec{G}_{12} = 98,74 \vec{i} + 98,49 \vec{j} \text{ N} = 139,46 \text{ N} \angle 44,93^\circ$$

$$\vec{F}_{32} = -98,74 \vec{i} - 98,49 \vec{j} \text{ N} = 139,46 \text{ N} \angle 224,93^\circ$$

$$\vec{G}_{14} = 27,37 \vec{i} - 25,99 \vec{j} \text{ N} = 37,74 \text{ N} \angle -43,52^\circ$$

Uzuv 2 iga:

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0$$



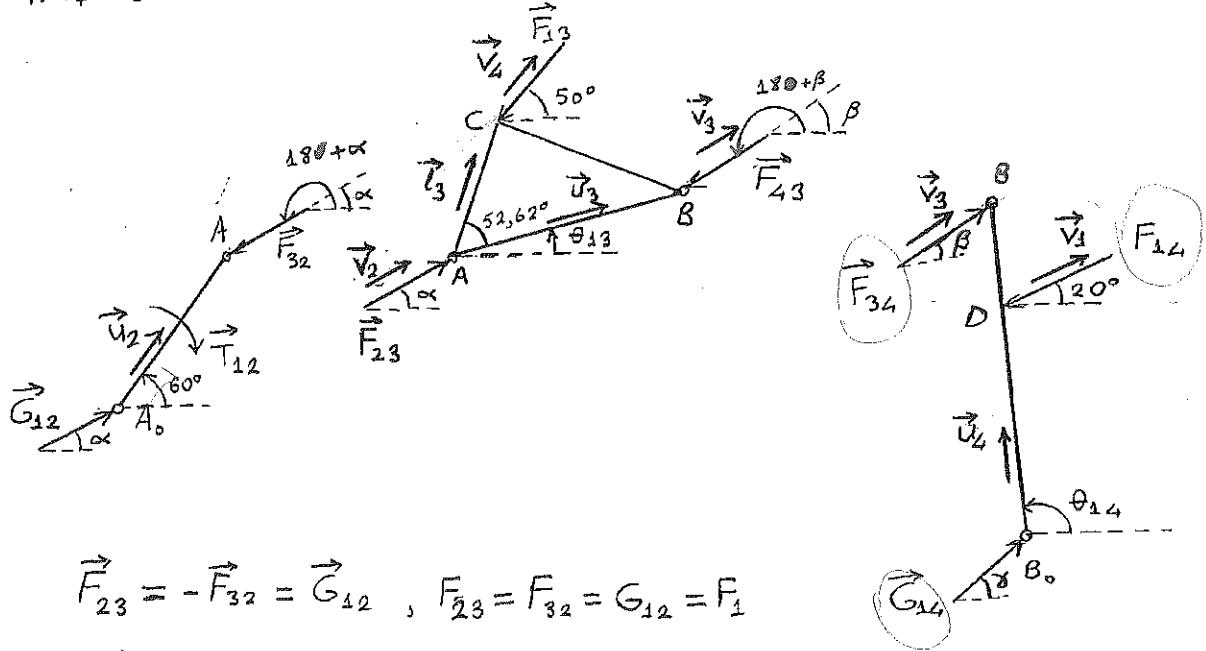
$$\Rightarrow -T_{12} + F_{32} \cdot a_2 \cdot \sin(\theta_{12} - 44,93^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow -T_{12} + 139,46 \cdot 80 \cdot \sin(60^\circ - 44,93^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = 2900,8 \text{ N.mm} \approx 2,9 \text{ N.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{12} = 2,9 (-\vec{k}) \text{ N.m}} \quad \checkmark$$

Aynı soruya, serbest cisim görsüntülerinde bilinmeyen kuvvetleri  $\times$  ve  $y$  bilesenlerine ağırmak yerine,  $+x$  ekseni ile yelpazis oldukları açılari kullanarak da çözebiliriz.



$$\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32} = \vec{G}_{12}, \quad F_{23} = F_{32} = G_{12} = F_1$$

$$\vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43}, \quad F_{34} = F_{43} = F_2$$

### Denge Denklemleri:

Uzuv 4:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_2 \cos \beta + (\textcircled{F_{14}})^{\text{100N}} \cdot \cos 200^\circ + G_{14} \cdot \cos \gamma = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_2 \cdot \sin \beta + (\textcircled{F_{14}})^{\text{100N}} \cdot \sin 200^\circ + G_{14} \cdot \sin \gamma = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$\sum \vec{M}_{B_0} = 0 \Rightarrow (b_4 \vec{u}_4) \times [F_{14}(-\vec{v}_1)] + (a_4 \vec{u}_4) \times (F_2 \vec{v}_3) = 0$$

$$\Rightarrow -(\textcircled{b_4})^{\text{90mm}} (\textcircled{F_{14}})^{\text{100N}} \sin(20^\circ - \textcircled{\theta_{14}})^{\text{36,4}^\circ} + (\textcircled{a_4})^{\text{120mm}} F_2 \cdot \sin(\beta - \textcircled{\theta_{14}})^{\text{36,4}^\circ} = 0 \quad \dots \quad (3)$$

Bilinmeyenler:  $F_2, \beta, G_{14}, \gamma \Rightarrow 3$  denklem 4 bilinmeyen. Fözyüm yapanamız

Uzuv 3:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_1 \cdot \cos \alpha + (\textcircled{F_{13}})^{\text{50N}} \cdot \cos 230^\circ + F_2 \cdot (\cos(180 + \beta))^{\text{-cos beta}} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_1 \cdot \sin \alpha + (\textcircled{F_{13}})^{\text{50N}} \cdot \sin 230^\circ + F_2 \cdot (\sin(180 + \beta))^{\text{-sin beta}} = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow (b_3 \vec{l}_3) \times [F_{13} (-\vec{v}_4)] + (\alpha_3 \vec{u}_3) \times [F_2 (-\vec{v}_3)] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{b_3}{=70\text{mm}} \frac{F_{13}}{=50N} \sin(50^\circ - \theta_{13} - 52,62^\circ) - \frac{\alpha_3}{=100\text{mm}} F_2 \sin(\beta - \theta_{13}) = 0 \quad \dots (6)$$

(4), (5) ve (6) numaralı denklemeleri göz önüne alırsak:

Bilinmeyenler:  $F_1, \alpha, F_2, \beta \leftarrow$  bilinmeyen, 3 denklem vardır.  
Dolayısıyla çözüm yapılmaz.

Eğer 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 numaralı denklemeler birlikte çözürselimiizde altı denklem olur. Bilinmeyenler  $F_1, F_2, G_{14}, \alpha, \beta$  ve  $\gamma$  olmak üzere altı tanedir. Bu denklemler birlikte çözülebilir.

(3) nolu denklemden:

$$-90 \cdot 100 \cdot \sin(-76,4^\circ) + 120 \cdot F_2 \cdot (\sin \beta \cdot \cos 96,4^\circ - \sin 96,4^\circ \cdot \cos \beta) = 0$$

$$8747,649 + (-13,37627 F_2 \cdot \sin \beta - 119,25215 F_2 \cdot \cos \beta) = 0$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{8747,649}{13,37627 \sin \beta + 119,25215 \cos \beta} \quad \dots (7)$$

(6) nolu denklemden:

$$-70 \cdot 50 \cdot \sin(-32,6) - 100 \cdot F_2 \cdot (\sin \beta \cdot \cos 29,98^\circ - \sin 29,98^\circ \cdot \cos \beta) = 0$$

$$1885,698 - F_2 \cdot (86,61993 \sin \beta - 49,96977 \cos \beta) = 0 \quad \dots (8)$$

(7)'yi (8)'de yerine yazarsak

$$8747,649 \cdot \frac{86,61993 \sin \beta - 49,96977 \cos \beta}{13,37627 \sin \beta + 119,25215 \cos \beta} = 1885,698$$

Kesirin pay ve paydası  $\cos \beta$ 'ya bölünürse

$$\frac{86,61993 \tan \beta - 49,96977}{13,37627 \tan \beta + 119,25215} = 0,215566$$

$$\Rightarrow 83,7365 \tan \beta = 75,6765 \Rightarrow \tan \beta = 0,903746 \Rightarrow \boxed{\beta = 42,1056^\circ}$$

$$(7)'den: \boxed{F_2 = 89,772 \text{ N}}$$

(1) ve (2) numarali denklemlerden

$$G_{14} \cdot \cos \gamma = -89,772 \cdot \cos 42,1056 - 100 \cdot \cos 200$$

$$G_{14} \cdot \sin \gamma = -89,772 \cdot \sin 42,1056 - 100 \cdot \sin 200$$

$$G_{14} \cdot \cos \gamma = 27,36649 \quad \dots \quad (9)$$

$$G_{14} \cdot \sin \gamma = -25,99003 \quad \dots \quad (10)$$

$$\frac{(10)}{(9)} \Rightarrow \tan \gamma = \frac{-25,99003}{27,36649} \Rightarrow \boxed{\gamma = -43,5222^\circ}$$

(9)'den :  $G_{14} = 37,74 \text{ N}$

(4) ve (5) numarali denklemlerden :

$$F_1 \cdot \cos \alpha = -50 \cdot \cos 230^\circ + 89,772 \cdot \cos 42,1056$$

$$F_1 \cdot \sin \alpha = -50 \cdot \sin 230^\circ + 89,772 \cdot \sin 42,1056$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha = 98,742453 \quad \dots \quad (11)$$

$$F_1 \cdot \sin \alpha = 98,494271 \quad \dots \quad (12)$$

$$\frac{(12)}{(11)} \Rightarrow \tan \alpha = 0,99749 \Rightarrow \boxed{\alpha = 44,928^\circ}$$

(11)'den :  $F_1 = 139,467 \text{ N}$

Uzuv 2:

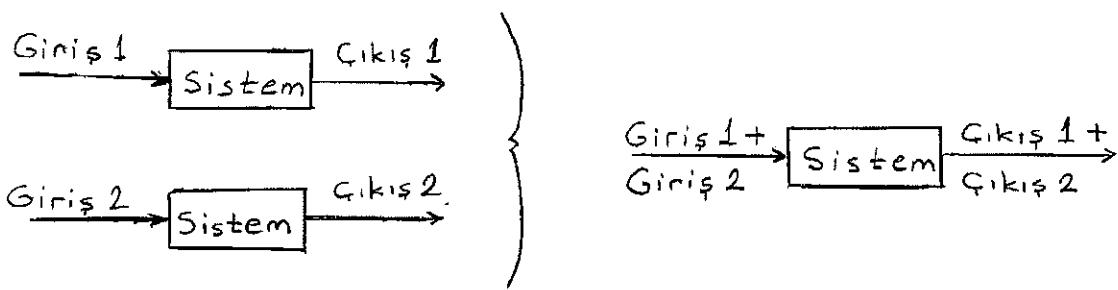
$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow (\alpha_2 \vec{u}_2) \times [F_1 (-\vec{v}_2)] - T_{12} \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow [-80 \text{ mm}, 139,467, \sin(\alpha - 60^\circ) - T_{12}] \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = 2901,28 \text{ N.mm} \approx 2,9 \text{ N.m}$$

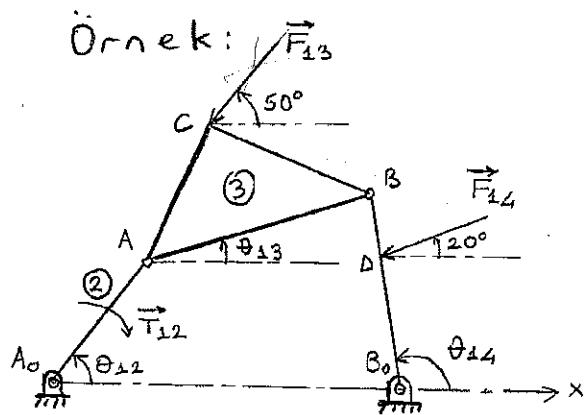
$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{12} = 2,9 (-\vec{k}) \text{ N.m}}$$

## 2.3. Süperpozisyon Prensibi



Konservatif sistemler için (enerji giriş ve çıkışı aynı olan sürünme kaybı olmayan sistemler), süperpozisyon prensibi geçerlidir. Bu prensip "etkiden tüm dış kuvvetlere karşı, konservatif bir sistemin tepkisi, bu kuvvetlerin ayrı ayrı etkisine verilen tepkilerin bileskesidir" şeklinde özetlenebilir.

Örnek:



$$A_0 A = a_2 = 80 \text{ mm}$$

$$A B = a_3 = 100 \text{ mm}$$

$$B_0 B = a_4 = 120 \text{ mm}$$

$$A_0 B_0 = a_1 = 140 \text{ mm}$$

$$AC = b_3 = 70 \text{ mm}$$

$$BC = c_3 = 80 \text{ mm}$$

$$B_0 D = b_4 = 90 \text{ mm}$$

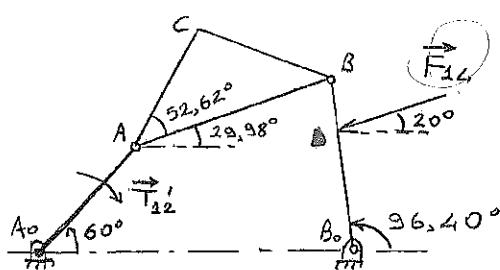
$$\vec{F}_{12} = 50 \text{ N} \angle 230^\circ, \vec{F}_{14} = 100 \text{ N} \angle 200^\circ$$

$\theta_{12} = 60^\circ$  iken, mekanizmayı statik olarak dengede tutacak  $\vec{T}_{12}$  torkunu ve mafsul kuvvetlerini süperpozisyon prensibi ni kullanarak hesaplayınız. (Uzuv ağırlıkları ve sürtünmeler ihmal edilecektir)

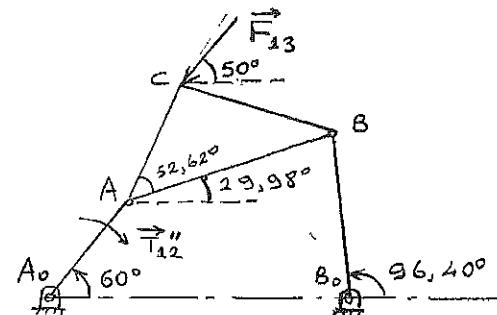
Not: Mekanizmanın konum analizi yapılmış ve  $\theta_{12} = 60^\circ$  iken  $\theta_{13}$  ve  $\theta_{24}$  için aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

$$\theta_{13} = 29,28^\circ \text{ ve } \theta_{24} = 96,40^\circ$$

Fözyüm: Sistemin ilkini aşağıda gösterilen iki sistemin gizlerinin toplamı seklinde ele alabiliriz.



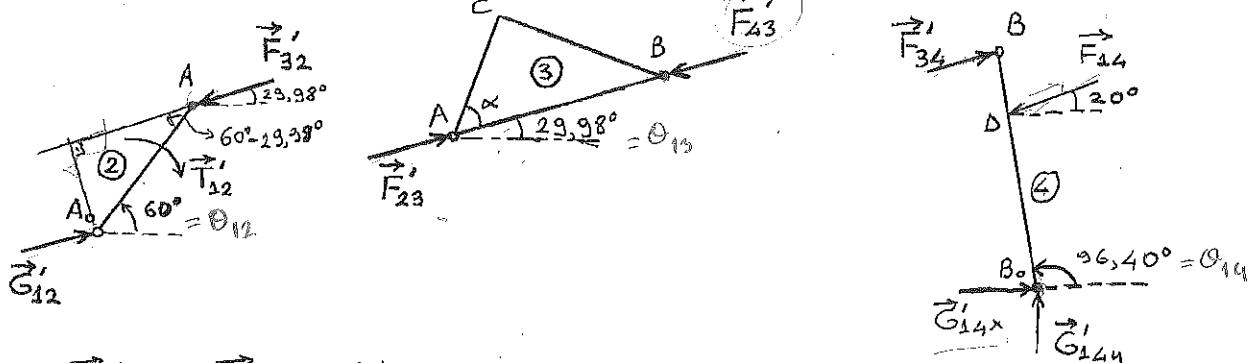
(I)



(II)

İlk önce (I) numarali sistemi inceleyelim:

(I)



$$\vec{F}'_{34} = -\vec{F}'_{43} = \vec{F}'_{23} = -\vec{F}'_{32} = \vec{G}'_{12}$$

$$F'_{34} = F'_{43} = F'_{23} = F'_{32} = G'_{12} = F'$$

Denge Denklemleri:

Uzunluğ:  
Uzunluk 4:

$$\sum \vec{M}_{B_0} = 0 \Rightarrow F'_{34} a_4 \cdot \sin(\theta_{13} - \theta_{14}) - F_{14} b_4 \cdot \sin(20^\circ - \theta_{14}) = 0$$

$$\Rightarrow F'_{34} 120 \cdot \sin(29,98 - 96,40) - 100 \cdot 90 \cdot \sin(20^\circ - 96,40^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow +109,9803 F' + 8747,64 = 0 \Rightarrow F' = 79,54 N$$

$$\Rightarrow \vec{F}'_{34} = \vec{F}'_{23} = \vec{G}'_{12} = 79,54 N \angle 29,98^\circ$$

$$\vec{F}'_{43} = \vec{F}'_{32} = 79,54 N \angle 20^\circ$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow G'_{14x} + F' \cos 29,98^\circ - F_{14} \cos 20^\circ = 0$$

$$\Rightarrow G'_{14x} = 100 \cdot \cos 20^\circ - 79,54 \cdot \cos 29,98^\circ = 25,07 N$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow G_{24y}' + F' \cdot \sin 29,38^\circ - F_{14} \cdot \sin 20^\circ = 0$$

$$\Rightarrow G_{14y}' = 100 \cdot \sin 20^\circ - 79,54 \cdot \sin 29,98^\circ = -5,544 \text{ N}$$

$$\vec{G}_{14} = 25,07 \vec{i} - 5,544 \vec{j} \quad N$$

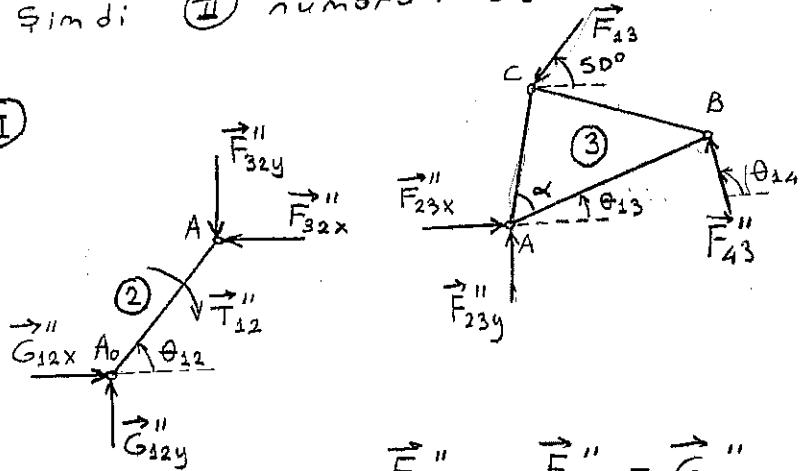
Uzuv 2

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow -T_{12}' + F'_{\perp} \sigma_2 \cdot \sin(\theta_{12} - \theta_{13}) = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = 79,54 \cdot 80 \cdot \sin(60^\circ - 29,58^\circ) = 3183,5 \text{ Nmm}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{42} = 3183,5 \text{ } (-\vec{k}) \text{ N.mm}}$$

Simdi (II) numaralı sistemler inceleyelim



$$\vec{F}_{23x}'' = -\vec{F}_{32x}'' = \vec{G}_{12x}''$$

$$F_{23}''_x = F_{32}''_x = G_{12}''_x = F_{12}''_x$$

$$\vec{F}_{23y}'' = -\vec{F}_{32y}'' = \vec{G}_{22y}'' \Rightarrow F_{23y}'' = F_{32y}'' = G_{22y}'' = F_{24y}''$$

$$\vec{G}_{14}'' = -\vec{F}_{34}'' = \vec{F}_{43}'' \Rightarrow G_{14}'' = F_{34}'' = F_{43}'' = F_2''$$

## Denge Denklemleri:

U<sub>2uv</sub> 3.

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow a_3 \cdot F_{2\cdot}'' \cdot \sin(\theta_{24} - \theta_{13}) - b_3 F_{13} \sin(50^\circ - \theta_{13} - \alpha) = 0$$

$$100 \cdot F_2'' \cdot \sin(96,4 - 29,98) - 70,50 \cdot \sin(50^\circ - 29,38^\circ - 52,62^\circ) = 0$$

$$91.65 F_2'' + 1885.7 = 0 \Rightarrow F_2'' = -20.575$$

$$\Rightarrow \vec{E}'' = -\vec{E}_2'' = -20,575 \angle 96,40^\circ \text{ (80)} = 20,575 N \angle 276,40^\circ$$

$$\vec{F}_{31}'' = -\vec{F}_{43}'' = 20,575 \text{ N} \angle 96,40^\circ$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{1x}'' + F_{13} \cdot \cos 230^\circ + F_2'' \cdot \cos(\theta_{14}) = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{1x}'' - F_{13} \cdot \cos 50^\circ + \textcircled{F_2''} \cdot \cos(\theta_{14}) = 0$$

$\Rightarrow -20,575 N$

$$\Rightarrow F_{1x}'' = 50 \cdot \cos 50^\circ + 20,575 \cos(96,40^\circ) = 29,846 N$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{1y}'' + F_{13} \cdot \sin 230^\circ + F_2'' \cdot \sin(\theta_{14})$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{1y}'' - F_{13} \cdot \sin 50^\circ + F_2'' \cdot \sin 96,40^\circ = 0$$

$$\Rightarrow F_{1y}'' = 50 \cdot \sin 50^\circ + 20,575 \cdot \sin 96,40^\circ = 58,749 N$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{23}'' &= \vec{G}_{12}'' = 29,846 \vec{i} + 58,749 \vec{j} N \\ \vec{F}_{32}'' &= -29,846 \vec{i} - 58,749 \vec{j} N \end{aligned}}$$

$$F_{23}'' = 65,83 N \angle 63,07^\circ$$

$$F_{32}'' = 65,83 N \angle 263,07^\circ$$

$$\underline{\text{Uzuv 2:}} \quad \sum M_{A_0} = 0 \underset{= 80 \text{ mm}}{\cancel{}} - 65,83 \cdot 80 \cdot \sin(63,07 - 60) - T_{12} \cdot 0.$$

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow 29,846 \cdot \textcircled{0}_2 \cdot \sin 60^\circ - 58,749 \cdot \textcircled{0}_2 \cdot \cos 60^\circ - T_{12}'' = 0$$

$$\Rightarrow T_{12}'' = -282,2 N \cdot mm$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{12} = -282,2 (-\vec{k}) = 282,2 \vec{k} N \cdot mm}$$

Simdi süperpozisyon prensibini uygularsak (I+II)

$$\vec{T}_{12} = \vec{T}_{12}' + \vec{T}_{12}'' = -3183,5 \vec{k} + 282,2 \vec{k} = -2902,3 \vec{k} N \cdot mm$$

$$\approx -2,9 \vec{k} N \cdot m$$

Benzer şekilde

$$\vec{F}_{34} = \vec{F}_{34}' + \vec{F}_{34}'' = 79,54 \cdot [\cos 29,98^\circ \vec{i} + \sin 29,98^\circ \vec{j}] + 20,575 \cdot [\cos 96,40^\circ \vec{i} + \sin 96,40^\circ \vec{j}]$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{34} = 66,60 \vec{i} + 60,19 \vec{j} N = 89,77 N \angle 42,106^\circ$$

$$\vec{F}_{23} = \vec{F}_{23}' + \vec{F}_{23}'' = 79,54 \cdot [\cos 23,38^\circ \vec{i} + \sin 23,38^\circ \vec{j}] + 29,846 \vec{i} + 58,749 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{23} = 98,744 \vec{i} + 98,495 \vec{j} N = 139,47 N \angle 44,928^\circ$$

$$\vec{F}_{43} = -\vec{F}_{34}, \quad \vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}$$

$$\vec{G}_{12} = \vec{G}_{12}' + \vec{G}_{12}'' = 98,744 \vec{i} + 98,495 \vec{j} N = 139,47 N \angle 44,928^\circ$$

$$\vec{G}_{14} = \vec{G}_{14}' + \vec{G}_{14}'' = 25,07 \vec{i} - 5,544 \vec{j} + 20,575 \cdot [\cos 276,40^\circ \vec{i} + \sin 276,40^\circ \vec{j}]$$

$$= 27,36 \vec{i} - 25,99 \vec{j} N = 37,74 N \angle 43,53^\circ$$

olarak bulunur.

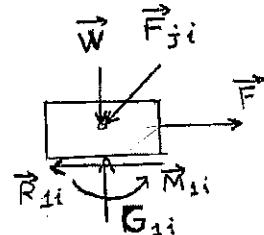
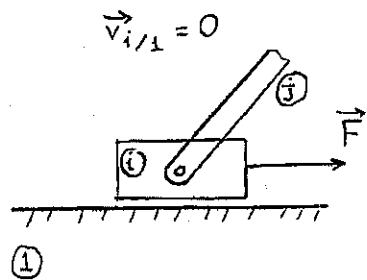
ANNA

İrenç kuvvetleri Olduğunda Mekanik Sistemler  
adece mafsallarda oluşan direnç kuvvetleri göz  
önüne alınacaktır. (Yüksek hızlarda havanın direncide önemli  
bir direnç olabilir.)

Mafsallarda oluşan direnç kuvvetlerinin yönü o maf-  
saldır oluşan boyalı hareketle belirlenir ve direnç kuvvetleri  
daima harekete zıt yöndedir. Bu nedenle, makinadaki uzunları  
konumlarının bilinmesi yeterli olmayacağı, haretin yönünden  
bilinmesi gerekecektir.

Direnç kuvvetleri farklı tipte modellenebilir ve gerçek  
durumun tam olarak modellenmesi oldukça karmaşık olabilir.  
Bu konu ile ugrasın ayrı bir bilim dalı - triboloji - bulunmaktadır.  
Bu derste analizi kolay ve oldukça basit modellemeler  
üzerinde duracagız.

### a) Statik Sürünme Kuvveti

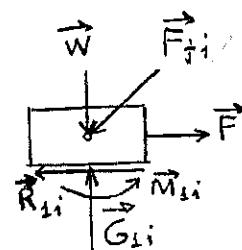
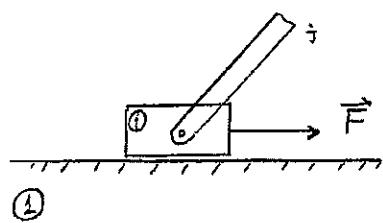


$$|\vec{R}_{ii}| \leq \mu_s |\vec{G}_{ii}|$$

$\mu_s$ : statik sürünme katsayıısı

### b) Kayma (Dinamik) Sürünme Kuvveti (Coulomb Sürünmesi)

$$\vec{v}_{i,i} = \text{sabit}$$



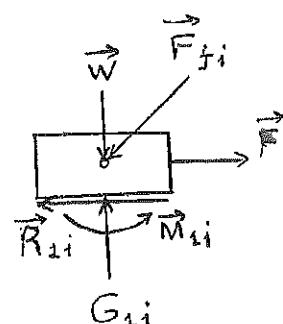
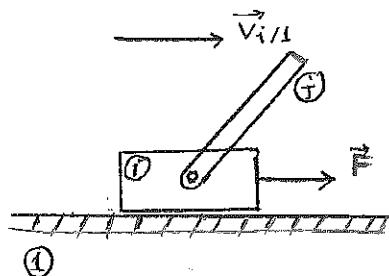
$$|\vec{R}_{ii}| = \mu_d |\vec{G}_{ii}|$$

$\mu_d$ : Dinamik sürünme katsayıısı

Genellikle  $\mu_d < \mu_s$

c) Viskos sürükme kuvveti

Direnç kuvvetinin temas eden yüzeyler arasında oluşan  
bağlı hızla orantılı olduğu durumdur.

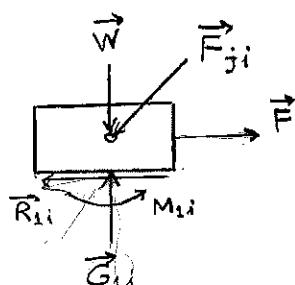
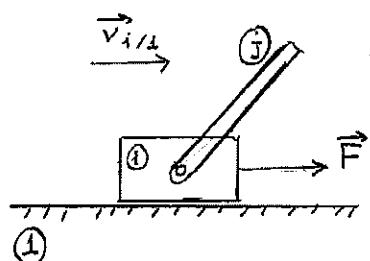


$$\vec{R}_{1i} = -c \vec{v}_{1i}$$

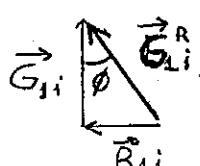
c: viskoz sürüm  
kotsayısı

## Kayar Mafsal (Prismatic joint)

Uzuvlar arasında oluşan etki-tepkî kuvveti; ortak sürünmesiz durumda olduğu gibi kayar mafsal eksenine dik olmayacağıdır. Bileşke tepkî kuvveti mafsal eksenine  $\phi$  açısı kadar eğik olacaktır. Bu açı sürünme açısı olarak adlandırılır.

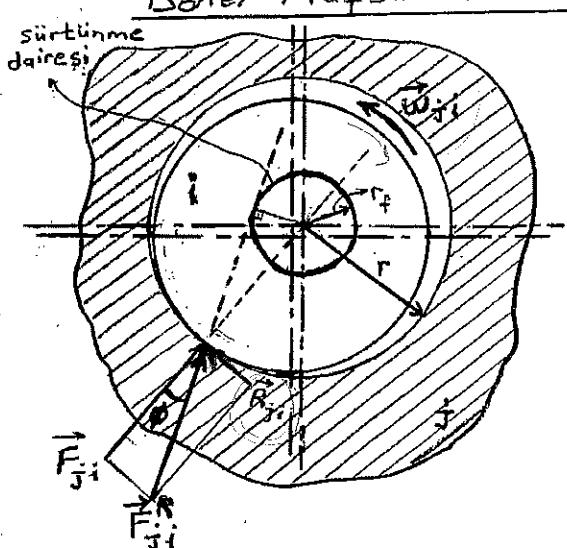


$$\vec{G}_{j,i}^R = \vec{R}_{j,i} + \vec{G}_{j,i}$$



$$\tan \phi = \frac{R_{j,i}}{G_{j,i}} = \frac{\mu G_{j,i}}{G_{j,i}} = \mu \Rightarrow [\tan \phi = \mu]$$

## Döner Mafsal (Revolute joint)



$\vec{w}_{j,i}$ : i uzunun j'ye göre açısal hızı

$$\vec{w}_f = \vec{w}_i - \vec{w}_f$$

(Not:  $\vec{\theta}$  gibi tanımlıdır.  $\vec{\theta}_{12}$  s. 2. uzunun 1 uzununa göre açısal konumunu tanımlar.  $\vec{\theta}_{12} = \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1$  dir.)

$$\vec{F}_{j,i}^R = \vec{F}_{j,i} + \vec{R}_{j,i}$$

r: Döner mafsalın yarıçapı

$r_f$ : Sürünme dairesinin yarıçapı

$$\tan \phi = \frac{R_{j,i}}{F_{j,i}} = \frac{\mu F_{j,i}}{F_{j,i}} = \mu \Rightarrow [\tan \phi = \mu]$$

$$\sin \phi = \frac{r_f}{r} \Rightarrow [r_f = R \cdot \sin \phi]$$

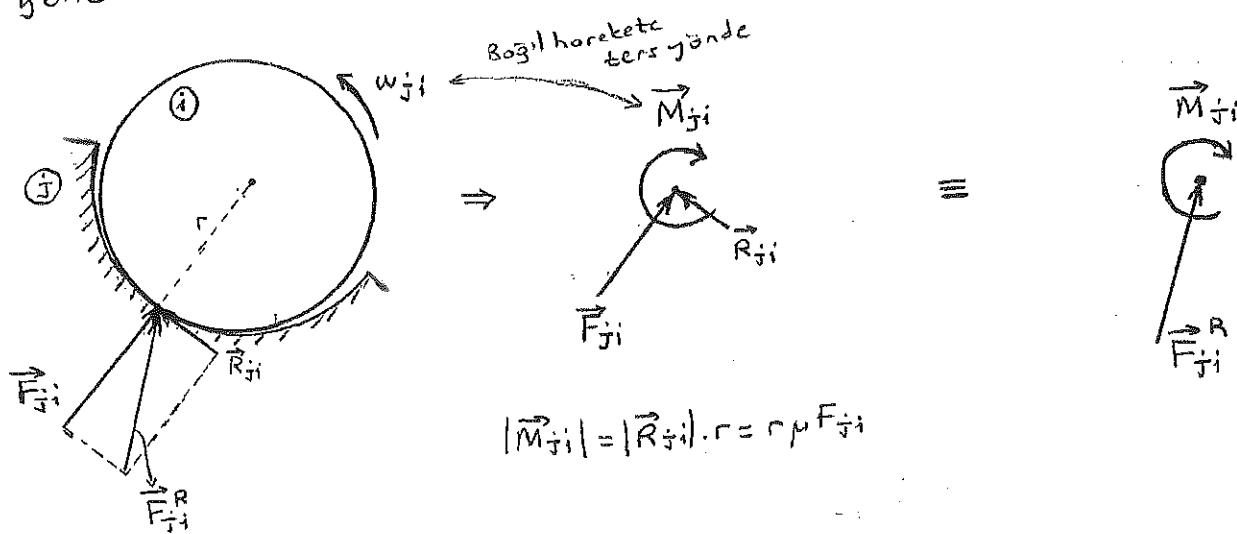
Kontakt yarıçapı için  
 $\sin \phi = \cos \theta$

(40)

Toplam tepki kuvveti istenir ise,  $\vec{F}_{ji}^R$  mafsol merkezinden geçen bir kuvvet ve bir momente indirgenebilir. Oluşan bu moment sürünme momenti olarak adlandırılmıştır ve sıddet:

$$M_{ji} = \frac{r_f}{r \sin \phi} F_{ji}^R = r \cdot \underbrace{\sin \phi \cdot F_{ji}^R}_{= R_{ji}} = r \cdot \underbrace{R_{ji}}_{= \mu F_{ji}} = r \mu F_{ji}$$

olacaktır.  $\vec{M}_{ji}$  momenti daima bağlı hareket yönüne zıt yönde olacaktır.



*Momentum  
GNL*  
Sürünme etkisi altında statik kuvvet analizi yapıldığında,

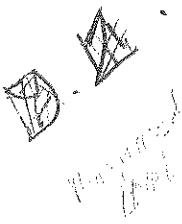
gözüm için:

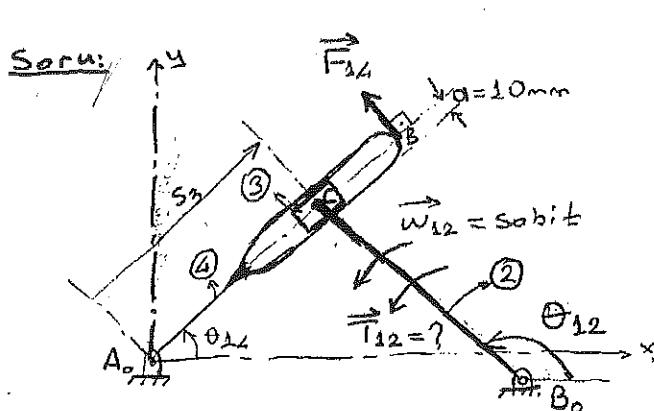
- Analitik yöntem kullanıldığında, mafsol dönme ekseninden geçen mafsol kuvvetini ve bağlı harekete zıt yönde olan sürünme momentini kullanmak
- Grafiksel yöntem kullanıldığında ise sürünme doiresine teget mafsol kuvvetlerini kullanmak daha avantajlı olacaktır.

## 2.5. Sürtünme Etkisi Altında Statik Kuvvet Analizi

Bu konuda, sistemin statik dengesi denildiğinde, sistemin istenilen yönde statik kuvvetlerin etkisi altında ızuvların ivmelenme olmadan hareketi onlaştırmalıdır. Bu durum örneğin iş makinalarının çalışma molaslarında, etki eden dış fiziksel kuvvetlerin yüksek olup, ototet kuvvetlerinin düşük ivmelenmeden dolayı ihmal edilebilir boyutlarda kaldığı durumlar için geçerlidir.

Ayrıca genelde pim aşıları çok küçük olması ve sürtünme katsayısı iyi bir yağlama ile 0,1'den çok daha küçük bir değere düşürülebildiği için, döner mafsalordaki sürtünme ihmal edilebilir. Dolayısıyla bu kısımda sadece kayar mafsalordaki sürtünme kuvveti göz önüne alınacaktır.





$$A_0B = d_4 = 1000 \text{ mm}$$

$$B_0C = d_2 = 600 \text{ mm}$$

$$A_0C = s_3 = 500 \text{ mm}$$

$$\theta_{12} = 120^\circ, \theta_{14} = 60^\circ$$

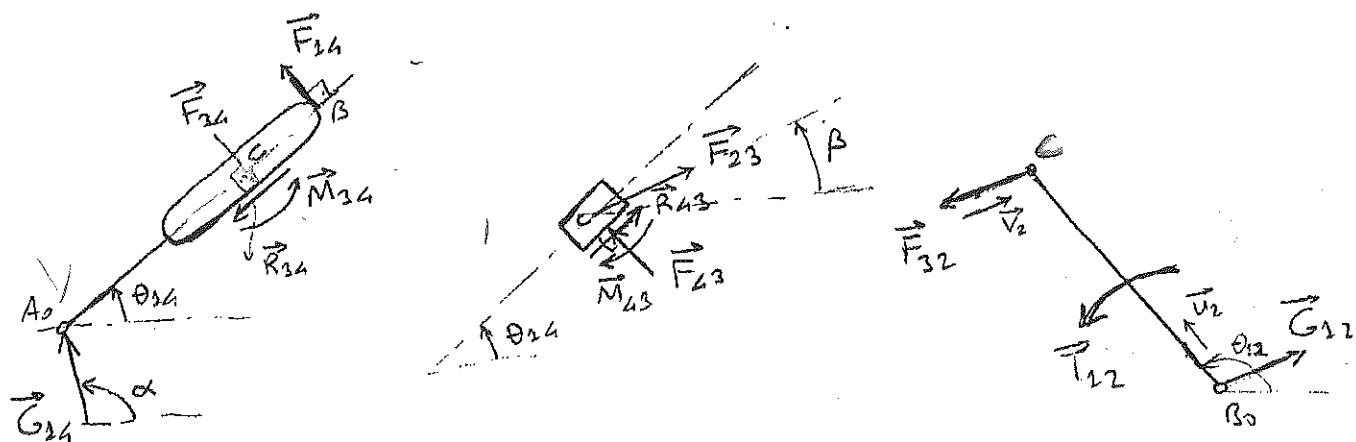
$$a = 10 \text{ mm}, \vec{F}_{14} = 100 \angle \theta_{14} + 30^\circ N$$

3 ve 4 uzerulari arasi indirgelenen  
sürükme kofisi,  $\mu = 0,1$

$$\vec{T}_{12} = ? \text{ (sizce lik degere iacin)}$$

### Gözümleri:

Serbest Cizim Göruntuleri



$$|\vec{F}_{23}| = |\vec{F}_{32}| = |\vec{G}_{12}| = F_1$$

$$|\vec{F}_{34}| = |\vec{F}_{43}| = F_2, |\vec{M}_{34}| = |\vec{M}_{43}| = M$$

$$|\vec{R}_{34}| = |\vec{R}_{43}| = \mu \cdot |\vec{F}_{34}| = \mu \cdot |\vec{F}_{43}| = \mu \cdot F_2$$

$$\vec{F}_{14} = F_{14} \angle \theta_{14} + 90^\circ, \vec{F}_{34} = F_2 \angle \theta_{14} + 270^\circ$$

$$\vec{G}_{14} = G_{14} \angle \alpha, F_{43} = F_2 \angle \theta_{14} + 90^\circ$$

$$\vec{R}_{34} = \mu F_2 \angle \theta_{14} + 180^\circ, \vec{R}_{43} = \mu F_2 \angle \theta_{14}$$

$$\vec{F}_{23} = F_1 \angle \beta, \vec{F}_{32} = F_1 \angle \beta + 180^\circ, \vec{G}_{12} = F_1 \angle \beta$$

(43)

## Denge Denklemleri:

4. uzunlukta:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow G_{14} \cdot \cos(\alpha) + F_{34} \cdot \cos(\theta_{14} + 270^\circ) + \mu \cdot F_{34} \cdot \cos(\theta_{14} + 180^\circ) + F_{24} \cdot \cos(\theta_{14} + 90^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow G_{14} \cdot \cos(\alpha) + F_2 \cdot \cos(330^\circ) + 0,2 \cdot F_2 \cdot \cos(240^\circ) + 100 \cdot \cos(150^\circ) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$

$$G_{24} \cdot \sin(\alpha) + F_2 \cdot \sin(133^\circ) + 0,2 \cdot F_2 \cdot \sin(120^\circ) + 100 \cdot \sin(150^\circ) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$\sum M_{A_0} = 0 \Rightarrow 100000 - 100N \cdot 500mm - 500mm \cdot F_2 = M + 0,2 \cdot F_2 \cdot 20mm - \mu \cdot F_{34} \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow 100000 - 500F_2 + M - F_2 = 0 \Rightarrow M = 501F_2 - 100.000 \quad \dots \quad (3)$$

## 3 uzunlukta:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{23} \cdot \cos(\theta_{14} + 90^\circ) + F_{23} \cdot \cos\beta + \mu \cdot F_{23} \cdot \cos(\theta_{14}) = 0$$

$$\Rightarrow F_2 \cdot \cos(150^\circ) + F_2 \cdot \cos\beta + 0,2 \cdot F_2 \cdot \cos(60^\circ) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_2 \cdot \sin(150^\circ) + F_2 \cdot \sin\beta + 0,2 \cdot F_2 \cdot \sin(60^\circ) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow -M_{23} + \mu \cdot F_{23} \cdot a = 0 \Rightarrow M = F_2 \cdot N \cdot mm \quad \dots \quad (6)$$

6 numaralı denklemi 3 numaralı denkleme yerine yazalım

$$\Rightarrow F_2 = 501F_2 - 100.000 \Rightarrow F_2 = 200 N \quad \Rightarrow M = 200 N \cdot mm = 0,2 N \cdot m \quad \rightarrow 2,5 \text{ puam}$$

(1) ve (2) numaralı denklemlerde yerine yazınca

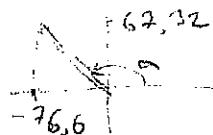
$$G_{14} \cdot \cos(\alpha) + 173,2 - 10 - 86,6 = 0 \Rightarrow G_{14} \cdot \cos(\alpha) = -76,6 \quad \dots \quad (7)$$

$$G_{14} \cdot \sin(\alpha) - 100 - 17,32 + 50 = 0 \Rightarrow G_{14} \cdot \sin(\alpha) = 67,32 \quad \dots \quad (8)$$

(8) numaralı denklemi (7)'ye bölersen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan\alpha = \frac{67,32}{-76,6} \Rightarrow \alpha = 138,6^\circ$$

$$7. \text{ den} \Rightarrow G_{14} = 101,98 N$$



(4)

(4) ve (5) numaralı denklemlerden:

$$-173,2 + F_1 \cos \beta + 10 = 0 \Rightarrow F_1 \cos \beta = 163,2 \quad \text{--- (9)}$$

$$100 + F_1 \sin \beta + 17,32 = 0 \Rightarrow F_1 \sin \beta = -117,32 \quad \text{--- (10)}$$

(10) numaralı denklem: (9)'a katılsat

$$\tan \beta = \frac{-117,32}{163,2} \Rightarrow \begin{array}{c} \beta \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = -35,71^\circ \\ \text{veya} \\ \beta = 324,29^\circ \end{array}$$

$$\text{10'dan } \boxed{F_1 = 201 \text{ N}}$$

Son olarak 2. uyuşum için denge denklemini yazalım

$$\sum \vec{M}_{B_0} = 0 \Rightarrow (\alpha_2 \vec{v}_2) \times (-F_{32} \vec{v}_2) + T_{12} \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow [-\alpha_2 F_1 \sin(\beta - \theta_{12}) + T_{12}] \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = \alpha_2 F_1 \sin(\beta - \theta_{12}) = 600 \cdot 201 \cdot \sin(324,29 - 120^\circ)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{12} = -49609,45 \text{ N} \cdot \text{mm}}$$

$$\approx \boxed{-49,61 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

saydetin eksi aktarması  
seçilen yönü ters oluyor  
giäternettedir.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{12} = -49,61 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}}$$

*Bu soru için son derece teşekkür ederim*

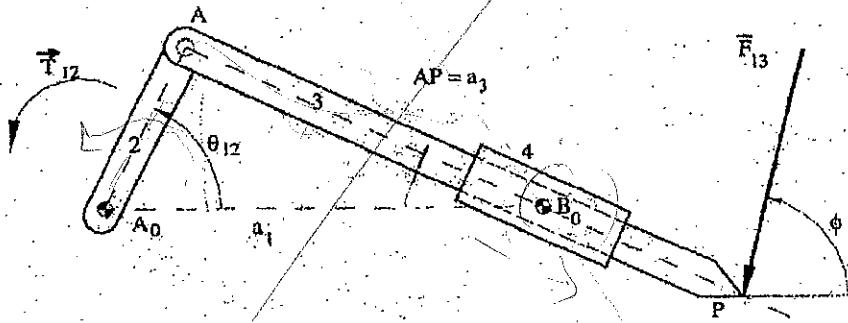
**MAK 360 MAKİNE DİNAMİĞİ**  
**2008-2009 BAHAR DÖNEMİ ARA SINAVI**

**Öğretim Üyesi:** Yrd. Doç.Dr. Yasin YILMAZ  
**Süre:** 110 dakika

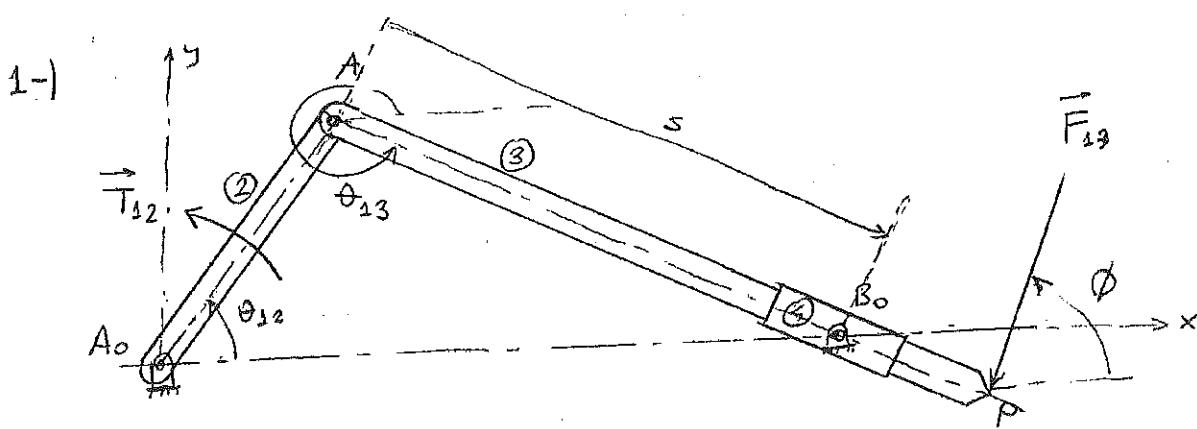
16.04.2009

1-) Şekil 1'de gösterilen mekanizmada,  $A_0B_0 = 280 \text{ mm}$ ,  $A_0A = 100 \text{ mm}$ ,  $AP = 400 \text{ mm}$ ,  $F_{13} = 600 \text{ N}$ ,  $\phi = 80^\circ$ ,  $\theta_{12} = 60^\circ$  dir. Kızak boyu 100 mm ve kalınlığı 30 mm olup  $B_0$  noktasına göre simetriktir. 3 ve 2 uzuvlarının kalınlıkları da 30'ar mm dir. Uzuv ağırlıkları ihmal edilebilir.

- a) Sürtünme ihmal edilirse,  $\vec{F}_{13}$  kuvveti etkisi altında, sistemi statik dengede tutmak için gerekli  $\vec{T}_{12}$  giriş momentini ve mafsal kuvvetlerini hesaplayınız. (20 Puan)
- b) 3 ve 4 uzuvları arasındaki sürtünme katsayısı,  $\mu = 0,1$  dir. Döner mafsallardaki sürtünme ihmal edilebilir. 2 uzvunun saat yelkovana ters yönde döndüğü bilinmektedir. Bu durumda sistemi statik olarak dengede tutacak  $\vec{T}_{12}$  giriş momentini ve mafsal kuvvetlerini hesaplayınız. (20 Puan)



Şekil 1



$$A_0B_0 = d_1 = 280 \text{ mm}$$

$$F_{13} = 600 \text{ N}$$

$\angle$  130 boyu: 200 mm

$$A_0A = d_2 = 100 \text{ mm}$$

$$\phi = 80^\circ$$

"Etkinlik": 30 m

$$AP = d_3 = 400 \text{ mm}$$

$$\theta_{12} = 60^\circ$$

Uzun öğünlükleri ihmali edilebilir.

a) Sürtünme ihmali edilirse  $T_{12} = ?$  Mefatlı kuvvetleri?  $\begin{pmatrix} \text{statik} \\ \text{değe} \\ \text{rican} \end{pmatrix}$

Gözüm: A\_0 noktası, matris olan bir koordinat sistemi sayetinde

Kinematik Analizi: (Korum Analizi) 5 Puan

Devre koşulluk denklemi:  $\vec{A_0A} + \vec{A_0B_0} = \vec{A_0B_0}$

$$d_2 \cdot e^{j\theta_{12}} + s \cdot e^{j\theta_{13}} = d_1$$

$$\text{Re: } d_2 \cdot \cos \theta_{12} + s \cdot \cos \theta_{13} = d_1$$

$$100 \cdot \cos 60^\circ + s \cdot \cos \theta_{13} = 280 \Rightarrow s \cdot \cos \theta_{13} = 230 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{Im: } d_2 \cdot \sin \theta_{12} + s \cdot \sin \theta_{13} = 0$$

$$100 \cdot \sin 60^\circ + s \cdot \sin \theta_{13} = 0 \Rightarrow s \cdot \sin \theta_{13} = -86,60256 \quad \dots \quad (2)$$

$$(2)'y: (1)'e hâl \Rightarrow t = r \theta_{13} = \frac{-86,60256}{230}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{13} = -20,633^\circ}$$

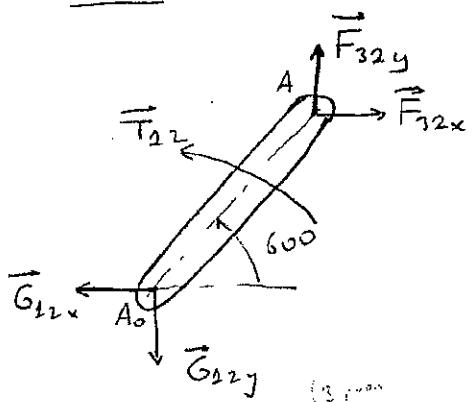
$$\text{vejo} \quad \boxed{\theta_{13} = 339,367^\circ} \quad \checkmark$$

$$(1)'den \quad \boxed{\frac{230}{\cos 1339,367^\circ} = 245,764 \text{ mm}} \quad (47)$$

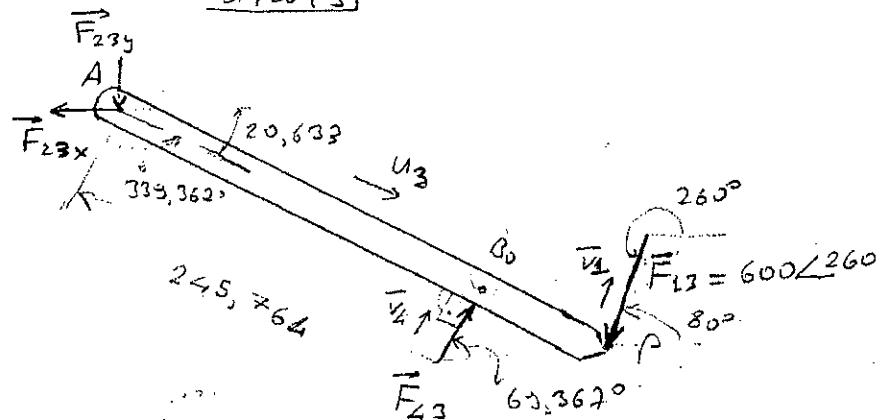
## Serbest Cisim Görüntüleri: (12 puan)

(2)

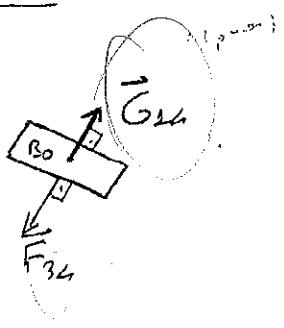
Uzuv 2.



Uzuv (3)



Uzuv 4



$$\vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43} = -\vec{G}_{14}$$

$$\vec{F}_{23x} = -\vec{F}_{32x} = \vec{G}_{12x}$$

$$\vec{F}_{23y} = -\vec{F}_{32y} = \vec{G}_{12y}$$

Denge Denklemleri: (8 puan → modern formule)

Uzuv 3:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{23x} \cos 140^\circ + F_{43} \cos 280^\circ + F_{43} \cos (63, 367^\circ) + 600 \cos 1260^\circ = 0$$

$$\Rightarrow [-F_{23x} + F_{43} \cos (63, 367^\circ) - 104,189] = 0 \quad (3)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{23y} \sin 1270^\circ + F_{43} \sin (63, 367^\circ) + 600 \sin 1260^\circ = 0$$

$$\Rightarrow [-F_{23y} + F_{43} \sin (63, 367^\circ) - 590,884] = 0 \quad (4)$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow [400 \vec{v}_3] \times [600 (-\vec{v}_1)] + [245,764 \vec{v}_3] \times [F_{43} \vec{v}_4] = 0$$

$$-240.000 (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4) + 245,764 F_{43} (\vec{v}_3 \times \vec{v}_4) = 0$$

$$-240.000 \cdot \sin (80^\circ - 339, 367^\circ) \vec{v}_4 + 245,764 F_{43} \cdot \sin (63, 367^\circ - 339, 367^\circ) \vec{v}_4 = 0$$

$$\Rightarrow -235879,0171 + 245,764 F_{43} = 0$$

$$\Rightarrow F_{43} = 959,778556 \text{ N}$$

$$\boxed{F_{43} \approx 959,78 \text{ N}} \quad 1$$

(48)

$$(3) \text{ den} \Rightarrow F_{23x} = 234,0284602 \text{ N} \Rightarrow \boxed{F_{23x} = 234,02 \text{ N}} \quad (6)$$

$$(4) \text{ den} \Rightarrow -F_{23y} = 307,330525 \text{ N} \Rightarrow \boxed{F_{23y} = 307,33 \text{ N}}$$

U2 u U2:

$$\sum M_{A_2} = 0$$

$$T_{12} \vec{k} + F_{32y} \cdot 100 \cos 60 \vec{k} - F_{32x} \cdot 100 \sin 60 \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = 234,02 \cdot 100 \sin 60 - 307,33 \cdot 100 \cos 60 \stackrel{\approx 50}{\approx}$$

$$\Rightarrow T_{12} = 4900,2265 \text{ N.m} \approx 4,9 \text{ N.m}$$

$$\boxed{\vec{T}_{12} = 4,9 \vec{k} \text{ N.m}}$$

Möglichkeiten:

$$\vec{F}_{32} = 234,02 \vec{i} + 307,33 \vec{j} \text{ N} \rightarrow -\vec{F}_{32} = 386,286 \text{ N}$$

$$\vec{G}_{12} = \vec{F}_{23} = -234,02 \vec{i} - 307,33 \vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{43} = \vec{G}_{14} = 953,78 \angle 69,367^\circ \text{ N}$$

$$\vec{F}_{34} = 953,78 \angle 249,367^\circ \text{ N}$$

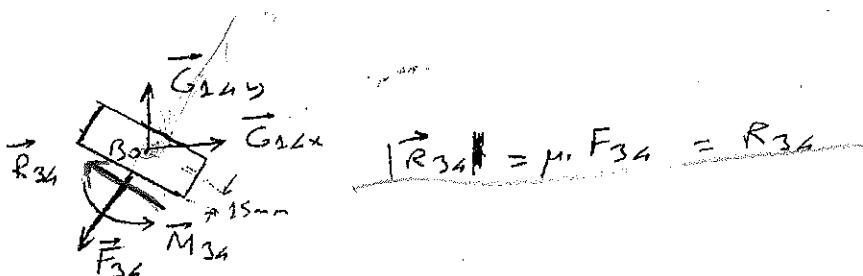
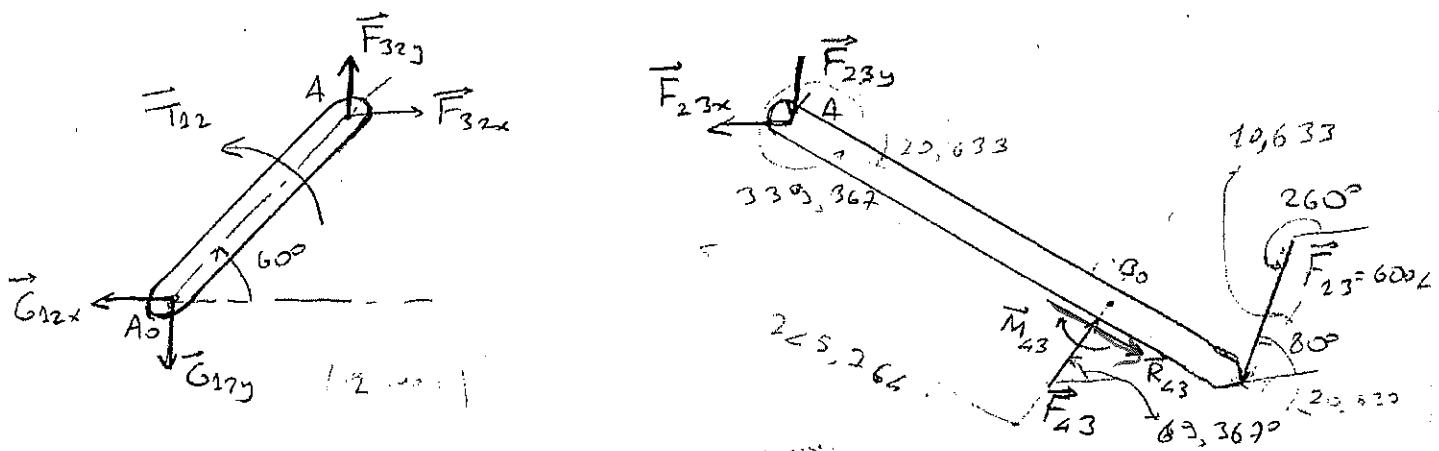


b) 3 ve 4 numaralı esasındaki sıradırma katsayıları  $\mu_1 = 0,1$  (4)

2 num:  $\rightarrow \bar{T}_{12} = ?$ , normal kuvvetleri: ?

Konur analizi: oynamış

Serbest Cism Göruntüler: (2 p)



$$|R_{34}| = \mu \cdot F_{34} = R_{34}$$

$$F_{43} = F_{34} = F_2$$

$$\vec{F}_{43} = -\vec{F}_{34} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{23x} = -\vec{F}_{32x} = \vec{G}_{12x}$$

$$F_{23x} = F_{32x} = G_{12x} =$$

$$\vec{R}_{43} = -\vec{R}_{34}$$

$$\vec{F}_{23y} = -\vec{F}_{32y} = \vec{G}_{12y}$$

$$F_{23y} = F_{32y} = G_{12y} =$$

$$\vec{M}_{43} = -\vec{M}_{34}$$

$$R_{43} = R_{34} = \mu \cdot F_2$$

$$M_{34}, M_{43} = M$$

Düzen Denklemleri:

(2 p) :  $\rightarrow$  enince  $\rightarrow$  enaz  $\rightarrow$  en çok  $\rightarrow$  en az

Uzunluk:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow -F_{34} \cdot \cos(63.367) - R_{34} \cdot \cos(20.633) + G_{12x} = 0 \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow -F_{34} \cdot \sin(63.367) + R_{34} \cdot \sin(20.633) + G_{12y} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{B_0} = 0 \Rightarrow M_{34} - R_{34} \cdot 15 \text{ mm} = 0 \Rightarrow M_{34} = R_{34} \cdot 15 \quad (3)$$

$$= M_{34} = R_{34} \cdot 15 = \mu \cdot F_{34} \cdot 15 \\ = 600$$

Uzunluk 3:

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow F_{43} \cdot 245.764 \text{ mm} + R_{43} \cdot 15 \text{ mm} - M_{43} \text{ mm} - [F_{23} \cdot \cos(20.633) \cdot 400] = 0$$

$$\Rightarrow F_{34} \cdot 245.764 + 0,1 \cdot F_{34} \cdot 15 - 0,1 \cdot F_{34} \cdot 15 - 600 \cdot \cos(10.633) \cdot 400 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{34} = F_{43} = 959,778556 \text{ N}} \quad (5)$$

$$\text{vgl. } \boxed{F_{34} = F_{43} = 959,78 \text{ N}} \Rightarrow$$

$$W\text{ibm} \Rightarrow G_{44} = 428,00 \text{ N}$$

$$W\text{fm} \Rightarrow G_{44} = 864,40 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow -F_{23x} + F_{43} \cdot \cos(63,367) + R_{43} \cdot \cos(20,633) - 600 \cdot \cos 80 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{23x} = 323,84 \text{ N}} = F_{32x}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{23y} + F_{43} \cdot \sin(63,367) - R_{43} \cdot \sin(20,633) - 600 \cdot \sin 80 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{23y} = 273,51 \text{ N}} = F_{32y}$$

U7UV 2:

$$\sum M_{A_0} = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} \bar{k} + F_{32y} \cdot 100 \cdot \cos 60 \bar{l} - F_{32x} \cdot 100 \cdot \sin 60 \bar{l} = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = 323,84 \cdot 100 \cdot \sin 60 - 273,51 \cdot 100 \cdot \cos 60$$

$$\Rightarrow T_{12} = 14363,87 \text{ N.m} \equiv 14,37 \text{ N.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{12} = 14,37 \text{ N.m}}$$

(51) X

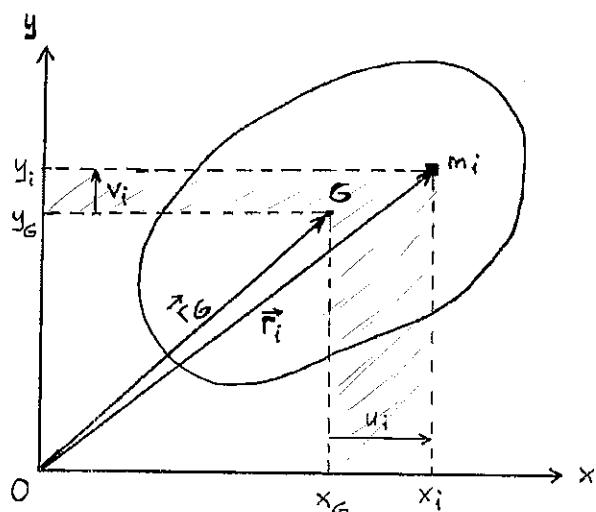
### 3. DINAMIK KUVVET ANALİZİ

#### 3.1. Tanımlamalar:

Nokta cisim : Boyutları çok küçük olan cisim

Rigid cisim : Nokta cisimlerden oluşan bir sistem. Nokta cisimler arasındaki mesafe, dış kuvvetler ne olursa olsun değişmiyor.

Kütle Merkezi (Ağırlık Merkezi) [G, CM(Center of mass), CG(Center of gravity)]



$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{m}$$

$m$ : cismin toplam kütesi

$$m = \sum_i m_i$$

$$x_G = \frac{1}{m} \sum_i x_i m_i, \quad y_G = \frac{1}{m} \sum_i y_i m_i$$

Kütle Atalet Momenti (Mass Moment of Inertia)

Kütlenin cisim içinde dağılımını gösteren bir parametredir. Her zaman bir eksenin göre tanımlanır. Düzlemsel sistemlerde, atalet momenti düzleme dik bir eksenin göre tanımlanır.

$$I_G = \sum_i (u_i^2 + v_i^2) m_i : \text{Kütle merkezine göre atalet momenti}$$

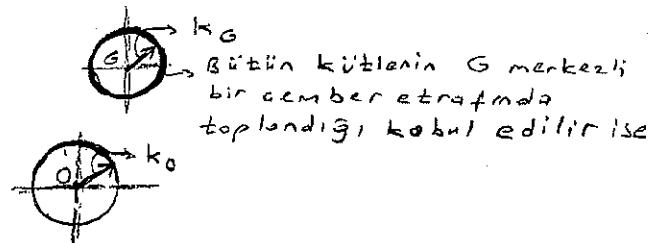
$$I_O = \sum_i (x_i^2 + v_i^2) m_i : \text{O noktasına " " " "$$

Birim:  $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  dir.

Atalet Yarıçapı (Radius of Gyration) (Bir eksenin göre tanımlanır)

$$k_G = \sqrt{\frac{I_G}{m}} \Rightarrow I_G = m k_G^2$$

$$k_O = \sqrt{\frac{I_O}{m}} \Rightarrow I_O = m k_O^2$$



(52)

O noktasına göre otolet momentine,  $I_0$ , tekrar bakalım:

$$I_0 = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i$$

$$x_i = x_G + u_i \rightarrow y_i = y_G + v_i$$

$$\Rightarrow I_0 = \sum_i [(x_G + u_i)^2 + (y_G + v_i)^2] m_i$$

$$I_0 = \underbrace{(x_G^2 + y_G^2)}_{r_G^2} \sum_i m_i + \underbrace{\sum_i (u_i^2 + v_i^2) m_i}_{I_G} + 2x_G \underbrace{\sum_i u_i m_i}_{=0} + 2y_G \underbrace{\sum_i v_i m_i}_{=0}$$

$u_i$  ve  $v_i$  rigid cisim içindeki nokta cisimlerin kütte merkezine göre koordinatlarıdır. Kütte merkezi tanımına göre

$$\sum_i u_i m_i = \sum v_i m_i = 0 \text{ dir. Öyle ise:}$$

$$I_0 = I_G + m r_G^2 = m (k_G^2 + r_G^2)$$

$$I_0 = m k_0^2 \quad \Rightarrow \quad k_0^2 = k_G^2 + r_G^2$$

Minimum otolet momenti kütte merkezine göre oladır. Bu denklemlerde,  $k_0$ , O noktasına göre otolet yarıçapı,  $k_G$ , kütte merkezine göre otolet yarıçapı ve  $r_G$ , kütte merkezinin merkezine göre konum vektörünün siddetidir. Sonuç mekanik O noktasına göre konum vektörünün sıddetidir. Sonuç mekanik teknigi bilinen klasik bir teoremdir.

Paralel Eksen Teoremi:

Bir rigid cismin herhangi bir eksene göre otolet momenti, O cismin kütte merkezinden geçen bu eksene paralel otolet momenti ile cismin kütlesinin bu paralel eksenter arasındaki mesafenin karesi ile çarpımının toplamına eşittir.

Kitabınızda Tablo 1.4'te, basit geometride cisimler için atalet momentleri verilmiştir. Karmasık geometride cisimlerin atalet momenti, cisim basit geometrilere ayrılarak her birinin atalet momenti kendi ağırlık merkezine göre bulunmasından sonra bu atalet momentlerinin cisimin ortak ağırlık merkezine, paralel eksen teoremine göre alınması ve toplanması sonucu elde edilebilir. Aşağıda bizim gözümüzde kullandığımız iki geometrik şekil için atalet momentleri verilmiştir:

- ince cubuk ( $l > 10 \times \text{kalinlik}$ )



$$I_G = \frac{1}{12} m l^2$$

- Silindir



$$I_G = \frac{1}{2} m r^2$$

3.2. Rigid Cisimler için Newton'un ikinci Kanunu

Nokta cisim için Newton'un ikinci kanunu şu şekildeydi:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$$

$i$  nokta cisim için bu denklem şu şekilde yazılabılır:

$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji} = \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) \quad \dots \dots \dots (1)$$

Burada  $\vec{F}_i$ ,  $i$  nokta cisimine etki eden dış kuvvetlerin bileskesini ve  $\vec{F}_{ji}$  ise  $i$  nokta cisimine,  $j$  nokta cisiminden etki eden kuvveti göstermektedir. ( $\vec{F}_{ji}$  işe kuvvet olarak oddendirler)

Rigid cisim içerisinde bulunan tüm nokta cisimler ele alındığında,

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} = \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i : \text{Eğer kütle sabitse}$$

Bu denklemde;

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum \vec{F} : \text{cisim etki eden tüm dış kuvvetlerin vektörel toplamı}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} = 0 \text{ dir. (Newton'un 3. kanunu göre } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji})$$

Kütle merkezi tanımı kullanılarak:  $\sum_i m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_G$

Bu inceleme sonucu, Newton'un rigid cisimler için lineer momentum cinsinden ikinci Hareket Kanunu elde edilmiştir:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d^2(m \vec{r}_G)}{dt^2} = \frac{d(m \vec{v}_G)}{dt} = m \vec{a}_G} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = m \vec{a}_{Gx} \\ \sum \vec{F}_y = m \vec{a}_{Gy} \end{array} \right.$$

$m \vec{v}_G$ : rigid cisimin lineer (doğrusal) momentumu

Nokta cisim için elde edilen (1) numaralı denklemi tekrar yazalım

$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji} = \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = m_i \vec{a}_i$$

Şimdi referans koordinat sisteminin origine göre (0 noktası) bu denklemde gösterilen kuvvetlerin oluşturdukları momentleri yazalım:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{a}_i m_i \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

i noktasının ivmesi, cisim üzerinde bulunan bir 0 noktasına göre bağıl ivmesi kullanılarak su şekilde yazılabilir (cisim üzerinde sabitlenmiş ve cisimle birlikte hareket eden 0 noktası)

$$\vec{a}_i = \vec{a}_0 + \vec{a}_{i/0} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{i/0}^t + \vec{a}_{i/0}^n$$

$\vec{a}_{i/0}^t = \vec{a} \times \vec{r}_i$ , i noktasının 0 noktasına göre tegetsel ivmesi

$$\vec{a}_{i/0}^n = -\omega^2 \vec{r}_i, \quad " \quad " \quad 0 \quad " \quad " \quad \text{normal "}$$

$\vec{a}$ : Rigid cisimin açısal ivmesi

$$\omega_i \quad " \quad " \quad " \quad h_{121}$$

Elde ettiğimiz terimleri (3) numaralı denklemde yerine yazarak ve rigid cisim içindeki tüm nokta cisimlerin toplamını alırsak:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{\alpha}_i m_i \\ = \sum_i [\vec{r}_i \times (\vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i - \omega^2 \vec{r}_i) m_i] \quad \dots (4)$$

Terimleri incelediğimizde;

$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_0$  : dış kuvvetlerin O noktasından geçen düzleme dik eksen'e göre oluşturdukları toplam moment

$\sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i} = 0$  :  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  olduğundan ve bu kuvvetlerin aynı etki doğrultusunda olmasından dolayı toplamda terimler ikiser  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j,i} = 0$  olur.

(4) numaralı denklemi tekrar yazarak olursak

$$\sum \vec{M}_0 = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\alpha}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\alpha} \times \vec{r}_i - \omega^2 \sum_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i m_i \quad \dots (5)$$

Bu denklemde

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{\alpha}_0 = m \vec{r}_G \times \vec{\alpha}_0 \\ = m \vec{r}_G$$

$$\sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{\alpha} \times \vec{r}_i) = \vec{\alpha} \left( \sum_i \vec{r}_i^2 m_i \right) = I_0 \vec{\alpha}$$

$$\omega^2 \sum_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i m_i = 0 \quad \text{olar.}$$

Böylece (5) numaralı denklem aşağıdaki şekilde olur.

$$\boxed{\sum \vec{M}_0 = I_0 \vec{\alpha} + m \vec{r}_G \times \vec{\alpha}_0}$$

Newton'un rigid cisimler için aksiyal momentum ekseninden ikinci Hareket Kanunu

$$I_0 \vec{\alpha} = \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega}) = \frac{d^2}{dt^2} (I_0 \vec{\theta})$$

$I_0 \vec{\omega}$  : rigid cisimin O noktasından geçen dik eksen'e göre aksiyal momentumu

Genel olarak  $\sum \vec{M}_G \neq I_G \alpha$  dir.

### Özel Durumlar

(1)  $\vec{r}_G = 0$  Yani  $O \equiv G$  (O noktası kütle merkezinde ise)

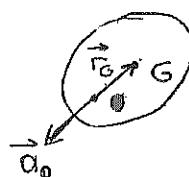
$$\sum \vec{M}_G = \frac{d^2(I_G \vec{\omega})}{dt^2} = \frac{d(I_G \vec{\omega})}{dt} = I_G \vec{\alpha}$$

$I_G \vec{\omega}$ : kütle merkezine göre cismin açısal momentumu

- (2)  $\vec{\alpha}_0 = 0$
- (i) Cism O noktası etrafında sabit bir dönmeye ekibi olarak dönüyor. (cism O noktasından mafsallanmış)
  - (ii) O noktası, sabit lineer bir hızla ilerliyor.  
(Hız vektörü yön değiştirmiyor ve sabit  $\rightarrow v_0$ ; sabit)
  - (iii) O noktası cismin dönmeye polü ise

$$\sum \vec{M}_0 = I_0 \vec{\alpha}$$

(3)  $\vec{\alpha}_0 \parallel \vec{r}_G$



$$\Rightarrow \sum \vec{M}_0 = I_0 \vec{\alpha}$$

### 3.3. D'Alembert Prensibi

Newton'un rigid cisimler için ikinci kanunu:

$$\sum \vec{F}_i (-m \vec{a}_G) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum \vec{M}_G (-I_G \vec{\alpha}) = 0$$

$$\vec{F}^i = -m \vec{a}_G$$

: Atelet  
kuvveti

$$\vec{T}^i = -I_G \vec{\alpha}$$

: Atelet momenti

Rigid cisimler için Newton'un 2. kanunu su şekilde yazılabilir:

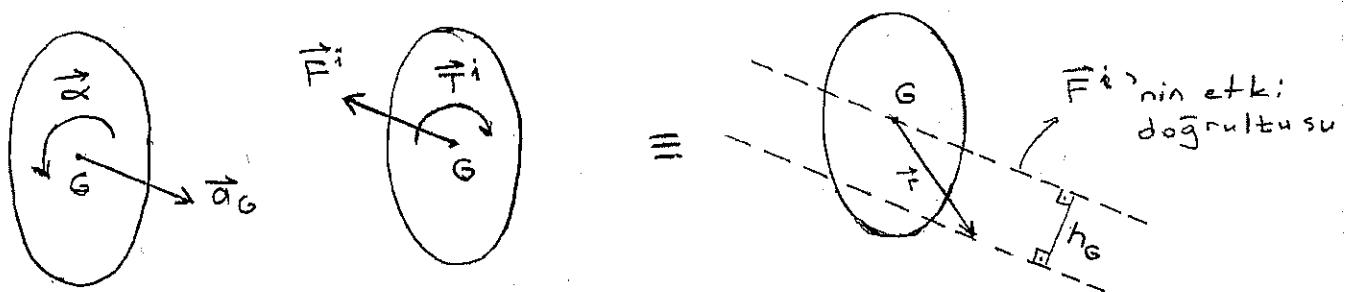
$$\sum \vec{F} + \vec{F}^i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum \vec{M}_G + \vec{T}^i = 0$$

Sonat kuvvetler olan (yani: ancak bir dış kuvvet varsa ortaya çıkan) astelet kuvvetini ve momentini, etki eden bir dış kuvvet gibi düşünüleceğimizden dolayı bu denklemeler:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{ve} \quad \sum \vec{M}_G = 0 \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

Bu vektörel toplamda astelet kuvveti ve momenti etki eden bir dış kuvvet gibi ele alınacaktır. Bu yöntem D'Alambert prensibi olarak bilinmektedir.

Grafiksel çözümlerde, astelet kuvveti ve momentini tek bir kuvvette indirmemiz kolaylık getirecektir.



$$\vec{F}_i = -m \vec{a}_G$$

$$\vec{T}_i = -I_G \vec{\alpha}$$

Tek bir kuvvette indirmeye için toplanması gereken doğrultu

Bu astelet kuvveti ve momenti tek bir bileskeye,  $\vec{R}'_i$ , indirgenmek istenir ise:

$$\vec{R}'_i = \vec{F}'_i \quad \text{ve} \quad \vec{r} \times (\vec{R}'_i) = \vec{T}'_i \quad \text{olması gereklidir.}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times (-m \vec{a}_G) = -I_G \vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow -h_G \cdot m \cdot a_G = -I_G \alpha$$

$$\Rightarrow h_G = \frac{I_G \cdot \alpha}{m \cdot a_G} = \frac{k_G^2 \alpha}{a_G} = \frac{T'_i}{F'_i}$$

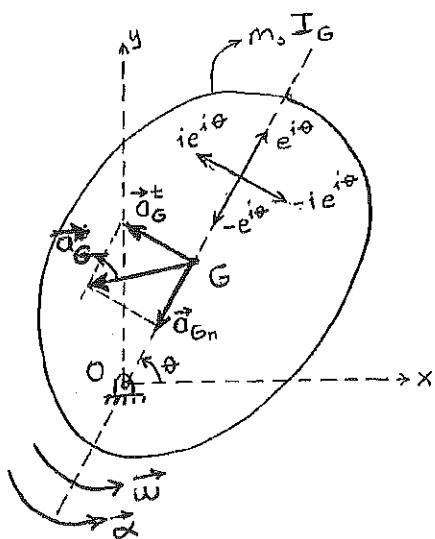
siddetleri!

$= m k_G^2$

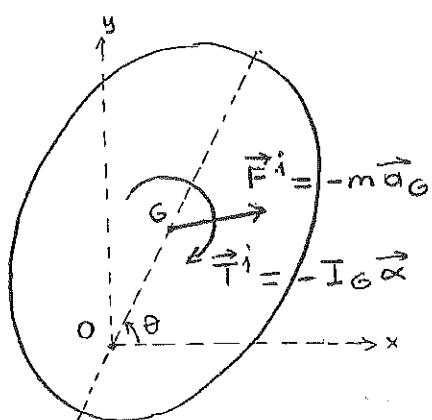
(58)

## Rigid Bir Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesi

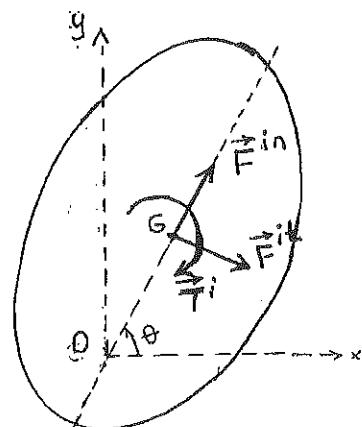
- a) Kütle merkezinden geçen bir eksen etrafında dönme  
(cisim kütle merkezinden merkez momenti) (Centroidal)
- Bu durumda,  $\vec{d}_G = 0$  olduğundan, cismin sadece atalet momenti olur. (Eğer  $\vec{d} \neq 0$  ise)
- b) Kütle merkezi disinda bir noktadan geçen eksen etrafında dönme (cisim kütle merkezi disinda bir noktadan merkez momenti) (Non-centroidal)



$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \vec{r}_G = r_G e^{i\theta} \\ \vec{v}_G &= \dot{\vec{r}}_G = r_G \dot{\theta} (i e^{i\theta}) \\ \vec{a}_G &= \ddot{\vec{r}}_G = r_G \ddot{\theta} (i e^{i\theta}) + r_G \dot{\theta}^2 (-e^{i\theta}) \\ \vec{a}_G &= \underbrace{i r_G \alpha e^{i\theta}}_{\vec{a}_G^t} - \underbrace{r_G \omega^2 e^{i\theta}}_{\vec{a}_G^n} \\ \Rightarrow \vec{a}_G &= \vec{a}_G^t + \vec{a}_G^n\end{aligned}$$



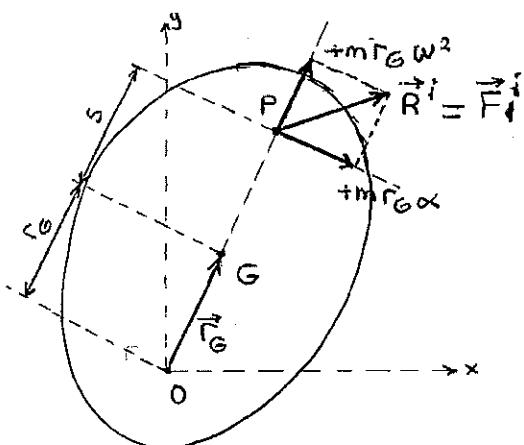
=



$$\begin{aligned}\vec{F}_i^{in} &= -m \cdot \vec{a}_G^n = -m r_G \omega^2 \angle \theta + \pi = m r_G \omega^2 \angle \theta \\ \vec{F}_i^t &= -m \vec{a}_G^t = -m r_G \alpha \angle \theta + \frac{\pi}{2} = m r_G \alpha \angle \theta - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(59)

Atalet kuvvet ve momentini tek bir kuvvet olarak gösterirsek;



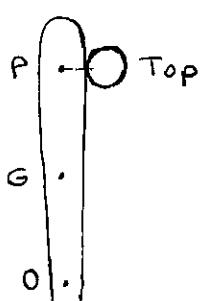
$$T^i = -I_G \alpha = (-m r_G \alpha) \cdot s$$

$$\Rightarrow s = \frac{I_G}{m r_G} = \frac{k_G^2}{r_G}$$

P : Darbe merkezi  
(Center of percussion)

Eğer P noktasından, ( $\vec{\omega}$  ve  $\vec{\alpha}$ ) aksial hız ve ivmesini verecek bir dis kuvvet uygularsak, O noktasındaki yataktan, yatak yükü olmaya caktır. (Düşük mafsal kuvvetleri için, dis kuvveti P noktasına uygula).

Örnek: Beyzbol sopası



Eğer topo P noktasından vurursak, elimizde daha az kuvvet hissederiz.

Not: (a) sık kindo bahsedilen kütle merkezinden geçen bir eksen etrafında dönmeye horeketi yapan bir cisim iain darbe merkezi, P, sonsuzdadır.

### 3.4. Dinamik Kuvvet Analizi

#### Mekanizmadaki

- Bütün kütle ve ağılet değerleri biliniyor.
- Bütün konum, hız ve ivmeler biliniyor.
- Sistem üzerinde farklı uzuvlara etki eden dış kuvvetler ve/veya momentler olabilir.
- Mafsallarda sürtünme olabilir.
- Sisteme etki eden ve sistemi dinamik dengeye getiren yinii bilinen şiddeti bilmeyen bir dış teknik kuvveti veya momenti dışında bilmeyen kuvvet yoktur.

#### Amaçımız

- Mafsal kuvvetlerini hesaplamak
- Teknik kuvvetini (veya momentini) belirlemek } Kinetostatik veya  
} Witten bouer'in  
} ikinci problemi

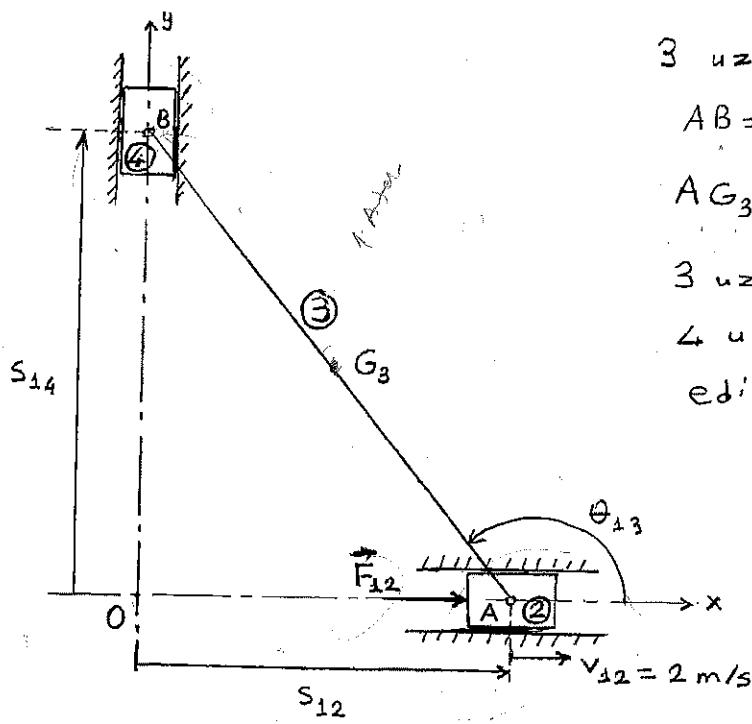
#### A - Grafiksel Görüm

- 1-) Herbir uzun acısal ivmesini ve kütle merkezinin ivmesini belirleme için, mekanizmanın kinematik analizini yap. ( $\ddot{\alpha}_G, \ddot{\theta}_G$ )
- 2-) Herbir uzun kütle ağılet momentini belirle ( $I_G, I_o$ )
- 3-) Herbir uzun ağılet kuvvet ve momentini belirle ( $\vec{F}_j^i, \vec{T}_j^i$ )
- 4-) Herbir dış kuvvet ve moment ıgın ve herbir ağılet kuvveti ve momenti ıgın ayrı ayrı statik kuvvet analizi gerçekleştir. (serbest cisim diyagramlarının kullanarak)
- 5-) Herbir uzun ve mafsal üzerindeki bileske kuvvet ve momentleri belirlemek ıgın 4. basamakta gerçekleştirilen statik analiz sonucu bulunan kuvvet ve momentleri vektörel olarak topla. (superpozisyon prensibi)

#### B - Analitik Görüm

- 1., 2. ve 3. basamaklar aynı
- 4-) Herbir uzun serbest cisim görüntüsünü çiz. (Ağılet kuvvet ve momentlerinde içerecek şekilde)
- 5-) Herbir mafsal ıgın  $\vec{F}_{ij}^i = -\vec{F}_{ji}^i$  yz. yaz.
- 6-) Herbir uzun ıgın dinamik denge denklemlerini yaz. (D'Alembert Prensibi)
- 7-) Elde edilen denklemleri birlikte çöz.

## Örnek: Gif t kizak mekanizması



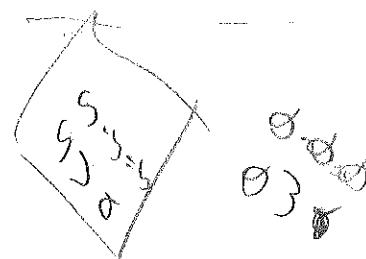
3 uzvu ince düzgün bir çubuktur.

$$AB = \alpha_3 = 500 \text{ mm}$$

$$AG_3 = BG_3 = 250 \text{ mm}$$

3 uzvunun kütlesi 5 kg'dır. 2 ve 4 uzuvlarının kütleleri ihmal edilebilir.

$$m_3 = 5 \text{ kg}, m_2 \approx m_4 \approx 0$$



Mekanizma yatay düzlemede çalışmaktadır. (yere aktarılmış ivmesi ihmal edilecektir) (Mekanizma dikey düzlemede çalışıyo olursa, uzuv ağırlıkları kütle merkezine etki eden dış kuvvetler şeklinde ele alınabilirdi). Mafsallardaki sürünme ihmal edilecektir. 2 nolu uzun sağa doğru,  $2 \text{ m/s}$  sabit hızla ilerlemesi isteniyor.  $s_{12} = 200 \text{ mm}$  iken, 2 nolu uzunu bu sabit hızla yoluna devam ettirecek, 2 nolu uzun uygulanması gereken teknik kuvvetin bulunur ( $v_{12} = \dot{s}_{12} = 2 \text{ m/s} \rightarrow$  sabit  $\ddot{s}_{12} = 0$ ). Mafsal kuvvetlerini hesaplayınız.

Gözüm:

### Kinematik Analizi:

$$\text{Devre koparılık denklemi: } \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

$$s_{12} + \alpha_3 e^{i\theta_{13}} = i s_{14}$$

$$\text{Re: } s_{12} + \alpha_3 \cdot \cos \theta_{13} = 0 \quad \dots \dots (1) \quad \Rightarrow \theta_{13} = \cos^{-1} \left( -\frac{s_{12}}{\alpha_3} \right)$$

$$\text{Im: } \alpha_3 \cdot \sin \theta_{13} = s_{14} \quad \dots \dots (2) \quad \Rightarrow s_{14} = \alpha_3 \cdot \sin \theta_{13}$$

$$\left. \begin{array}{l} s_{12} = 200 \text{ mm} \\ \alpha_3 = 500 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{13} = 113,58^\circ}$$

$$\boxed{s_{14} = 458,26 \text{ mm}}$$

(1) ve (2) nolu denklemelerin zamanla göre türevleri:

$$\text{olunursa } \left[ (\cdot)' = \frac{d}{dt} \right]$$

$$\dot{s}_{12} = a_3 \dot{\theta}_{13} \sin \theta_{13} = 0 \quad \dots \quad (3) \Rightarrow \dot{\theta}_{13} = \frac{\dot{s}_{12}}{a_3 \cdot \sin \theta_{13}}$$

$$\dot{s}_{14} = a_3 \cdot \dot{\theta}_{13} \cos \theta_{13} \quad \dots \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{12} &= 2 \text{ m/s} \\ a_3 &= 0,5 \text{ m} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{13} = (\omega_{13}) = 4,364 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \text{Hocanın} \quad \text{hiz} \checkmark$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{14} &= -872,87 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \\ &\cong -0,87 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

(3) ve (4) numaralı denklemelerin zamanla göre türevleri olunursa:

$$\ddot{s}_{12} = a_3 \ddot{\theta}_{13} \sin \theta_{13} + a_3 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 \cos \theta_{13}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_{13} = \frac{-a_3 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 \cos \theta_{13}}{a_3 \cdot \sin \theta_{13}} = -\frac{\dot{\theta}_{13}^2 \cos \theta_{13}}{\sin \theta_{13}} = 8,312 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \alpha_{13}$$

Hocanın  $\Rightarrow (\alpha_{13}) = 8,312 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

$$\ddot{s}_{14} = a_3 \cdot \ddot{\theta}_{13} \cos \theta_{13} - a_3 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 \sin \theta_{13} = -10,39 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{s}_{14} = -10,39 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = (\vec{\alpha}_{G_4}) \quad \text{Hocanın} \quad \text{i̇vme}$$

\*  $G_3$  noktasının konumu, hizini ve ivmesi

$$\vec{r}_{G_3} = \vec{OA} + \vec{AG}_3 = s_{12} \vec{i} + \frac{a_3}{2} \left( \cos \theta_{13} \vec{i} + \sin \theta_{13} \vec{j} \right)$$

$$\vec{v}_{G_3} = \dot{\vec{r}}_{G_3} = \dot{s}_{12} \vec{i} + \frac{a_3}{2} \left( -\dot{\theta}_{13} \cdot \sin \theta_{13} \vec{i} + \dot{\theta}_{13} \cdot \cos \theta_{13} \vec{j} \right)$$

$$\vec{\alpha}_{G_3} = \ddot{\vec{r}}_{G_3} = \ddot{s}_{12} \vec{i} + \frac{a_3}{2} \left( -\ddot{\theta}_{13} \cdot \sin \theta_{13} \vec{i} - \dot{\theta}_{13}^2 \cos \theta_{13} \vec{i} + \ddot{\theta}_{13} \cos \theta_{13} \vec{j} \right. \\ \left. - \dot{\theta}_{13}^2 \sin \theta_{13} \vec{j} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{G_3} = \frac{a_3}{2} \left[ (-\ddot{\theta}_{13} \cdot \sin \theta_{13} - \dot{\theta}_{13}^2 \cos \theta_{13}) \vec{i} + (\dot{\theta}_{13} \cdot \cos \theta_{13} - \dot{\theta}_{13}^2 \sin \theta_{13}) \vec{j} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{G_3} = -5,194 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = (5,194) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \angle 270^\circ$$

$\ddot{s}_{13}$

i̇vme

Şimdi 3 nolu uzuv için atalet kuvveti ve momentini belirleyelim. İnce bir grubuk için  $I_G = \frac{1}{12} m \cdot l^2$  olduğundan.

$$I_{G_3} = \frac{1}{12} m_3 \cdot \alpha_3^2 \Rightarrow I_{G_3} = 0,1042 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

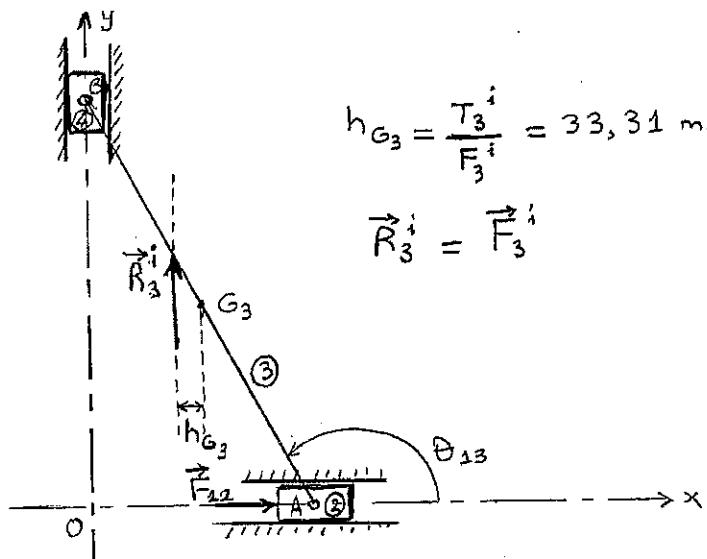
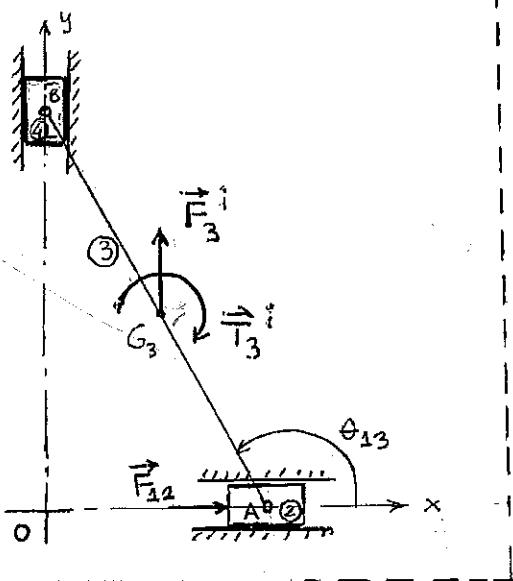
$$\vec{F}_3^i = -m_3 \vec{\alpha}_{G_3} = 25,97 N \angle 30^\circ = 25,97 \vec{i} N$$

$$\vec{T}_3^i = -I_{G_3} \vec{\alpha}_{A3} = -0,865 \vec{k} N \cdot m = -865 \vec{k} N \cdot mm$$

Bu kuvvetler sisteme etki eden bir dış kuvvetmiş gibi ele alınacaktır. (D'Alembert Prensibi)

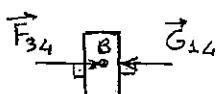
### Grafiksel Görüüm:

Atalet kuvveti ve momenti tek bir kuvvette indirgelenebilir.



Serbest cisim görüntülerini

Uzuv 4 (2F)

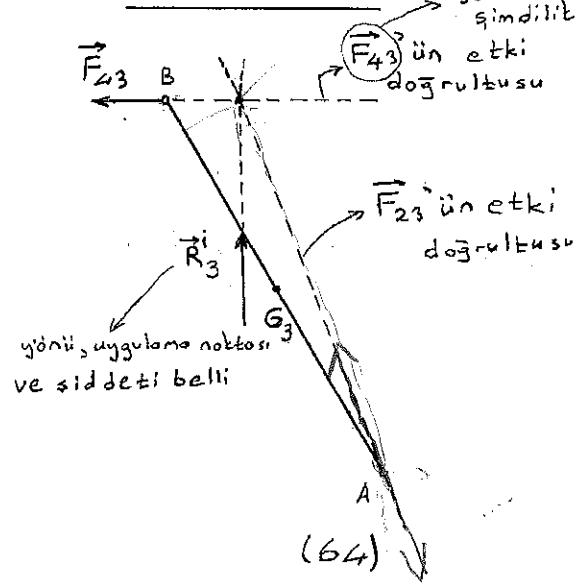
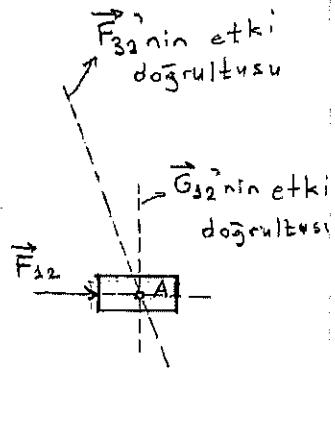


Uzuv 3 (3F)



yönü ve şiddeti bilmiyoruz

Uzuv 2 (3F)

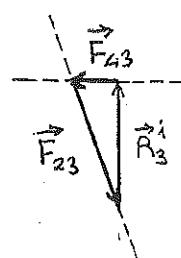
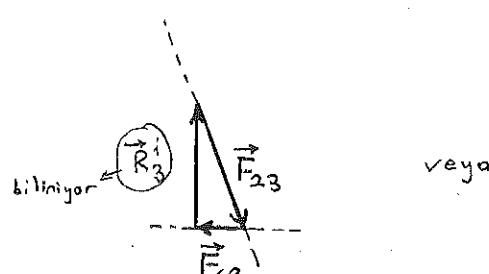


### Uzuv 3 için:

$$\vec{R}_3^i + \vec{F}_{43} + \vec{F}_{23} = 0 \text{ olmalıdır}$$

yönü ve  
siddeti belli      etki doğrultuları belli

ilk önce yönü ve siddeti bilinen  $\vec{R}_3^i$  kuvveti belirlenir. Bir öbekte (mesela 1 mm/N) çizilir. Sonra bu kuvvetin üç bisimlerinin  $\vec{F}_{43}$  ve  $\vec{F}_{23}$  kuvvetlerinin etki doğrultuları çizilir ve  $\vec{F}_{43}$  ve  $\vec{F}_{23}$  belirlenir.



$\vec{F}_{23}$  ve  $\vec{F}_{43}$ 'ü bul.

$$\vec{G}_{14} = \vec{F}_{43}$$

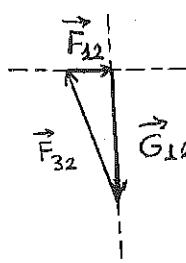
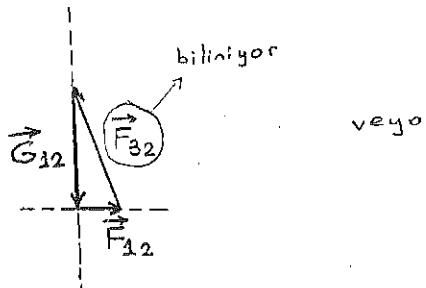
$$\vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43}$$

$$\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}$$

### Uzuv 4 için:

$$\vec{F}_{12} + \vec{G}_{12} + \vec{F}_{32} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

etki doğrultuları  
belli      yönü ve  
siddeti belli



$\vec{F}_{12}$  ve  $\vec{G}_{12}$ 'yi  
belirle.

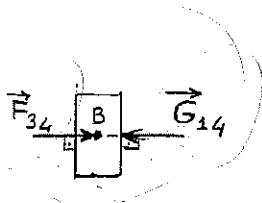
### Anlitik Yöntem:

Moment ve kuvvet denge denklemleri ayrı ayrı çözülmeliinden öbeket kuvveti ve momentinin tek bir kuvvet olarak gösterilmemesine gerek yoktur.

Serbest cisim görünümleri



Uzuv 4



$$\alpha - \theta$$

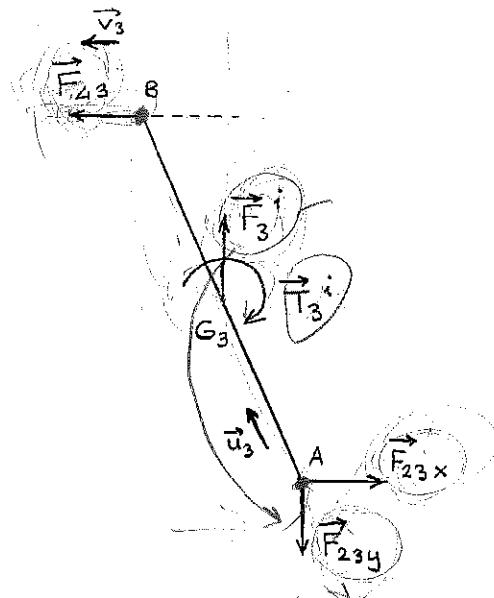
$$\vec{F}_3^i = 25,97 \text{ N} \angle 30^\circ$$

$$\vec{T}_3^i = -865 \text{ N-mm}$$

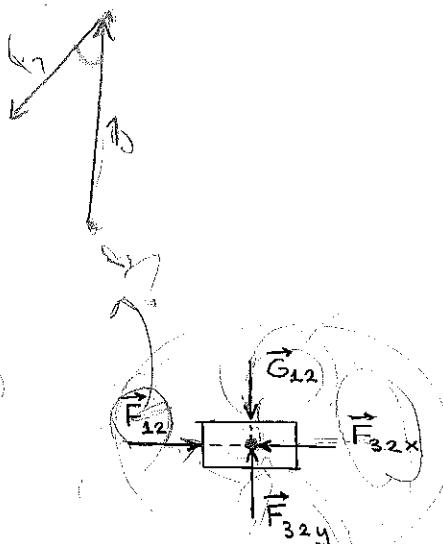
$$\vec{G}_{14} = -\vec{F}_{34} = \vec{F}_{43}$$

$$G_{14} = F_{34} = F_{43} = F_1$$

Uzuv 3



Uzuv 2



Denge Denklemleri:

Uzuv 3:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow -F_1 + F_{2x} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_3^i - F_{2y} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow 500(F_1) \sin(180^\circ - 113,58^\circ) + 250,(25,97) \cdot \sin(90^\circ - 113,58^\circ) = -865 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$F_1 \cdot x \cdot \sin(\alpha - \theta)$$

$$(3)' \text{den: } F_1 = 7,55 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{43} = \vec{G}_{14} = 7,555 \text{ N} \angle 180^\circ \\ \vec{F}_{34} = 7,555 \text{ N} \angle 0^\circ$$

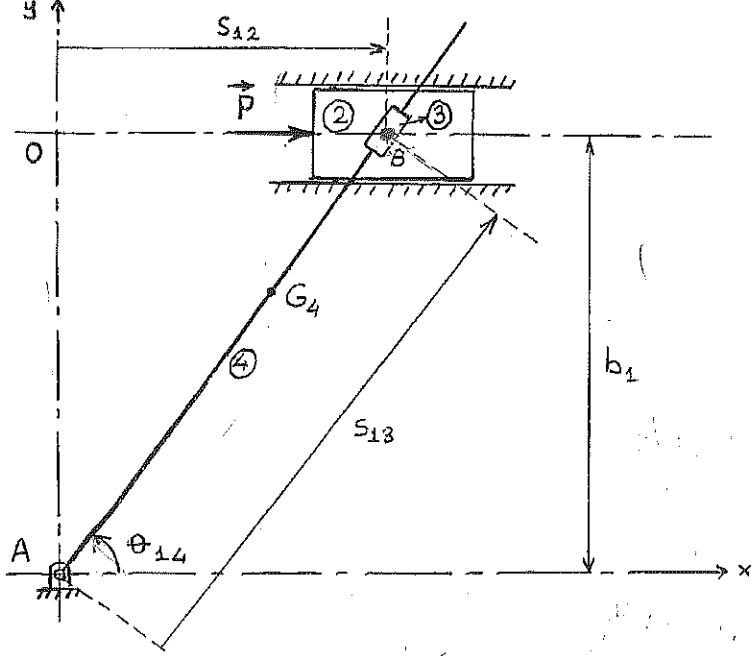
$$(1)' \text{den: } F_{2x} = 7,555 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{23x} = 7,555 \text{ N} \angle 0^\circ, \vec{F}_{32x} = 7,555 \text{ N} \angle 180^\circ$$

$$(2)' \text{den: } F_{2y} = 25,97 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{23y} = 25,97 \text{ N} \angle 270^\circ, \vec{F}_{32y} = 25,97 \text{ N} \angle 90^\circ$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{23} = 27,04 \text{ N} \angle -73,78^\circ, \vec{F}_{32} = 27,04 \text{ N} \angle 106,22^\circ$$

$$\underline{\text{Uzuv 2:}} \quad \sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{12} - F_{2x} = 0 \Rightarrow F_{12} = 7,555 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{12} = 7,555 \text{ N} \angle 0^\circ \\ \sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{2y} - G_{12} = 0 \Rightarrow G_{12} = 25,97 \text{ N} \Rightarrow \vec{G}_{12} = 25,97 \text{ N} \angle 270^\circ$$

Örnek:



\* Sürtünme yok

\* Yatay düzlem

\*  $AG_4 = b_4 : \checkmark$

\*  $AO = b_1 : \checkmark$

\*  $m_2, m_3, m_4 : \checkmark$

\*  $I_{G_2}, I_{G_3}, I_{G_4} : \checkmark$

2 nolu uzunun sağa doğru sabit bir V hızı ile ilerlemesi isteniyor

$(\dot{\vec{S}}_{12} = \vec{V}_{12} = V \angle 0^\circ, \ddot{\vec{S}}_{12} = 0)$ . Verilen bir  $s_{12}$  değeri için 2 uzunun bu hızla yoluna devam etmesini sağlayacak, 2 uzunun uygulanması gereken P kuvvetini konum değişkenleri olan ( $s_{12}, s_{13}$  ve  $\theta_{14}$ ) cinsinden bulunuz. Mafsal kuvvetlerini hesaplayınız.

Cözüm:

Kinematik Analiz:  $j=4, l=4, L=j-l+1=1$

Devre kapalılık denklemi:  $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$

$$ib_1 + s_{12} = s_{13} e^{i\theta_{14}}$$

$$\text{Re: } s_{12} = s_{13} \cdot \cos \theta_{14} \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{Im: } b_1 = s_{13} \cdot \sin \theta_{14} \quad \dots \quad (2)$$

(1)  $\wedge$  (2)’ye bölerseks

$$\cot \theta_{14} = \frac{s_{12}}{b_1} \quad \dots \quad (3) \quad \Rightarrow$$

$$\theta_{14} = \cot^{-1} \left( \frac{s_{12}}{b_1} \right)$$

$$\frac{\cos \theta_{14}}{\sin \theta_{14}}$$

(1)’den:

$$s_{13} = \frac{s_{12}}{\cos \theta_{14}}$$

veya (2)’den:

$$s_{13} = \frac{b_1}{\sin \theta_{14}}$$

(67)

(3)'ün zomona göre 1. türevini alalım:

$$\frac{-\dot{\theta}_{14} \sin^2 \theta_{14} - \dot{\theta}_{14} \cos^2 \theta_{14}}{\sin^2 \theta_{14}} = \frac{\ddot{s}_{12}}{b_1} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}_{14}}{\sin^2 \theta_{14}} = \frac{\ddot{s}_{12}}{b_1} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\ddot{s}_{12} = V \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_{14} = \omega_{14} = -\frac{V \cdot \sin^2 \theta_{14}}{b_1}} \Rightarrow \vec{\omega}_{14} = -\frac{V \cdot \sin^2 \theta_{14}}{b_1} \vec{k}$$

(4)'ün zomona göre türevini alalım

$$\frac{(\ddot{\theta}_{14} \cdot \sin^2 \theta_{14} - 2 \cdot \sin \theta_{14} \cdot \dot{\theta}_{14} \cos \theta_{14} \cdot \dot{\theta}_{14})}{\sin^4 \theta_{14}} = \frac{\ddot{s}_{12}}{b_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(\ddot{\theta}_{14} - 2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14})}{\sin^2 \theta_{14}} = \frac{\ddot{s}_{12}}{b_1} \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\ddot{s}_{12} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta}_{14} = \alpha_{14} = 2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot (\cot \theta_{14})$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{14} = 2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14} \vec{k}$$

Uzuvlerin ağırlık merkezlerinin doğrusal ivmeleri su şekilde dir.

$$\vec{\sigma}_{G_2} = \ddot{s}_{12} = 0$$

$$\vec{\sigma}_{G_3} = \ddot{s}_{12} = 0 \quad (G_3 \text{ ile } G_2 \text{ birbirine fiksit olduğu için})$$

$$\vec{\tau}_{G_4} = b_4 \cdot e^{i \theta_{14}}$$

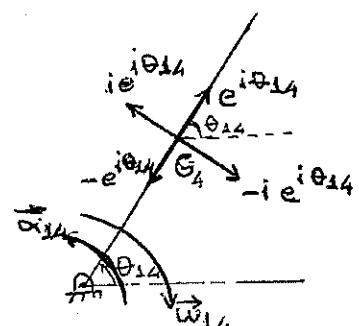
$$\Rightarrow \dot{\vec{\tau}}_{G_4} = \vec{v}_{G_4} = b_4 i \cdot \dot{\theta}_{14} \cdot e^{i \theta_{14}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{\tau}}_{G_4} = \vec{\alpha}_{G_4} = b_4 \underbrace{i \dot{\theta}_{14} e^{i \theta_{14}}}_{\alpha_{G_4}^t} + \underbrace{-b_4 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 e^{i \theta_{14}}}_{q_{G_4}^n}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{G_4}^t = b_4 \alpha_{14} \angle \theta_{14} + 90^\circ$$

$$\vec{\alpha}_{G_4}^n = b_4 \dot{\theta}_{14}^2 \angle \theta_{14} + 180^\circ$$

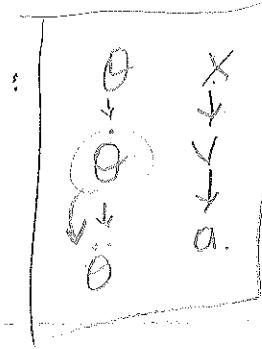
sekilde gösterilen  
durum için pozitif  
bir değer



Uzuvlara etkiyen etkileşim kuvvetleri ve momentleri:

Uzuv 2:

$$\vec{F}_2^i = -m_2 \cdot \vec{a}_{G_2} = 0, \quad \vec{T}_2^i = -I_{G_2} \cdot \vec{\alpha}_{12} = 0$$



Uzuv 3:

$$\vec{F}_3^i = -m_3 \cdot \vec{a}_{G_3} = 0, \quad \vec{T}_3^i = -I_{G_3} \cdot \vec{\alpha}_{13} = -I_{G_3} \cdot 2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14} \vec{k}$$

Uzuv 4:

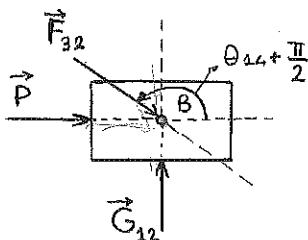
$$\vec{F}_4^i = -m_4 \cdot \vec{a}_{G_4} = m_4 \cdot b_4 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \angle \theta_{14}$$

$$\vec{F}_4^{it} = -m_4 \cdot \vec{a}_{G_4}^t = m_4 \cdot b_4 \cdot \alpha_{14} \angle \theta_{14} + 270^\circ$$

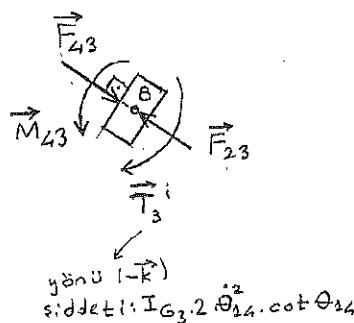
$$\vec{T}_4^i = -I_{G_4} \vec{\alpha}_{14} = -I_{G_4} \cdot 2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cot \theta_{14} \vec{k}$$

Serbest cisim görüntülerini

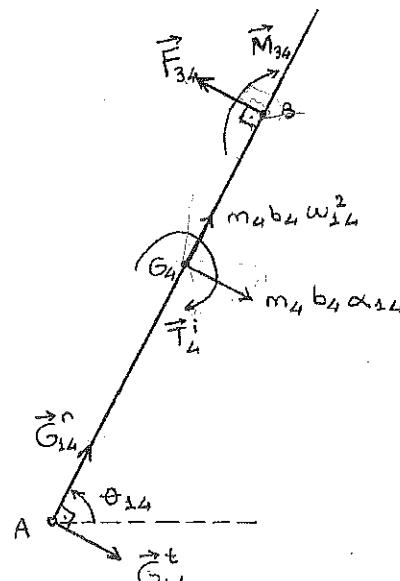
Uzuv 2:



Uzuv 3



Uzuv 4:



$$\vec{F}_{43} = -\vec{F}_{23} = \vec{F}_{32} = -\vec{F}_{34}$$

$$F_{43} = F_{23} = F_{32} = F_{34} = F$$

$$\vec{M}_{43} = -\vec{M}_{34} \Rightarrow M_{43} = M_{34} = M$$

Denge Denklemleri

$$\begin{aligned} \text{Uzuv 3: } \sum \vec{M}_B &= 0 \Rightarrow M - I_{G_3} \cdot 2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14} = 0 \\ &\Rightarrow M = I_{G_3} \cdot 2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14} \end{aligned}$$

Uzuv 4:

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow s_{13} \cdot F - b_4 \cdot (m_4 \cdot b_4 \cdot \alpha_{14}) - M - I_{G_4} \cdot (2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14}) = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{s_{13}} \left[ m_4 \cdot b_4^2 \cdot (2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14}) + (I_{G_3} + I_{G_4}) \cdot (2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14}) \right]$$

$$\Rightarrow F = \frac{2 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cdot \cot \theta_{14}}{s_{13}} \left( m_4 \cdot b_4^2 + I_{G_3} + I_{G_4} \right)$$

$$\Rightarrow F = \frac{2 \cdot V^2 \cdot \sin^4 \theta_{14} \cdot \cot \theta_{14}}{b_1^2 \cdot s_{13}} \left( m_4 \cdot b_4^2 + I_{G_3} + I_{G_4} \right)$$

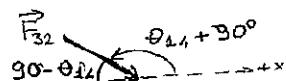
$$\sum \vec{F}^t = 0 \Rightarrow G_{14}^t + m_4 \cdot b_4 \cdot \alpha_{14} - F = 0 \Rightarrow G_{14}^t = F - m_4 \cdot b_4 \cdot \alpha_{14}$$

$$\sum \vec{F}^n = 0 \Rightarrow G_{14}^n + m_4 \cdot b_4 \cdot \omega_{14}^2 = 0 \Rightarrow G_{14}^n = -m_4 \cdot b_4 \cdot \omega_{14}^2$$

$$G_{14} = \sqrt{(G_{14}^t)^2 + (G_{14}^n)^2}$$



Uzuv 2:



$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow P + F \cdot \cos(90 - \theta_{14}) = 0 \Rightarrow P = -F \cdot \sin \theta_{14}$$

$$\Rightarrow P = -\frac{2 \cdot V^2 \cdot \sin^4 \theta_{14} \cdot \cos \theta_{14}}{b_1^2 \cdot s_{13}} \left( m_4 \cdot b_4^2 + I_{G_3} + I_{G_4} \right) \Rightarrow \vec{P} = P \vec{i}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow G_{12} - F \cdot \underbrace{\sin(90 - \theta_{14})}_{= \cos \theta_{14}} = 0$$

$$\Rightarrow G_{12} = F \cdot \cos \theta_{14} \Rightarrow \vec{G}_{12} = G_{12} \vec{j} = F \cdot \cos \theta_{14} \vec{j}$$

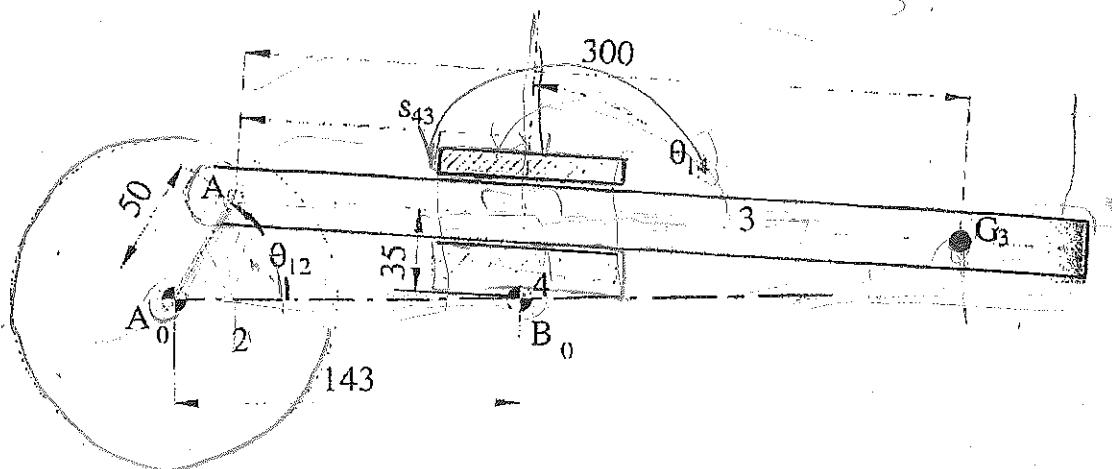
## MAK 360 MAKİNE DİNAMİĞİ

### 2009-2010 YAZ DÖNEMİ FINAL SINAVI

Öğretim Üyesi: Yrd. Doç.Dr. Yasin YILMAZ  
Süre: 110 dakika

13.08.2010

- 1-) Şekilde gösterilen mekanizmanın hareket, hız ve ivme analizi yapılmış ve  $\theta_{13} = 50^\circ$ ,  $\dot{\theta}_{12} = 10 \text{ rad/s}$  ve  $\alpha_{12} = 0$  iken;  $\theta_{14} = 88.302^\circ$ ,  $\ddot{\theta}_{14} = -2.77 \text{ rad/s}^2$ ,  $\ddot{\alpha}_{14} = 56.85 \text{ rad/s}^2$ ,  $s_{43} = 111.95 \text{ mm}$ ,  $\dot{s}_{43} = 489.27 \text{ mm/s}$  ve  $\ddot{s}_{43} = 1967.09 \text{ mm/s}^2$  olarak hesaplanmıştır. Uzuv boyutları,  $|A_0A| = a_2 = 50 \text{ mm}$ ,  $|A_0B_0| = a_1 = 143 \text{ mm}$ ,  $|AG_3| = b_3 = 300 \text{ mm}'dır. 3 \text{ uzv} \quad 5 \text{ kg}$  ağırlıkta olup ağırlık merkezine göre  $I_{G_3} = 0.02 \text{ kg-m}^2$  dir. Diğer uzuvların kütleleri ihmal edilebilir. 2 uzunun bu sabit açısal hızda hareketine devam etmesini sağlamak için bu uzva uygulanması gereken giriş momentini şekilde gösterilen konum için hesaplayınız. Mafsal kuvvetlerini belirleyiniz. (50 puan)



$$h_0(\cos\theta_i e_i + \sin\theta_i e_j) +$$

011  
10

$$= \left( 180 - \Theta(\alpha) \right)$$

Do 

- 18.0

Gözüm:

$m_3 = 5 \text{ kg}$ ,  $I_{G_3} = 0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $m_2 = m_4 \approx 0$  olursa k verilmişt

Dolayısıyla sadece 3 uzvu üzerine etkiyen etolet kuvvet ve momenti vardır. ( $\vec{\alpha}_{23} = \vec{\alpha}_{14} = 56,85 \text{ rad/s}^2$ ,  $\vec{\alpha}_{G_3} : ?$ )

$$\vec{r}_{G_3} = \vec{A}_0 \vec{A} + \vec{A} \vec{G}_3$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{G_3} = \alpha_2 \cdot (\cos \theta_{12} \vec{i} + \sin \theta_{12} \vec{j}) + b_3 [\cos(\theta_{14} + 270^\circ) \vec{i} + \sin(\theta_{14} + 270^\circ)]$$

$$\vec{v}_{G_3} = \dot{\vec{r}}_{G_3} = -\alpha_2 \ddot{\theta}_{12} \sin \theta_{12} \vec{i} + \alpha_2 \ddot{\theta}_{12} \cos \theta_{12} \vec{j} - b_3 \dot{\theta}_{14} \sin(\theta_{14} + 270^\circ) \vec{i} + b_3 \dot{\theta}_{14} \cos(\theta_{14} + 270^\circ) \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{G_3} &= (-\alpha_2 \ddot{\theta}_{12}^2 \sin \theta_{12} - \alpha_2 \ddot{\theta}_{12}^2 \cos \theta_{12}) \vec{i} + (\alpha_2 \ddot{\theta}_{12}^2 \cos \theta_{12} - \alpha_2 \ddot{\theta}_{12}^2 \sin \theta_{12}) \vec{j} \\ &\quad + [-b_3 \ddot{\theta}_{14} \sin(\theta_{14} + 270^\circ) - b_3 \dot{\theta}_{14}^2 \cos(\theta_{14} + 270^\circ)] \vec{i} \\ &\quad + [b_3 \dot{\theta}_{14}^2 \cos(\theta_{14} + 270^\circ) - b_3 \dot{\theta}_{14}^2 \sin(\theta_{14} + 270^\circ)] \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{G_3} &= -50 \cdot (10)^2 \cos 50^\circ \vec{i} - 50 \cdot (10)^2 \sin 50^\circ \vec{j} - 300 \cdot 56,85 \cdot \sin(88,302 + 270^\circ) \vec{i} \\ &\quad - 300 \cdot (-2,77)^2 \cos(88,302 + 270^\circ) \vec{i} + 300 \cdot 56,85 \cdot \cos(88,302 + 270^\circ) \vec{j} \\ &\quad - 300 \cdot (-2,77)^2 \sin(88,302 + 270^\circ) \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{G_3} &= -3213,938 \vec{i} - 3830,222 \vec{j} + 505,363 \vec{i} - 2300,859 \vec{j} \\ &\quad + 17047,541 \vec{j} + 68,208 \vec{j} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{G_3} = -5009,434 \vec{i} + 13285,497 \vec{j} \text{ mm/s}^2$$

$$= -5,009 \vec{i} + 13,285 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |\vec{\alpha}_{G_3x}| = -5,009 \vec{i} \text{ m/s}^2, |\vec{\alpha}_{G_3y}| = 13,285 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{3x}^i = -m_3 \vec{\alpha}_{G_3x} = -5 \cdot (-5,009) \vec{i} = 25,05 \vec{i} \text{ N} \angle 0^\circ \\ \vec{F}_{3y}^i = -m_3 \cdot \vec{\alpha}_{G_3y} = -5 \cdot (13,285) \vec{j} = -66,43 \vec{j} \text{ N} \angle 270^\circ \end{array} \right.$$

$$\vec{T}_3^i = -I_{G_3} \vec{\alpha}_{23} = -0,02 \cdot (56,85 \vec{k}) = -1,137 \vec{k} \text{ N.m Saat } 180^\circ$$

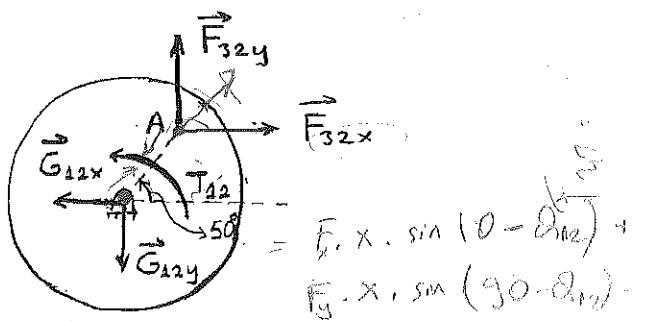
## Serbest Cisim Görüntüleri

$$\text{Atalet Kuveti} : F = m \cdot a$$

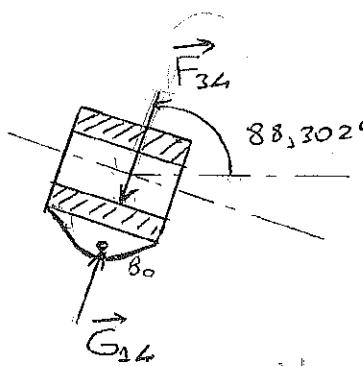
$$\text{Atalet Momenti} : T = I \cdot \ddot{\theta}$$

Döndürme kuvveti

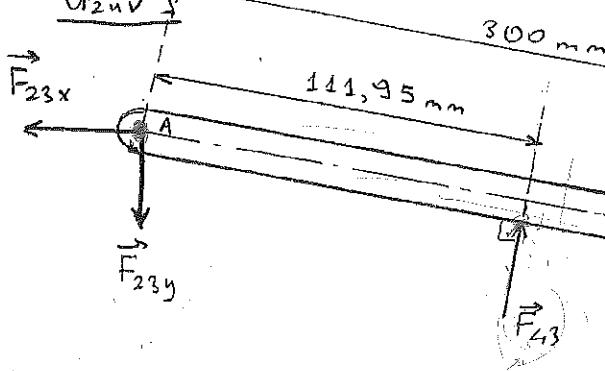
### Üzüm 2:



### Üzüm 4:



### Üzüm 3:



$$\vec{F}_{34} = -\vec{G}_{14} = -\vec{F}_{43}$$

$$F_{34} = G_{14} = F_{43} = F_1$$

$$\vec{F}_{23x} = -\vec{F}_{32x} = \vec{G}_{12x}$$

$$F_{23x} = F_{32x} = G_{12x} = F_{2x}$$

$$\vec{F}_{23y} = -\vec{F}_{32y} = \vec{G}_{12y}$$

$$F_{23y} = F_{32y} = G_{12y} = F_{2y}$$

### Denge Denklemleri

#### Üzüm 3:

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow \vec{F}_{43} \cdot 111,95 \vec{k} + 25,05 \cdot (300 \cdot \sin 1,638^\circ) \vec{k} - 1137 \vec{k} = 0 \quad 0 - 1360 = 1137 \quad 210 = 358$$

$$66,43 \cdot 1300 \cdot \cos 1,638 \vec{k} - 1137 \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = 186,1 N \Rightarrow \vec{F}_{43} = 186,1 N \angle 88,302^\circ = 186,1 (\cos 88,302 \vec{i} + \sin 88,302 \vec{j}) \\ \Rightarrow \vec{F}_{43} = 5,5 \vec{i} + 186 \vec{j} N = \vec{G}_{14}, \quad \vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43}$$

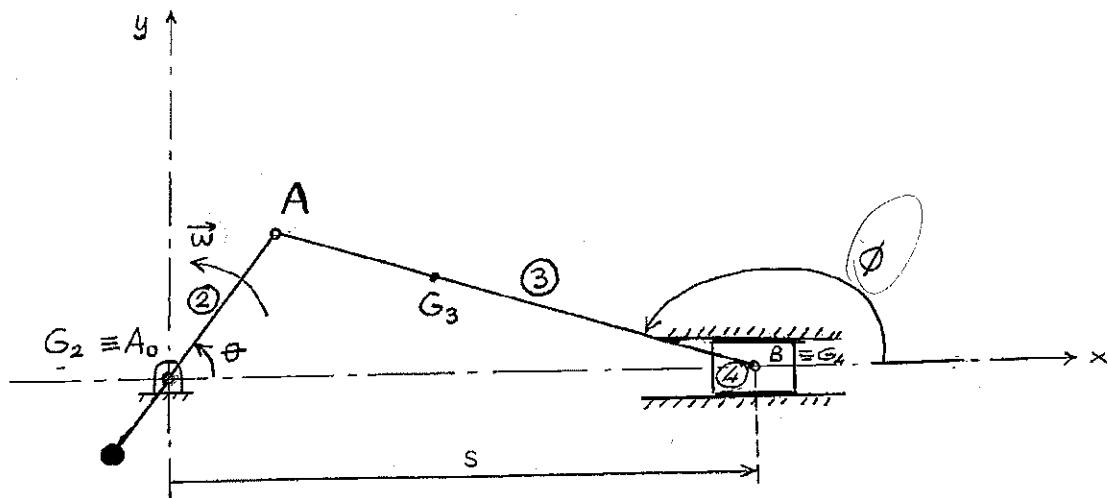
$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow -\vec{F}_{23x} + 5,5 + 25,05 = 0 \Rightarrow F_{2x} = 30,55 N$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow -\vec{F}_{23y} + 186 - 66,43 = 0 \Rightarrow F_{2y} = 119,57 N$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{23} = \vec{G}_{12} = 30,55 (-\vec{i}) + 119,57 (-\vec{j}) N, \quad \vec{F}_{32} = 30,55 \vec{i} + 119,57 \vec{j} N.$$

$$\underline{\text{Üzüm 2:}} \quad \sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow F_{2x} \cdot (50 \cdot \sin 50^\circ) (-\vec{k}) + F_{2y} \cdot (50 \cdot \cos 50^\circ) \vec{k} + T_{12} \vec{k} = 0 \\ \Rightarrow \vec{T}_{12} = -2672,8 \vec{k} N.m \approx -2,67 \vec{k} N.m$$

## Pistonlu Makineler Dinamigi



$$A_0 A = r, A B = l, A G_3 = c$$

(2) uzunun ağırlık merkezi  $A_0$  noktasında, (3) uzunun ağırlık merkezi  $G_3$  noktasında, (4) uzunun ağırlık merkezi  $B$  noktasında

Ayrıca  $\theta_{12} = \theta$ ,  $\theta_{23} = \phi$  ve  $s_{14} = s$  ile gösterilmiştir.

2 uzunun sabit bir açısal hızla dönmesi istenmektedir.  
 $(\dot{\theta}_{12} = \dot{\theta} = \omega$ ; sabit  $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$ ). Sistemin belirtilen açısal hızda  
 dönmek için 2 uzunun uygulanması  
 gereken  $\vec{T}_{12}$  tarihi momentini belirleyelim.

### Kinematik Analiz:

Derre koplilik denklemi:

$$\vec{A}_0 A = \vec{A}_0 B + \vec{B} A \Rightarrow r e^{i\theta} = s + l e^{i\phi} \quad \text{--- --- --- --- (1)}$$

Konum Analizi:

1 nolu denklemi real ve sonal kısımlarına ayıralım

$$\text{Re: } r \cdot \cos \theta = s + l \cdot \cos \phi \quad \text{--- --- --- (2)}$$

$$\text{Im: } r \cdot \sin \theta = l \cdot \sin \phi \quad \text{--- --- --- (3)}$$

(3)'den:	$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{r}{l} \sin \theta \right),  \phi  > 90^\circ$
(2)'den:	$s = r \cdot \cos \theta - l \cdot \cos \phi$

Hız Analizi:

(2) ve (3) nolu denklemlerin zamanla göre türevlerini olalım:

$$-r\dot{\theta}\sin\theta = \dot{s} - l\dot{\phi}\sin\phi \quad \dots \quad (4)$$

$$r\dot{\theta}\cos\theta = l\dot{\phi}\cos\phi \quad \dots \quad (5)$$

(5)'den:

$$\dot{\phi} = \frac{r\dot{\theta}\cos\theta}{l\cos\phi} = \frac{r.w.\frac{\cos\theta}{\cos\phi}}{l}$$

$$(4)'den: \dot{s} = -r\dot{\theta}\sin\theta + l\dot{\phi}\sin\phi$$

$$\Rightarrow \dot{s} = -rw\sin\theta + r.w.\frac{\sin\phi\cos\theta}{\cos\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{s} = r.w.\frac{(\sin\phi\cos\theta - \sin\theta\cos\phi)}{\cos\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{s} = r.w.\frac{\sin(\phi - \theta)}{\cos\phi}}$$

İrme Analizi:

(4) ve (5)'in zamanla göre türevlerini olalım:

$$-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta = \ddot{s} - l\ddot{\phi}\sin\phi - l\dot{\phi}^2\cos\phi \quad \dots \quad (6)$$

$$\Rightarrow \ddot{s} = -rw^2\cos\theta + l\ddot{\phi}\sin\phi + l\dot{\phi}^2\cos\phi \quad \dots \quad (7)$$

$$r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta = l\ddot{\phi}\cos\phi - l\dot{\phi}^2\sin\phi \quad \dots \quad (7)$$

$$(7)'den: \ddot{\phi} = \frac{l(\dot{\phi}^2\sin\phi - rw^2\sin\theta)}{l\cos\phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{\ddot{\phi}.r.w.\frac{\cos\theta}{\cos\phi}\sin\phi - rw^2\sin\theta}{l\cos\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = \frac{r.w.(\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi - w\sin\theta\cos\phi)}{\cos^2\phi}} = \alpha_{13} \quad \boxed{3 \text{ uzunluğun ölçüsü türmesi}}$$

(6) dan:

$$\ddot{s} = -r \cdot w^2 \cdot \cos \theta + r \cdot w \cdot \frac{(\dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi - w \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi)}{\cos^2 \phi} \cdot \sin \phi$$

$$+ l \cdot \dot{\phi} \cdot \frac{r}{l} \cdot w \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \cdot \cos \phi$$

$$\Rightarrow \ddot{s} = \frac{-r w^2 \cdot \cos \theta \cdot \cos^2 \phi + r \cdot w \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \phi - r \cdot w^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi + r \cdot w \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi}{\cos^2 \phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{s} = \frac{r \cdot w \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \theta - r w^2 \cdot \cos \phi \cdot (\cos \theta \cdot \cos \phi + \sin \theta \cdot \sin \phi)}{\cos^2 \phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{s} = r w \cdot \boxed{\frac{[\dot{\phi} \cdot \cos \theta - w \cdot \cos \phi \cdot \cos(\phi - \theta)]}{\cos^2 \phi}}$$

$\ddot{s} = \ddot{a}_{G_4}$  : 4. uzunun  
ağırılık  
merkezinin  
ivmesi

(3) uzunun ağırılık merkezinin konumu, hızı ve ivmesi:

$$\vec{r}_{G_3} = \vec{A_0 B} + \vec{B G_3} = s \vec{i} + ((-c) (\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j})$$

$$\vec{v}_{G_3} = \dot{\vec{r}}_{G_3} = \dot{s} \vec{i} + ((-c) (-\dot{\phi} \sin \phi \vec{i} + \dot{\phi} \cos \phi \vec{j}))$$

$$\vec{a}_{G_3} = \ddot{\vec{r}}_{G_3} = \ddot{s} \vec{i} + ((-c) (-\ddot{\phi} \sin \phi \vec{i} - \dot{\phi}^2 \cos \phi \vec{i} + \dot{\phi} \cos \phi \vec{j} - \dot{\phi}^2 \sin \phi \vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_3} = \underbrace{[\ddot{s} - ((-c) \ddot{\phi} \sin \phi - ((-c) \dot{\phi}^2 \cos \phi)) \vec{i}] \vec{i}}_{\vec{a}_{G_{3x}}} + \underbrace{[((-c) \dot{\phi} \cos \phi - ((-c) \dot{\phi}^2 \sin \phi)) \vec{j}]}_{\vec{a}_{G_{3y}}}$$

Atelet Kuvvet ve Momentleri

Uzun 2:  $\vec{a}_{G_2} = 0, \vec{\alpha}_{i2} = 0 \Rightarrow \vec{F}_2^i = 0, \vec{T}_2^i = 0$

Uzun 3:  $\vec{F}_{3x}^i = -m_3 \cdot \vec{a}_{G_{3x}}, \vec{F}_{3y}^i = -m_3 \cdot \vec{a}_{G_{3y}}$

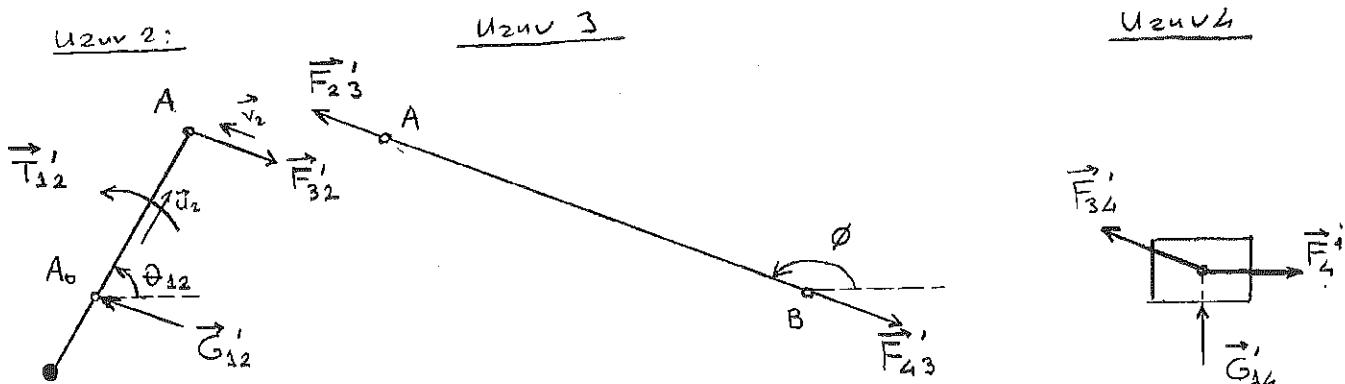
$\vec{\alpha}_{i3} = \ddot{\vec{\phi}} = \dot{\phi} \vec{k} \Rightarrow \vec{T}_3^i = -I_{G_3} \vec{\alpha}_{i3}$

Uzun 4:  $\vec{a}_{G_4} = \ddot{\vec{s}} = \ddot{s} \vec{i} \Rightarrow \vec{F}_4^i = -m_4 \vec{a}_{G_4}$

$\vec{\alpha}_{i4} = 0 \Rightarrow \vec{T}_4^i = 0$

Gözüm için superpozisyon prensibi uygulanacaktır.

İlk önce 4 uzunun atalet kuvvetini ( $\vec{F}'_4$ ) göz önüne alarak çözüm yapalım.



$$\vec{F}'_{34} = -\vec{F}'_{43} = \vec{F}'_{23} = -\vec{F}'_{32} = \vec{G}'_{12}$$

$$F'_{34} = F'_{43} = F'_{23} = F'_{32} = G'_{12} = F$$

Denge Denklemleri:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F \cdot \cos \phi + F'_4 = 0 \Rightarrow F = -\frac{F'_4}{\cos \phi}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F \cdot \sin \phi + G'_{14} = 0 \Rightarrow G'_{14} = -F \cdot \sin \phi$$

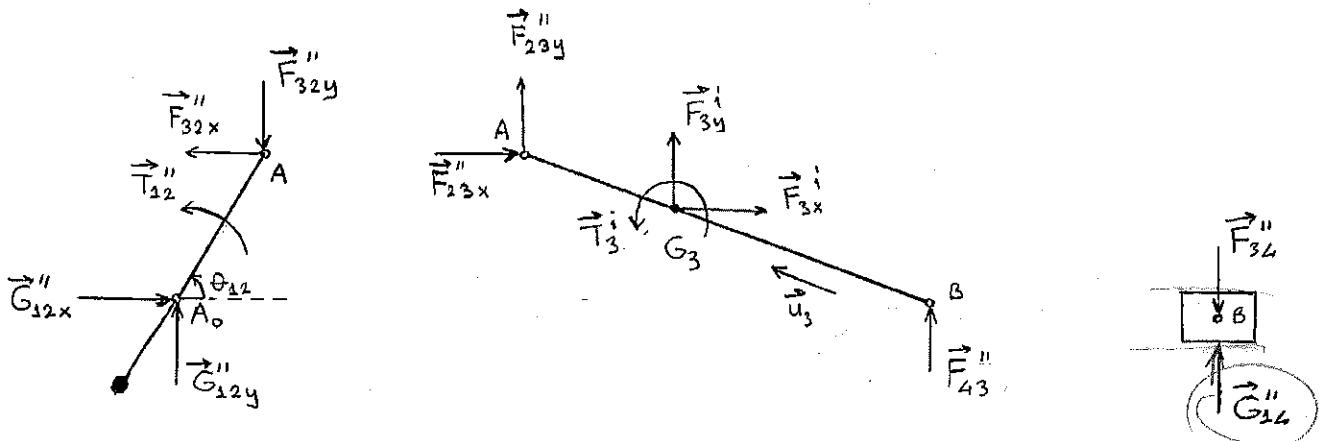
Uzun 2:

$$\sum \vec{M}_{A_0} = 0 \Rightarrow (r \vec{u}_2) \times [F(-\vec{v}_2)] + T'_{12} \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow -r \cdot F \cdot \sin(\phi - \theta) + T'_{12} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T'_{12} &= r \cdot F \cdot \sin(\phi - \theta) = -\frac{r \cdot F'_4 \cdot \sin(\phi - \theta)}{\cos \phi} \\ &= \frac{-r \cdot F'_4 \cdot (\sin \phi \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \cos \phi)}{\cos \phi} \\ &= -r \cdot F'_4 \cdot (\tan \phi \cdot \cos \theta - \sin \theta) \\ &= -F'_4 \cdot \tan \phi \left( r \cdot \cos \theta - r \cdot \frac{\sin \theta}{\tan \phi} \right) \end{aligned}$$

Şimdi 3 uzvunun otolet kuvvet ve momentini göz önüne alalım



$$\vec{F}_{34}'' = -\vec{G}_{14}'' = -\vec{F}_{43}'' \Rightarrow F_{34}'' = G_{14}'' = F_{43}'' = F_1$$

$$\vec{F}_{23x}'' = -\vec{F}_{32x}'' = \vec{G}_{32x}'' \Rightarrow F_{23x}'' = F_{32x}'' = G_{32x}'' = F_{2x}$$

$$\vec{F}_{23y}'' = -\vec{F}_{32y}'' = \vec{G}_{32y}'' \Rightarrow F_{23y}'' = F_{32y}'' = G_{32y}'' = F_{2y}$$

### Denge Denklemleri:

Uzuv 3:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{2x} + F_{3x}^i = 0 \Rightarrow F_{2x} = -F_{3x}^i \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_{3y}^i + F_{2y} = 0 \Rightarrow F_{2y} = -F_{3y}^i - F_1 \quad (2)$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow [l(-\vec{u}_3)] \times [F_1 \vec{j}] + [c(-\vec{u}_3)] \times [F_{3x}^i \vec{i}] + [c(-\vec{u}_3)] \times [F_{3y}^i \vec{j}] + T_3^i \vec{k} = \\ \Rightarrow -il \cdot F_1 \cdot \underbrace{\sin(90^\circ - \phi)}_{= \cos \phi} - c \cdot F_{3x}^i \cdot \underbrace{\sin(90^\circ - \phi)}_{= \cos \phi} - c \cdot F_{3y}^i \cdot \underbrace{\sin(90^\circ - \phi)}_{= \cos \phi} + T_3^i = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{c \cdot F_{3x}^i \cdot \sin \phi - c \cdot F_{3y}^i \cos \phi + T_3^i}{l \cos \phi} \Rightarrow (2)'de yerine yazılır ve F_{2y} bulunur$$

Uzuv 2:

$$\sum M_{A_0} = 0 \Rightarrow T_{12}'' = r (F_{2y} \cdot \cos \theta - F_{2x} \cdot \sin \theta)$$

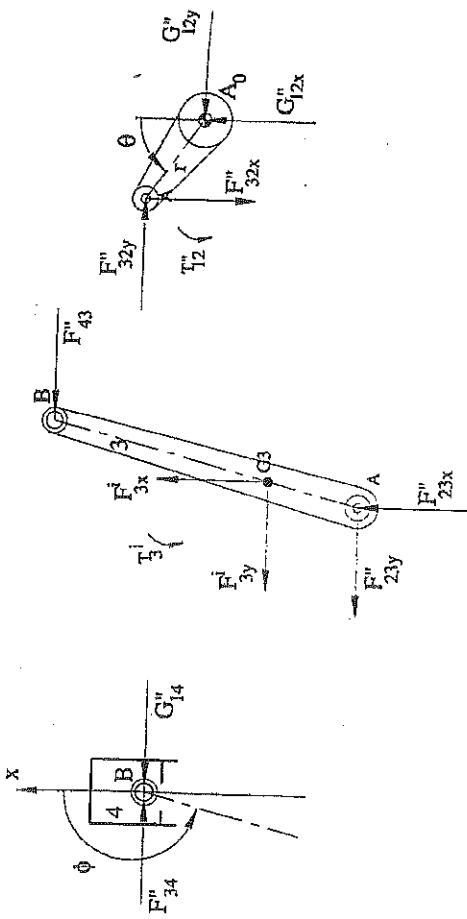
Superpozisyon Prensibi kullanılarak  $\vec{T}_{12}$  momenti bulunur

$$\vec{T}_{12} = \vec{T}_{12}' + \vec{T}_{12}''$$

## 102 DINAMİK KUVVET ANALİZİ

## DINAMİK KUVVET ANALİZİ 10:

olduğundan, her iki moment diyagramında  $T(\theta) = -T(2\pi - \theta)$  dir (ispi okuyucuya bırakılmıştır).



Şekil 1.69

$$F''_{43} = G''_{14}$$

$$F''_{23x} + F''_{3x} = 0$$

$$F''_{23y} + F''_{3y} + F''_{43} = 0$$

$$-JF''_{43} \cos \phi - cF''_{3y} \cos \phi - cF''_{3x} \sin \phi + T''_{3x} = 0$$

$$F''_{32x} = G''_{12x}$$

$$F''_{23y} = G''_{12y}$$

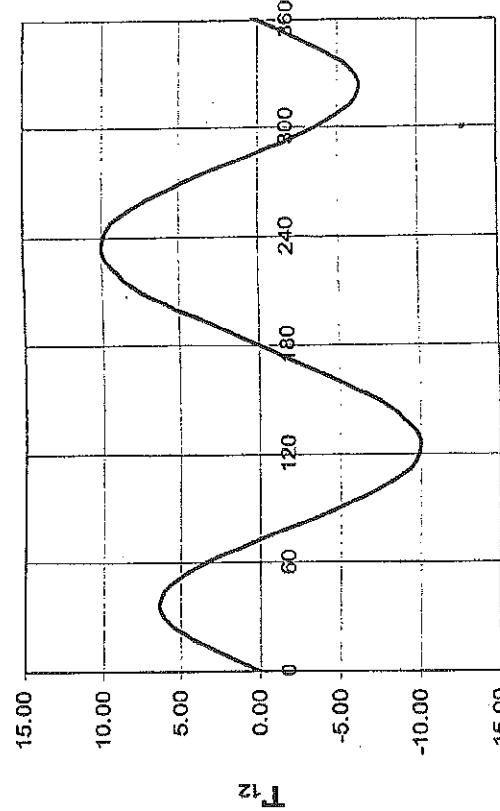
$$T''_{12} = r(F''_{23y} \cos \theta - F''_{23x} \sin \theta)$$

burada  $T''_{12}$  ve  $T''_{12}$  momentleri toplam sistemin belirtilen hızda döndmesini sağlamak için gerekli olan tariik momenti değeridir.

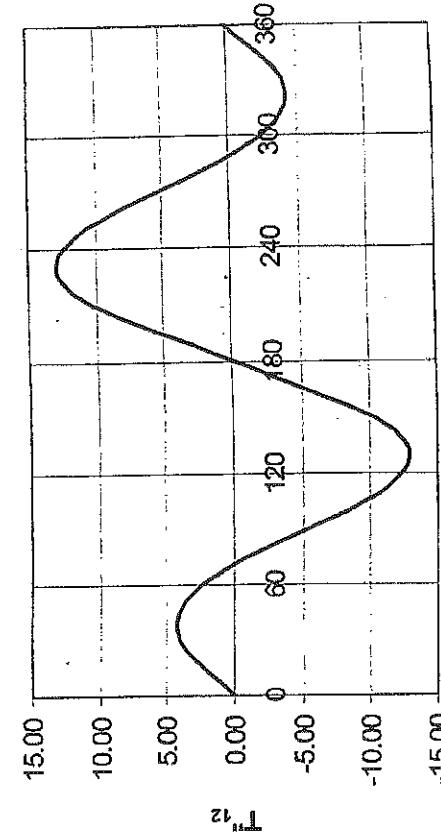
*Örnek 1.9.*

$r = 22 \text{ mm}$ ,  $l = 80 \text{ mm}$ ,  $c = 16 \text{ mm}$ ;  $m_3 = 0.300 \text{ kg}$   $m_4 = 0.355 \text{ kg}$   $I_3 = 0.0256 \text{ kgm}^2$  olan ve  $3000 \text{ devir/dakika}$  ortalamala krank hızına sahip bir krant biyel mekanizmasının atalet momentlerini bulalım.

$T''_{12}$  ve  $T''_{12}$  (N-m) moment değerleri şekil 1.70 ve 1.71 de görülmektedir.  $m_4$  kütlesinin etkisi şekilde görüldüğü gibi, daha etkendir. Moment diyagramları incelendiğinde, mekanizma x ekseni etrafında simetrik



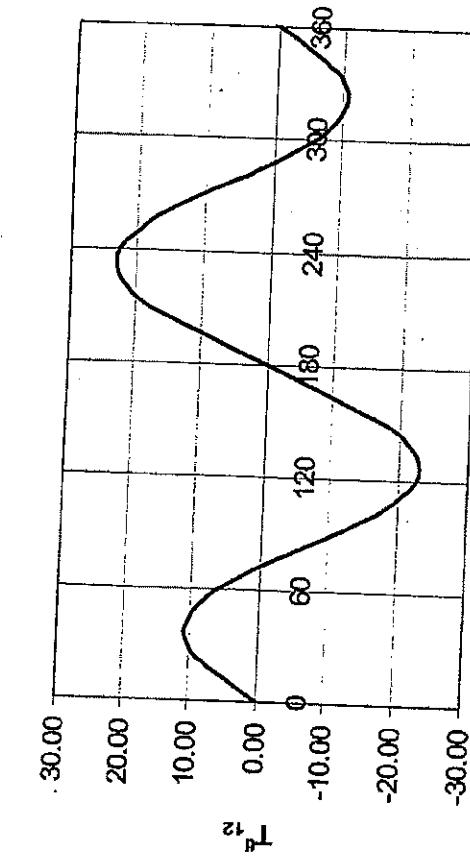
Şekil 1.70  
 $\Theta$



Şekil 1.71.  
 $\Theta$

Atalet-momentlerinden dolayı kranka etki eden eşdeğer moment  $(T_{12}^d = T_{12} + T_{12}^w)$  Sekil 1.72 de görülmektedir.

dönüşünde elde edilecektir. Dikkat edilir ise, sadece genleşme sırasında yanmış olan gazlar iş yapmaktadır.

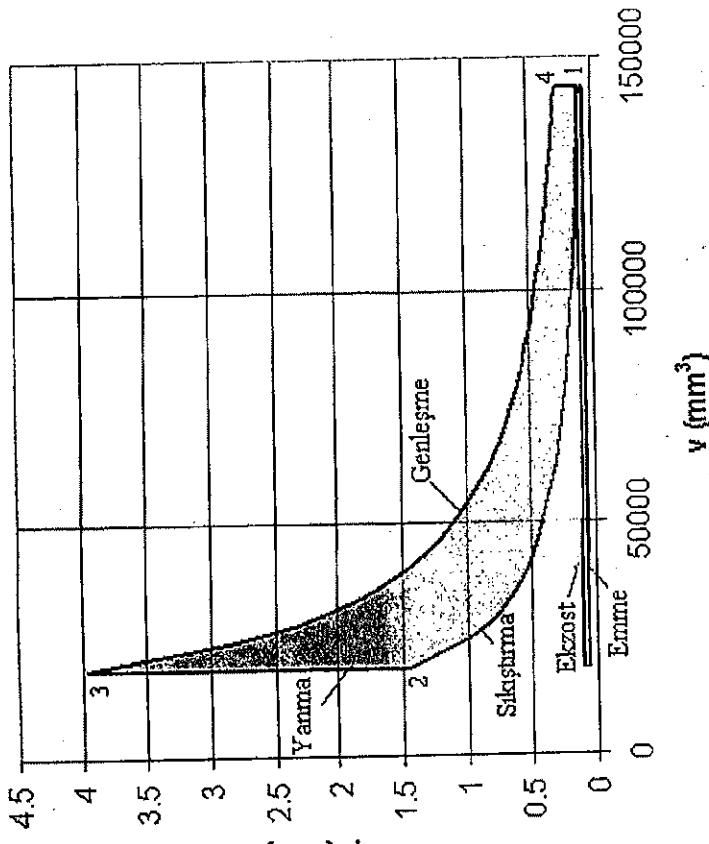


Şekil 1.72.

### ii) Gaz Kuvvetleri:

İçten yanmalı motorların asıl özgürlüğü piston üzerinde bulunan hacim içinde yanma olayının gerçekleşmesi ile oluşan kuvvettir. Deneyel olarak motor çalıştığı sırada elde edilen basınç-hacim ilişkisi grafik olarak elde edilebilir. Motor tasarım aşamasında iken basınç-hacim ilişkisinin teorik olarak belirlenmesi gerekmektedir.

Otto çevrimi için basınç-hacim eğrisi Sekil 1.73 de sematik olarak gösterilmektedir. Motor üst ölü konumdan hareket ettiğinde, atmosferik basıncın biraz altında hava emisi yapar. Alt ölü konuma geldikten sonra emme vanası kapanır ve silindir içinde bulunan hava-yakıt karışımı sıkıştırılır. Üst ölü konuma geldiğinde sıkışmış olan hava-yakıt karışımı (teorik olarak) sabit hacimde yanar ve yanma olayı ile oluşan gaz genleşerek krank üst ölü konumdan alt ölü konuma gidene kadar iş yapar. Son olarakda alt ölü konumundan üst ölü konuma kadar ekzot valfi açılarak yanmış gazlar dışarı atılır. Bir tam çevrim krankın 2 tam



Şekil 1.73.

Genleşme ve sıkıştırma politropik gaz yasasına göre:

$$p_x v_x^k = p_1 v_1^k = \text{Sabit}$$

dir.  $k$  üstel değeri gerçek sıkıştırma ve gerek genleşme sırasında 1.3 alınabilir. Uygulamada 2 ve 3 noktaları daha yuvarlanmış bir şekilde gerçekleşecektir. Bunun nedeni yanma olayı belirli bir zaman alacağı ve yanma olayının sıkıştırma sırasında piston üst ölü konuma gelmeden başlayacağıdır. Ayrıca vanaların açılması belirli zaman alacağından 1 ve 4 noktaları da yuvarlanacaktır.

$P_1$  yaklaşık olarak atmosferik basınç alınabilir ( $=0.104 \text{ MPa}$ ).  $P_4$  basınç değeri istenilen güce, mekanik verime bağlı olacak bulunabilir (bu konu bu kitabın kapsamı dışında tutulmuştur). Emme basıncı atmosferik basınçtan daha az, ekzos basıncı ise atmosferik basınçtan daha fazla olacaktır.

**Örnek 1.12.**

Örnek 1.11 de eje alınmış motor piston çapı 60 mm ve sıkıştırma oranı 7.6 olsun.

$$\text{Alan} = A = \frac{\pi D^2}{4} = 2827.43 \text{ mm}^2$$

$$\text{Süpürilen hacim} = \Delta V = 2 * r^* A = 124407 \text{ mm}^3$$

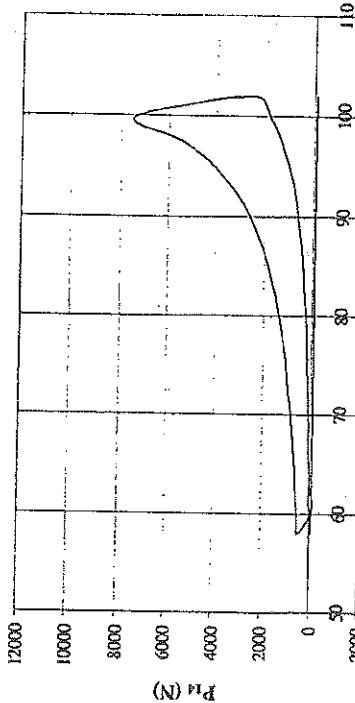
$$\text{Üst ölü konumda hacim} = \Delta V / (\text{sıkıştırma oranı}-1) = 18850 \text{ mm}^3$$

$$\text{Alt ölü konumda hacim} = 18850 + 124407 = 143257 \text{ mm}^3$$

$p_1 = 0.104 \text{ Mpa}$ ,  $p_4 = 0.283 \text{ Mpa}$ ,  $p_{\text{ekos}} = 0.120 \text{ Mpa}$ ,  $p_{\text{emme}} = 0.076 \text{ Mpa}$  olduğumuzda, Şekil 1.74 de görülen basınç-hacim eğrisi elde edilir. Basınç değerleri bize pistona eki eden  $P_{14}$  kuvvetini ( $P_{14} = pA$ ) ve hacim değerleri de piston yerdeğişimini vereceğinden ( $V = V_{\text{isit}} + (r + L - s)A$ ), veya

$s = r + L - \frac{1}{A} (V - V_{\text{isit}})$  basınç-hacim eğrisi kuvvet piston yerdeğişimini eğrisine dönüştürülebilir.

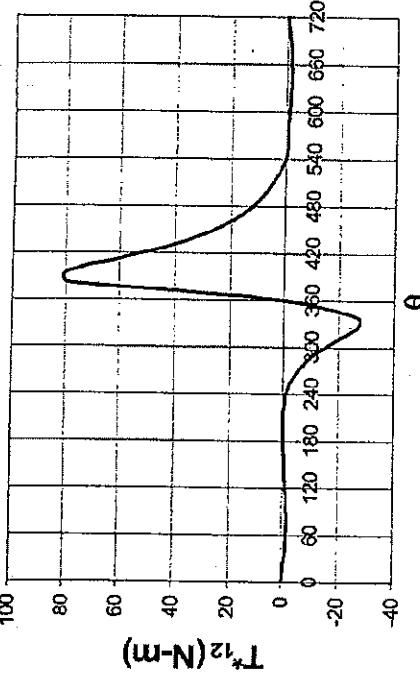
Şekil 1.74 de eje alınmış motor piston yerdeğişimi eğrisine dönüştürülmüştür.



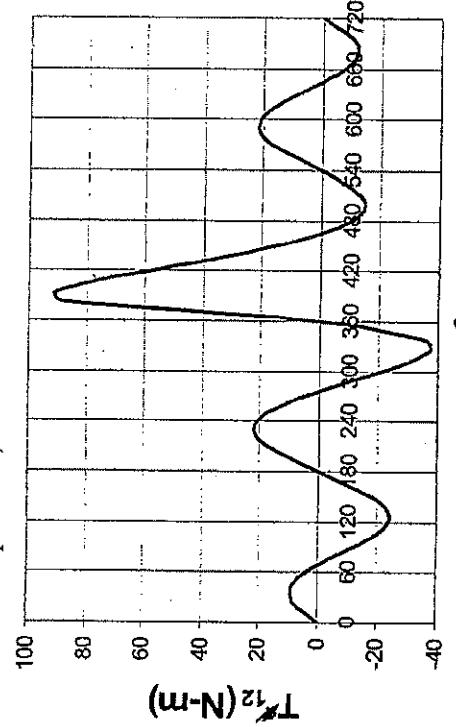
Sonuç grafik olarak Şekil 1.77 de görülmektedir. Görüldüğü gibi sadece  $360^\circ$  ile  $540^\circ$  aralığında gaz kuvvetleri pozitif moment oluşturmaktadır.

$$\text{Güç} = T_{\text{ort}} \cdot \Omega_{0\text{rt}} = 5.21 \cdot 3000 \cdot \pi / 30 = 1638 \text{ Watt olarak da bulunabilir. Şekillerde görüleceği gibi bu gücün bir çevrim içinde dağılmadığını bir seviyede degildir.}$$

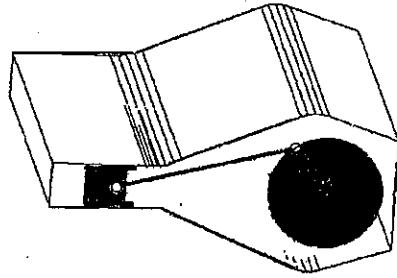
Çevrim içinde güç dağılımı düzenlemek için genellikle bir içter yanmalı motorda birkaç piston-silindir bulunmaktadır ve bu silindirler sıralı, V şeklinde dizilmiş olabilir Şekil 1.79. (Bu konu dengeleme sırasında ayrıca el alınacaktır)



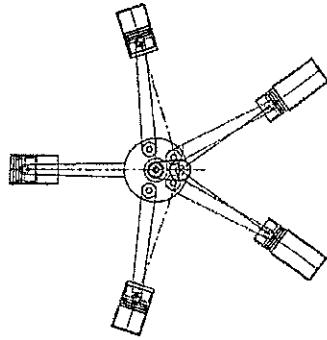
Şekil 1.77  
Toplam moment Şekil 1.78 de görülmektedir (Motorun iş yapabileceği durumlarda bu moment pozitiftir).



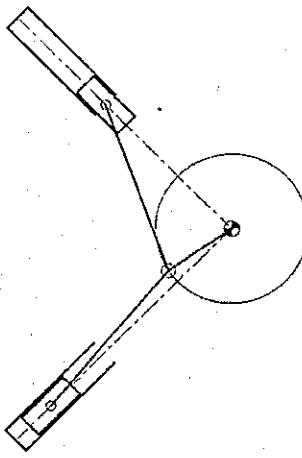
Şekil 1.78.  
Şekil 1.77 ve 1.78 de gösterilen eğrilerin altında kalan toplam alan ayndır ve bu bir çevrimde yapılan işi verecektir. Bu alan yaklaşık olarak 65.508 N·m dir. Ortalama moment:  $T_{\text{ort}} = \text{Alan}/4\pi = 5.21 \text{ N}\cdot\text{m}$  dir. Motor 3000 devir/dakika ortalama hızla döndüğü kabul edilir ise üretilen Güç =  $65.508 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{çevrim}/3000/2/60$  çevrim/saniye =  $1638 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{s} = 1.64 \text{ kW}$  dir. (aynı netice)



(a) Sıralı



(b) yıldız



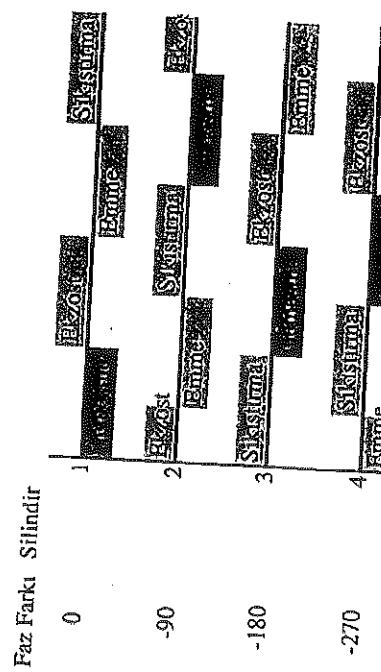
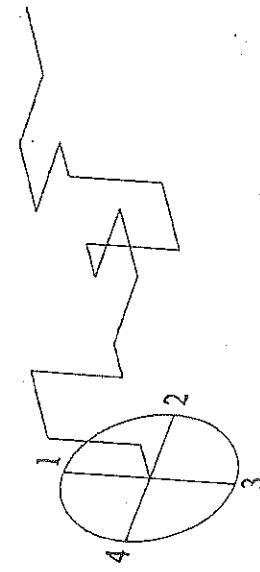
(c) V

Şekil 1.79.  
Sıralı motorlarda her bir silindir krankının birbirleri ile yaptıkları açısını olacağı gibi ateslemeye surası da farklı olacaktır. Şekil 1.80 de krank açıları  $0^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $-180^\circ$  ve  $-270^\circ$  olan dört silindirli bir motor krank mili ve ateslemeye surası görülmektedir. Ateşleme surası ve faz farkından dolayı bir çevrim

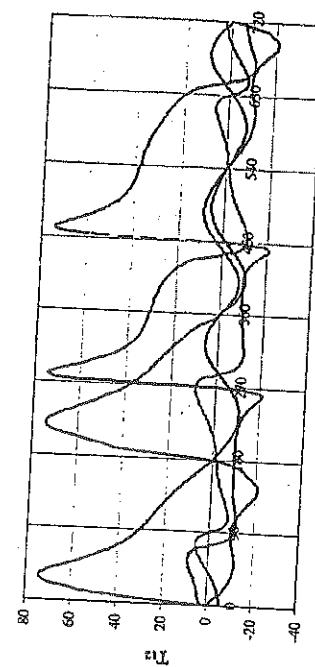
## DINAMİK KUVVET ANALİZİ

## DINAMİK KUVVET ANALİZİ 111

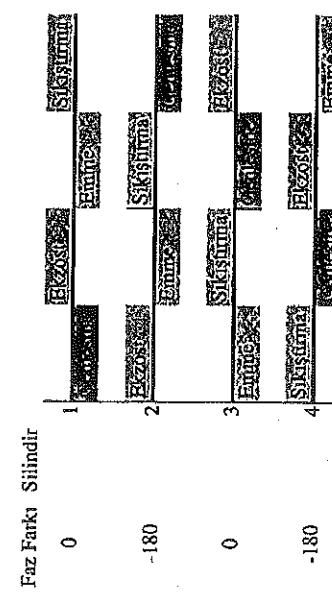
surasında her bir silindirin yaratacağı moment ayı ayrı ayrı şekil 1.81 de, Toplam moment ise şekil 1.82 de görülmektedir.



Şekil 1.80.

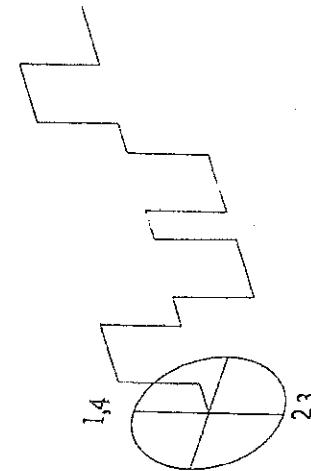


Şekil 1.81.



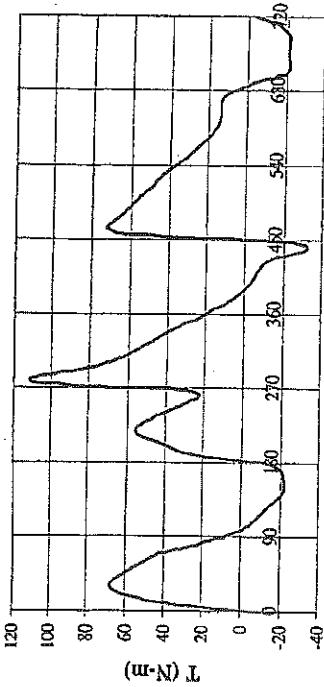
Şekil 1.83.

Şekil 1.82.  
Dört silindirli motorlarda krankun bir başka yerleştirilme şekli ise  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $-180^\circ$  ve  $0^\circ$  şeklidir. Krank şekli ve ailesine sırası Şekil 1.83 de görüldüğü gibi olacaktır. Bu durumda, moment diyagramı Şekil 1.84 de görüldüğü gibidir.



Şekil 1.82.

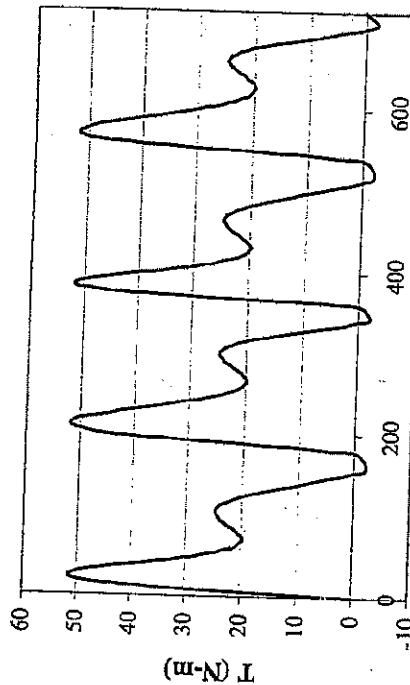
Şekil 1.82.



Şekil 1.83.  
Dört silindirli motorlarda krankun bir başka yerleştirilme şekli ise  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $-180^\circ$  ve  $0^\circ$  şeklidir. Krank şekli ve ailesine sırası Şekil 1.83 de görüldüğü gibi olacaktır. Bu durumda, moment diyagramı Şekil 1.84 de görüldüğü gibidir.

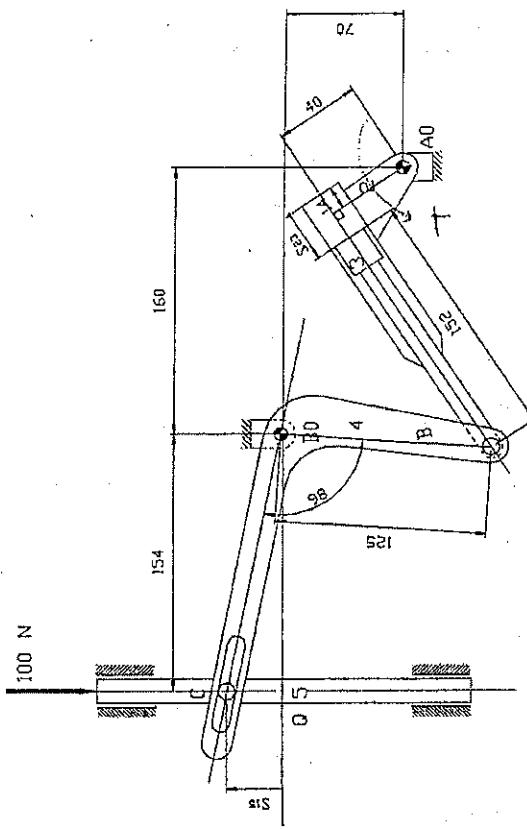
( 83 )

1. Aşağıda gösterilen (Şekil S1.1) piston tarihlilik mekanizmada 5 uzziyuna dik yönde aşağıya doğru 100N etki ediyor.  $S_{23}=30$  mm olduğunda mafsal kuvvetlerini ve piston kuvvetini belirleyin. Hiz düşüklüğü olduğundan statik kuvvet analizi yeterli görülmektedir. Sürütmenin ihmali edildiğini kabul ediyoruz. Etki eden kuvvetin şiddeti 350 N olduğumda ne olur?



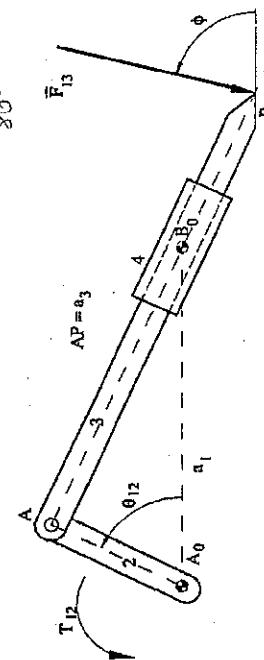
Sekil 1.84

Silindir sayısı artırılır ise, moment eğrisinin düzgünşüslüğü bir miktar azaltılabilir. Ancak içten yanmalı motorlarda moment eğrisinde bu düzgünşütük olacaktır. Düzgünşüz bir moment sabit kabul edilen hızda oynamalara neden olur. Bu durumu bir miktar azaltmak için silindir sayısını artırmaktansa volan kullanılmış daha uygundur. Bu konu dördüncü bölümde incelenecektir. Hizda oynama miktarı bir yüzdenin üzerine çikması durumunda, yukarıda belirlenmiş olan ailet kuvvetleri geçersiz olacaktır. Bu durumda üçüncü kısımda anlatılmış olan dinamik hareket analizinin yapılması gerekecektir.



Seite 51

- 2) Şekil S1.2 de gösterilen mekanizmada, eki eden  $F_{13}$  kuvveti etkisi altında oluşan mafsal kuryetlerini ve sistemi statik dengede tutmak için gerekен  $T_{12}$  momentini bulunuz. Sürtünme ve uzuv ağırlıkları ihmal edilebilir..  $a_1 = A_0B_0 = 280$ ,  $a_2 = A_0A = 118$ ,  $a_3 = 390$  mm.  $F_{13} = 500$  N,  $\theta = 120^\circ$ ,  $(\theta_{12} = 60^\circ)$



Sekil 3

## BÖLÜM 2

### Virtüel (Sanal) İş Yöntemi

#### 2.1. Giriş :

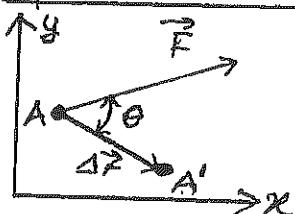
Birinci bölümde hareket özelliklerini (hız ve rumesi) her konumda bilinen bir makinanın dengede olması için gerekli olan dış kuvvet ve momentleri, bunun sonucu oluşan mafsal kuvvetlerini belirtmek için gerekli olan yöntem açıklanmıştır. Yöntem Newton Kanunu ve D'Alembert prensibine dayanmaktadır. Bu yaklaşım literatürde Vektörel Dinamik olarak da tanımlanmaktadır. Bu bölümde farklı bir yaklaşım kullanarak aynı problem çözülecektir. Bu yöntemde literatürde Analitik Dinamik denmektedir. Bu yöntemde Newton yasalarından ortaya çıkan kuvvet denge denklemleri yerine sistemin enerjisi kullanılacaktır.

Analitik dinamikte statik ve dinamik problemlerin çözümü sırasında kullanılan yöntem Virtüel (Sanal) İş Prensibi'dir. Yöntem J. L. Lagrange tarafından 1788'de yayınlanan Mécanique Analytique kitabı ile temel bilimlerde ve mühendislikte yerini almıştır. (Daha önceki yıllarda virtüel iş prensibi kısmen Bernoulli tarafından kullanılmıştır).

Dengede olan bir mekanik sistemi ele alalım. Bu sistemin başımız konum parametrelerine sonuz küçük, sanal (virtüel) bir yerdeğismi verdiğimizi düşünelim. Bu sanal yerdeğismi ile tüm uzular ve uzuvarlar üzerinde bulunan noktalar mafsalların koyduğu kısıtlamalara uygun sanal bir yerdeğism yapacaktır. Bu durumda kuvvetlerin etki noktaları da sanal olarak yer değiştirecektir. Bu sanal yerdeğism sonucu her bir kuvvetin sanal bir iş yapması söz konusudur. «Eğer sistem dengede ise, yapılan bu sanal işlerin toplamı sıfır olmalıdır.»

Virtüel iş prensibini uygulamadan önce kullanılan bazı terimleri açıklayalım.

#### İş (Mekanik İş) :



Bir noktasal cisim A dan A' noktasına kadar yerdeğiştirdiğinde cisme etki eden  $\vec{F}$  kuvvetinin yapacağı iş;

$$\Delta U = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

(73)

## BÖLÜM 2

### Virtüel (Sanal) İş Yöntemi

#### 2.1. Giriş :

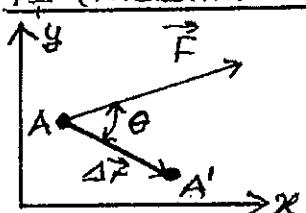
Birinci bölümde hareket özelliklerini (hız ve ivmesi) her konumda bilinen bir makinanın dengede olması için gerekli olan dış kuvvet ve momentleri, bunun sonucu oluşan mafsal kuvvetlerini belirlemek için gerekli olan yöntem açıklanmıştır. Yöntem Newton Kanunu ve D'Alambert prensibine dayanmaktadır. Bu yaklaşım literatürde Vektörel Dinamik olarak da tanımlanmaktadır. Bu bölümde farklı bir yaklaşım kullanarak aynı problem çözülecektir. Bu yönteme literatürde Analitik Dinamik denmektedir. Bu yönteminde Newton yasalarından ortaya çıkan kuvet denge denklemleri yerine sistemin enerjisi kullanılacaktır.

Analitik dinamikte statik ve dinamik problemlerin çözümü sırasında kullanılan yöntem Virtüel (Sanal) iş Prensibi'dir. Yöntem J. L. Lagrange tarafından 1788'de yayınlanan Méchanique Analytique Kitabı ile temel bilimlerde ve mühendislikte yerini almıştır. (Daha önceki yıllarda virtüel iş prensibi kısmen Bernoulli tarafından kullanılmıştır).

Dengede olan bir mekanik sistemi ele alalım. Bu sistemin boyalı konum parametrelerine sənuz küçük, sanal (virtüel) bir yerdeğismi verdiğimizi düşünelim. Bu sanal yerdeğismi ile tüm uzuvlar ve uzuvlar üzerinde bulunan noktaların mafsallarının koyduğu kısıtlamalara uygun sanal bir yerdeğism yapacaktır. Bu durumda kuvvetlerin etki noktaları da sanal olarak yer değiştirecektir. Bu sanal yerdeğism sonucu her bir kuvvetin sanal bir iş yapması söz konusudur. «Eğer sistem dengede ise, yapılan bu sanal işlerin toplamı sıfır olmalıdır.»

Virtüel iş prensibini uygulamadan önce kullanılan bazı terimleri açıklayalım.

#### İş (Mekanik İş) :



Bir noktasal cisim A dan A' noktasına kadar yerdeğiştirirken cisme etki eden  $\vec{F}$  kuvvetinin yapacağı iş ;

$$\Delta U = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

$$\dots \Delta U = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F \Delta r \cos \theta$$

(73)

$\Delta U$ , skaler bir değer olup, herhangi bir yönü yoktur. " " isaretini skaler çarpımı göstermektedir. Bu denklemlerden eğer etki eden kuvvet ile yerdeğismenin yönleri dik ise, yapılan işin sıfır olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla,

- Sürünmesiz mafsallardan mafsal kuvvetleri iş yapmaz (Bu kuvvetler yüzeye dik etki eder,  $\cos 90^\circ = 0$ ).
- Sürünmesiz kayar mafsallar iş yapmaz.
- Sürünme ile bir yüzey üzerinde kaymadan dönme iş yapmaz.

### Virtüel Yer Değişim :

Var olmayan ancak olduğunu kabul ettığınız sonsuz küçük (diferansiyel) bir yer değişimidir.

$i$  nokta cisminin virtüel yerdeğisimi  $\rightarrow \delta r_i$

$q_i$  bağımsız parametresinin virtüel yerdeğisimi  $\rightarrow \delta q_i$

$\phi_i$  bağımlı " " "  $\rightarrow \delta \phi_i$

olarak gösterilir.

### Virtüel İş :

Sistemin bir noktasına etki eden bir kuvvetin, sistemin virtüel yerdeğisimi sırasında etki noktasında oluşan virtüel yerdeğisinden dolayı yaptığı işdir. Noktanın yerdeğisini sanal olacağınınca yapılan işe sanaldır.

$\delta U = \vec{F}_i \cdot \vec{\delta r}_i$  :  $i$  noktasına uygulanan bir kuvvetin

Burada  $\vec{\delta r}_i$  :  $\vec{F}_i$  kuvvetinin uygulama noktasının virtüel yerdeğisimidir.

$$\delta U = \vec{F}_i \cdot \vec{\delta r}_i = (\vec{F}_x i + \vec{F}_y j) \cdot (\delta r_x \vec{i} + \delta r_y \vec{j}) = F_x \delta r_x + F_y \delta r_y$$

Not : Skaler çarpımda,

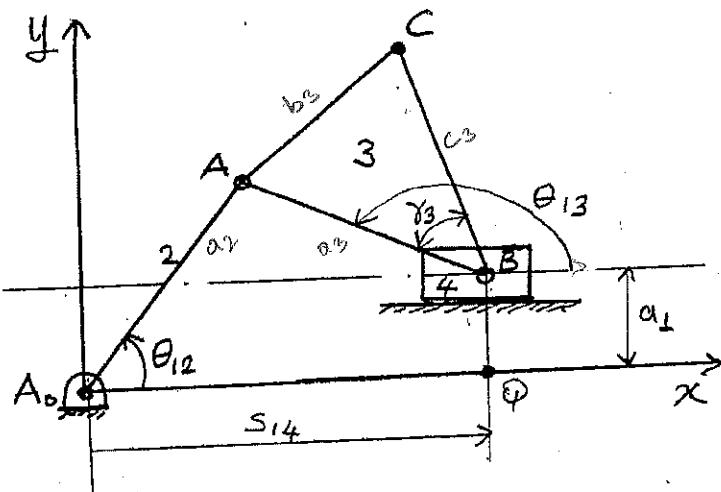
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

eşitlikleri geçerlidir.

RNEK: Bir kranc-biyel mekanizmasını ele alalım.



$$A_0 A = a_2$$

$$A B = a_3$$

$$\theta B = \theta_1$$

$$A C = b_3$$

$$B C = c_3$$

Mekanizmanın belki bir konumda  $\theta_{12}$  açısına  $\dot{\theta}_{12}$  gibi sonsuz küçük virtüel yerdeğişiminin verildiği düşünülür.

Mekanizmanın vektör devre denklemi :  $\overrightarrow{A_0 A} = \overrightarrow{A_0 \varphi} + \overrightarrow{\varphi B} + \overrightarrow{B A}$

$$a_2 e^{j\theta_{12}} = s_{14} + a_1 j + a_3 e^{j\theta_{13}} \quad \dots \quad (1)$$

$$Re: a_2 \cos \theta_{12} = s_{14} + a_3 \cos \theta_{13} \quad \dots \quad (2)$$

$$Im: a_2 \sin \theta_{12} = a_1 + a_3 \sin \theta_{13} \quad \dots \quad (3)$$

(3) nolu denklemlen,

$$\theta_{13} = \sin^{-1} \left( \frac{a_2 \sin \theta_{12} - a_1}{a_3} \right)$$

(2) nolu denklemlen,

$$s_{14} = a_2 \cos \theta_{12} - a_3 \cos \theta_{13}$$

$H_{12}$  analizi için (2) ve (3) nolu denklemlerin zamanla göre türevlerini alalım.

$$Re: -a_2 \dot{\theta}_{12} \sin \theta_{12} = \dot{s}_{14} - a_3 \dot{\theta}_{13} \sin \theta_{13} \quad \dots \quad (4)$$

$$Im: a_2 \dot{\theta}_{12} \cos \theta_{12} = a_3 \dot{\theta}_{13} \cos \theta_{13} \quad \dots \quad (5)$$

(5) nolu denklemlen,

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{a_2 \cos \theta_{12}}{a_3 \cos \theta_{13}} \cdot \dot{\theta}_{12}$$

(4) nolu denklemlen, ( $\dot{\theta}_{13}$  değerini yerine yazıp, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\dot{s}_{14} = a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} \cdot \dot{\theta}_{12}$$

$\sim L$  olur.

$\theta_{13}$  ve  $s_{14}$  değişkenlerinin sonsuz küçük değişimini  $\delta\theta_{12}$  yerdeğisīmine bağlıdır.  $H_{12}$  analizine benzeri<sup>sekilde</sup> (1) nolu denklemin diteran- siyeli alınırsa,

$$a_2 j \delta\theta_{12} e^{j\theta_{12}} = \delta s_{14} + 0 + a_3 j \delta\theta_{13} e^{j\theta_{13}} \text{ veya}$$

$$a_2 j \delta\theta_{12} e^{j\theta_{12}} = \delta s_{14} + a_3 j \delta\theta_{13} e^{j\theta_{13}} - - - - - \quad (6)$$

elde edilir.

Verilen konumda  $\theta_{12}$  değerine karşı gelen  $\theta_{13}$  ve  $s_{14}$  bilindiginden belirlibie  $\delta\theta_{12}$  değerine uygunlu  $\delta\theta_{13}$  ve  $\delta s_{14}$  virtüel yerdeğīsimler, (6) nolu denklem kullanılarak  $H_{12}$  analizinde yapılıdı̄ gibî çözüm yapılırsa,  $\delta\theta_{13}$  ve  $\delta s_{14}$  değerleri

$$\delta\theta_{13} = \frac{a_2 \cos \theta_{12}}{a_3 \cos \theta_{13}} \delta\theta_{12}$$

$$\delta s_{14} = a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} \delta\theta_{12}$$

olarak elde edilir.

Yukarıda elde edilmiş olan ilişkiler ile mekanizmanın  $H_{12}$  ana- lizi sırasında elde edilen ilişkiler dikkat edilirse aynıdır. Bu durum tüm mekanik sistemler için geçerlidir. Önemli bir fark, hizın gerçek sonsuz küçük bir yerdeğīsiminin sonsuz küçük bir zaman birimine oranı olması, virtüel yerdeğīsimin ise sanal sonsuz küçük yerdeğīsimi olmasıdır. Ayrıca, burada  $s_{14}$  bağımsız de- gīşken olarak alınabittir ve  $\delta\theta_{12}$  ile  $\delta\theta_{13}$  virtüel yerdeğīsimleri  $\delta s_{14}$  virtüel yerdeğīsim cinsinden ve konum parametreleri ile ifa- de edilebilir.

Benzer bir sekilde C noktasının konumu ve virtüel yerdeğīsimi:

$$\vec{r}_c = \vec{A}\vec{Q} + \vec{Q}\vec{B} + \vec{B}\vec{C} = s_{14} + a_1 j + c_3 e^{j(\theta_{13} - \gamma_3)} \quad \text{Ş. bit}$$

$$\delta \vec{r}_c = \delta s_{14} + j c_3 \delta\theta_{13} e^{j(\theta_{13} - \gamma_3)} = \cos(\theta_{13} - \gamma_3) + j \sin(\theta_{13} - \gamma_3)$$

C noktasının x ve y yönlerinde virtüel yerdeğīsimi:

$$\delta x_c = \delta s_{14} - c_3 \sin(\theta_{13} - \gamma_3) \delta\theta_{13}$$

$$\delta y_c = c_3 \cos(\theta_{13} - \gamma_3) \delta\theta_{13}$$

olarak ~~bulunur.~~ bulunur.

Eğer C noktasında  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$  gibi bir kuvvet etki ettiğinin düşünülebilirse, bu kuvvetin yapacağı virtüel iş

$$\delta U = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_c = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) \cdot (\delta x_c \vec{i} + \delta y_c \vec{j}) \\ = F_x \delta x_c + F_y \delta y_c$$

Bu virtüel işin bağımsız değişkenin virtüel yerdeğişimi  $\delta \theta_{12}$  cinsinden yazılırsa;

$$\delta U = F_x [\delta s_{14} - c_3 \sin(\theta_{13} - \gamma_3) \delta \theta_{13}] + F_y [c_3 \cos(\theta_{13} - \gamma_3) \delta \theta_{13}]$$

$\delta s_{14}$  ve  $\delta \theta_{13}$  değerleri yerine konursa,

$$\delta U = \frac{1}{\cos \theta_{13}} \left\{ F_x \left[ a_2 \sin(\theta_{13} - \theta_{12}) - \frac{a_2 c_3}{a_3} \sin(\theta_{13} - \gamma_3) \cos \theta_{12} \right] + F_y \frac{a_2 c_3}{a_3} \cos(\theta_{13} - \gamma_3) \cos \theta_{12} \right\} \delta \theta_{12}$$

⇒  $\delta U = \varphi \delta \theta_{12}$

Gördüğü gibi virtüel iş, kuvvetin, konumun ve virtüel yerdeğişiminin fonksiyonudur.

## 2.2. VIRTÜEL İŞ YÖNTEMİ İLE STATİK KUVVET ANALİZİ

Birbirlerine mafsal noktalarında bağlanmış rıgit cisimler sistemi düşünelim. Bir rıgit cisim içindeki i nokta cismini göz önüne alalım.

$\vec{F}_i \rightarrow$  i nokta cismine etki eden tüm kuvvetlerin toplamı statik denge için :  $\sum \vec{F}_i = 0$

Eğer bu nokta cisme virtüel bir yerdeğiştirme,  $\delta \vec{r}_i$  verilirse,  $\vec{F}_i$  kuvveti tarafından yapılan virtüel iş de sıfır olacaktır.

$$\delta U_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$\vec{F}_i$  kuvveti aşağıdaki kısımlara ayrılabilir :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^d + \vec{F}_i^r$$

Burada,

$\vec{F}_i^e \rightarrow$  Dış kuvvetlerin bileskesini, ( $\vec{F}_i^d$  olarak da gösterilebilir)

$\vec{F}_i^s \rightarrow$  Aynı rigid cisim içindeki diğer nokta cisimlerden gelen iş kuvvetlerin bileskesini,

$\vec{F}_i^d \rightarrow$  (Eğer nokta cisim mafsal temas noktasında ise) Diğer hareket eden rigid cisimlerden gelen mafsal kuvvetlerin bileskesini,

$\vec{F}_i^r \rightarrow$  (Eğer nokta cisim, sabit bir cisimle temas halinde ise) sabit cisimle temasdan dolayı oluşan normal tepki kuvvetini göstermektedir.

Rigid cisim sistemi içindeki bütün nokta cisimlerin toplamı alınır ise,

$$\sum_i \delta \mathbf{U}_i = \sum_i (\vec{F}_i^e + \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^d + \vec{F}_i^r) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$= \sum_i \vec{F}_i^e \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^s \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^d \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^r \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Sistemde bulunan cisimler ve cisimler üzerinde bulunan noktalar sisteminin kinematik sınırlamalar ile uyumlu virtüel yerdeğişime ugrayacakları varsayılar ise,

$$\sum_i \vec{F}_i^s \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \rightarrow \text{Rigid cisim olduğundan dolayı}$$

$\sum_i \vec{F}_i^d \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \rightarrow$  Birbirleriyle temas halindeki nokta cisimler esit ve ters yönde tepki kuvvetlerine maruz kalırlar ve aynı sanal yerdeğistirmeye sahiptirler.

$\sum_i \vec{F}_i^r \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \rightarrow$  Sürünmesiz temas noktalarında veya kaymadan döme durumunda (Eğer sürünme var ise, sürünme kuvveti dış kuvvetler içine,  $\vec{F}_i^e$  ye eklenebilir).

Sonuç olarak (A) denkleminde aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^d \cdot \delta \vec{r}_i = 0}$$

Rigid cisimlerden oluşan ve ideal sınırlamalara maruz kalan bir mekanik sistemin statik dengesi için gerekli ve yeterli şart, "Bütün dış kuvvetler tarafından sanal yerdeğiştirmeler sonucu yapılan sanal işlerin toplamının sıfır olmasıdır."

\* Bağımsız sanal yerdeğiştirmelerin sayısı, mekanizmanın serbestlik derecesine eşittir.

Eğer rigid cisimler üzerine etkiyen dış momentler mevcut ise  $\sum_i \vec{T}_i^{\text{dis}} \cdot \delta\vec{\theta}_i = 0$  olacaktır.

Burada  $\delta\vec{\theta}_i \rightarrow$  cismin virtüel açısal yerdeğiştirmesini göstermektedir.

Sonuç olarak elde edilen denklem;

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{dis}} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{T}_i^{\text{dis}} \cdot \delta\vec{\theta}_i = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

yazılır. Bu denklende,

$\vec{r}_i \rightarrow \vec{F}_i^{\text{dis}}$  kuvvetinin uygulama noktasının pozisyon vektörü  
 $\delta\vec{r}_i \rightarrow \vec{F}_i^{\text{dis}}$  " " " " " sanal yerdeğişimi

$\vec{\theta}_i \rightarrow$  Üzerine  $\vec{T}_i^{\text{dis}}$  momenti etki eden cisimin açısal pozisyonu

$\delta\vec{\theta}_i \rightarrow$  Sanal açısal yerdeğişimi

•  $\rightarrow$  Skaler çarpımı

göstermektedir.  
m: Mekanik sistemin serbestlik derecesi olsun.

"m" tane pozisyon değişkeni tanımlarsak, bütün sistemin pozisyonunu belirlemiş oluruz. Seçilen herhangi "m" adet pozisyon değişkeni sistemin GENELLEŞTİRİLMİŞ KOORDİNALARI olarak adlandırılır. Bunları  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$  olarak adlandıralım.

•  $\delta\vec{r}_i$  ve  $\delta\vec{\theta}_i$ 'yi bulmak için ilk önce  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$  cinsinden  $\vec{r}_i$  ve  $\vec{\theta}_i$  yazılır.

$$\vec{r}_i = \vec{f}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\vec{\theta}_i = \vec{h}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n) \quad \dots \dots \dots (3)$$

Burada  $Q_i$ 'ler, genelleştirilmiş koordinatlar haricindeki diğer pozisyon (konum) değişkenlerini göstermektedir.  $Q_i$ 'ler  $q_i$ 'lere devre kapatılık denklemleriyle bağımlıdır.

•  $\delta \vec{r}_i$  ve  $\delta \vec{\theta}_i$ 'yi bulmak için (2) ve (3) denklemlerinin tam diferansiyeli (Total Derivative) alınırsa, ( $\delta x$ ,  $dx$ 'e benzerdir)

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial q_m} \delta q_m + \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \phi_2} \delta \phi_2 + \dots + \frac{\partial \vec{f}_i}{\partial \phi_n} \delta \phi_n \quad (4)$$

$$\delta \vec{\theta}_i = \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial q_m} \delta q_m + \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial \phi_2} \delta \phi_2 + \dots + \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial \phi_n} \delta \phi_n \quad (5)$$

$\phi_i$ 'leri  $q_i$ 'ler ile ilişkilendiren denklemlerde (devre kapatılık denklemleri) tam diferansiyeli alındığında ortaya çıkan lineer denklem faktör  $\delta \phi_i$  için şöyledir ise;

$$\begin{aligned} \delta \phi_i &= g_{i1}(q_1, q_2, \dots, q_m, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \delta q_1 + g_{i2}(q_1, q_2, \dots, q_m, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \\ &\quad + \dots + g_{im}(q_1, q_2, \dots, q_m, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \delta q_m \end{aligned} \quad (6)$$

(6) nolu denklem, (4) ve (5) denklemlerinde yerine yazılığında elde edilen denklemler (1) nolu virtüel iş denkleminde yerine yazılığında,

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m = 0 \quad (7)$$

elde edilir. Bu denklemde  $Q_i$ ,  $\vec{F}_i^e$ ,  $\vec{T}_i^e$  ve pozisyon değişkenlerinin bir fonksiyonudur, ve GENELLEŞTİRİLMİŞ KUVVET olarak adlandırılır.

$\delta q_i$ 'ler bağımsız değişken olduklarıdan, (7) nolu denklemin çözümü,

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ \vdots \\ Q_m = 0 \end{array} \right\} \text{"m" denklem, "m" bilinmeyen için çözüm yapılır.}$$

Diğer bir ifadeye göre virtüel güç cinsindendir. Virtüel iş denklemini tekrar ele alalım:

$$\delta U = \sum_i \vec{F}_i^{\text{dis}} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{T}_i^{\text{dis}} \cdot \delta \vec{\theta}_i = 0$$

Virtüel yerdeğiştirmelerin  $\delta t$  gibi virtüel zaman aralığında olacağı düşünülürse;

$$\frac{\delta U}{\delta t} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{dis}} \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t} + \sum_i \vec{T}_i^{\text{dis}} \cdot \frac{\delta \vec{\theta}_i}{\delta t} = 0$$

veya

$$\delta P = \sum_i \vec{F}_i^{\text{dis}} \cdot \vec{V}_i + \sum_i \vec{T}_i^{\text{dis}} \cdot \vec{W}_i = 0 \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir.

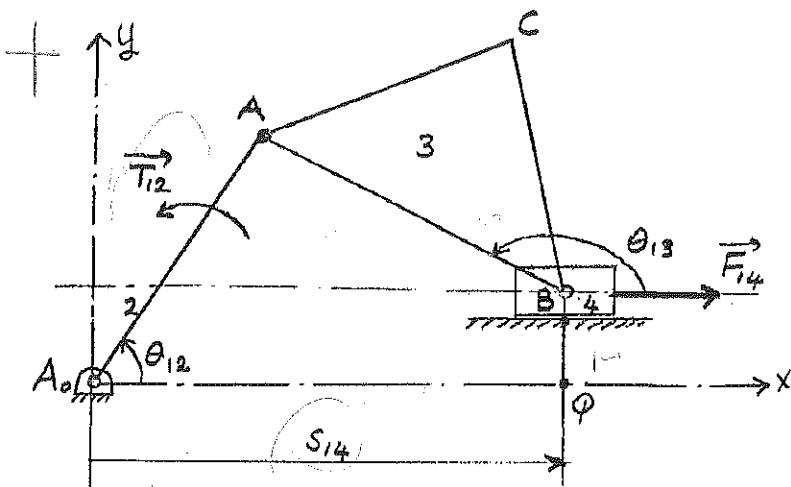
(8) nolu denklemde,  $\delta P$  virtüel gücü,  $\vec{V}_i$ ,  $\vec{F}_i^{\text{dis}}$  kuvvetinin etki ettiğii noktanın <sup>virtüel</sup> hızını ve  $\vec{W}_i$ ,  $\vec{T}_i^{\text{dis}}$  momentinin etki ettiğii uzun virtüel açısal hızını göstermektedir. Bağımsız virtüel hız değeri herhangi bir değer (örneğin 1 birim) alınarak diğer hız değerleri buna göre bulunabilir.

Virtüel iş prensibi ile yapılacak olan statik kuvvet analizi, hız analizinden sonra sadece skaler çarpımların bulunmasını gerektirecektir.

✓

♂

ÖRNEK :



$$\begin{aligned}|QB| &= a_1 \\ |A_0A| &= a_2 \\ |AB| &= a_3 \\ |AC| &= b_3 \\ |CB| &= c_3 \\ |A_0Q| &= s_{14}\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{14} = F_{14} N \angle^{\circ}$$

Sekilde gösterilen kranc-biyel mekanizmasında 4 uzvuna  $\vec{F}_{14}$  kuvveti ve 2 uzvuna  $\vec{T}_{12}$  giriş momenti etki etmektedir. Mekanizmanın statik dengede kalabilmesi için 2 uzvuna uygulanması gereken  $\vec{T}_{12}$  momentini Virtüel iş prensibini kullanarak hesaplayınız.

Cözüm :

Boğm<sup>m</sup> Konum (pozisyon) değişken sayısı,  $M = 1$  (Mekanizmanın konumunu belirtmek için gerekli bağımsız parametre sayısı)

Genelleştirilmiş koordinat,  $q = \theta_{12}$ ; (Bağımsız konum değişkeni)

Dış Kuvvetler :  $\vec{F}_{14}$  ve  $\vec{T}_{12}$

Virtüel iş prensibine göre;

$$\delta U = \vec{F}_{14} \cdot \delta \vec{r}_{14} + \vec{T}_{12} \cdot \delta \vec{\theta}_{12} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

$\vec{F}_{14}$  kuvveti rigid cisim tanımından B noktasına kaydırılabilir. O halde,

$$\vec{r}_{14} = \vec{r}_B = \vec{s}_{14} i + \vec{a}_{1j}$$

$$\delta \vec{r}_{14} = \delta \vec{s}_{14} i + \vec{0} \cdot \vec{j} = \delta \vec{s}_{14} i$$

ve daha önceden  $\vec{s}_{14} = a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} \vec{\theta}_{12}$  olarak elde edilmiştir.

$$\delta \vec{s}_{14} = a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} \delta \vec{\theta}_{12} \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$\Rightarrow \delta \vec{r}_{14} = a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} \delta \vec{\theta}_{12} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\delta \vec{\theta}_{12} = \delta \theta_{12} \vec{k}, \quad \vec{T}_{12} = T_{12} \vec{i}, \quad \vec{F}_{14} = F_{14} \vec{i} \quad \dots \quad (3)$$

(2) ve (3) nolu denklemler (1)'de yerine yazılırsa,

$$F_{14} \vec{i} \cdot \left( a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} \delta \theta_{12} \right) \vec{i} + T_{12} \vec{k} \cdot \delta \theta_{12} \vec{k} = 0$$

ve skaler çarpım yapılırsa,

$$F_{14} a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} \delta \theta_{12} + T_{12} \delta \theta_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \left[ F_{14} a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} + T_{12} \right] \delta \theta_{12} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$\textcircled{Q}$ : Genelleştirilmiş kuvvet

(4) nolu denkleme aksiyal yerdeğisini  $\delta \theta_{12}$  sanal olsa bile, dahi önceden belirtildiği gibi bu virtüel iş sırasında sıfır değildir. Bu durumda denklemi sağlanabilmesi için  $\textcircled{Q}=0$  olmalıdır.

Yani,

$$F_{14} a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}} + T_{12} = \textcircled{Q}$$

$$\Rightarrow T_{12} = - F_{14} a_2 \frac{\sin(\theta_{13} - \theta_{12})}{\cos \theta_{13}}$$

olarak elde edilir. Bu giriş momenti,  $\vec{T}_{12}$ , sistemin dengede kalabilmesi için 2. uavuz uygulanması gereken moment (tork) değeridir.

SEBD

Güçün Yolunu Sezgili Derin Subada İni'yi Kını Aşamaya

Cesurğun Vahşi Hala Bente Asistanı Kınısmaya

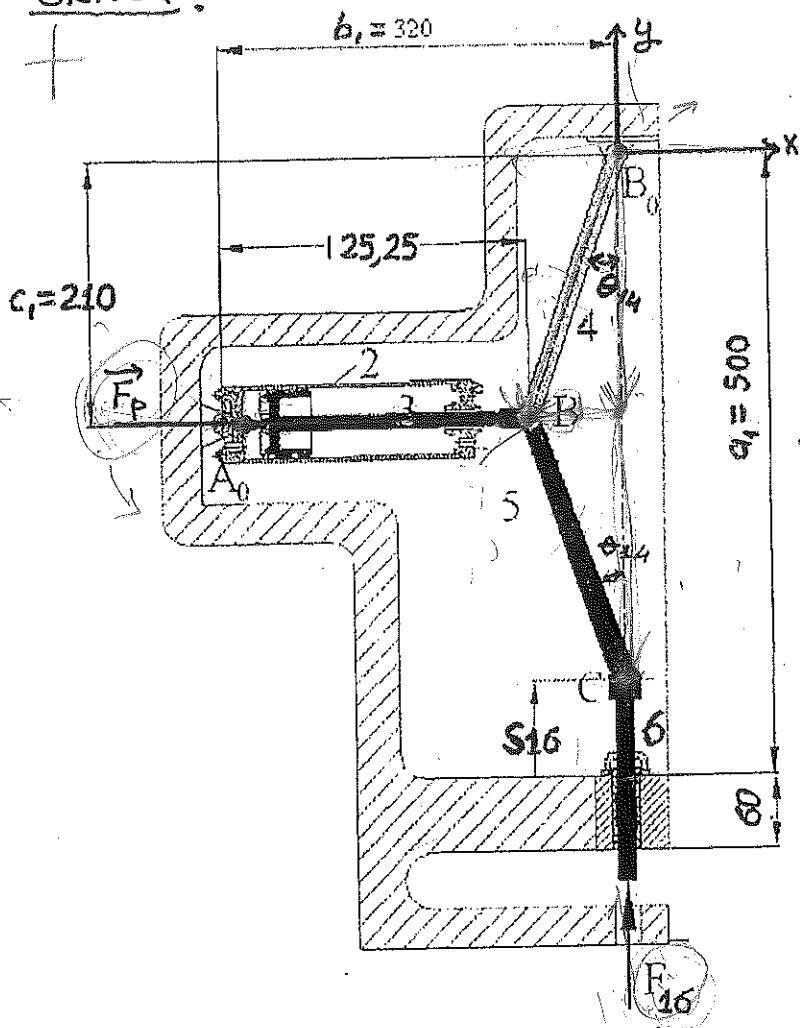
Sit Bostanı Bostanık Gereş: Bostan

Hıjeli Sıhutemek

Sit Bostanı Bostanık Uzunkı Pembe

Horseyi Chuknak

ÖRNEK :



Şekilde gösterilen prismatic pres  $\vec{F}_{16}$  ve pisten kuvveti  $(\vec{F}_p)$  ile dengedir. Sistemin statik dengede kalabilmesi için pisten kuvvetini  $(\vec{F}_p)$  virtüel iş prensibini kullanarak bulunuz.

$$|B_0B_1| = a_4 = 224 \text{ mm}$$

$$|B_1C_1| = a_5 = 224 \text{ mm}$$

$$\vec{F}_{16} = F_{16} N \angle 90^\circ$$

GÖZLEŞİM:

$$m=1 \quad 2a_4 \cos \theta_{14}$$

$$q = \theta_{14}$$

Dış Kuvvetler  $\rightarrow \vec{F}_{16}$  ve  $\vec{F}_p$

Rigid cisim tanımından  $\vec{F}_p$  kuvvetinin E naktasına,  $\vec{F}_{16}$  kuvvetinin C naktasına uygulanadığını düşünürebiliriz.

Virtüel (Sanal) iş prensibine göre,

$$\delta U = \vec{F}_p \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{F}_{16} \cdot \delta \vec{r}_C = 0 \quad (1)$$

$$\vec{r}_B = -a_4 \sin \theta_{14} \vec{i} - a_4 \cos \theta_{14} \vec{j} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \delta \vec{r}_B = -a_4 \cos \theta_{14} \delta \theta_{14} \vec{i} + a_4 \sin \theta_{14} \delta \theta_{14} \vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{r}_C = -(a_4 \cos \theta_{14} + a_5 \cos \theta_{14}) \vec{j} \quad (a_4 = a_5 \text{ olduğundan})$$

$$\vec{r}_C = -2a_4 \cos \theta_{14} \vec{j} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \delta \vec{r}_C = 2a_4 \sin \theta_{14} \delta \theta_{14} \vec{j} \quad (4)$$

$$\vec{F}_p = F_p \vec{i}, \quad \vec{F}_{16} = F_{16} \vec{j}$$

(2), (3) ve (4) nolu denklemler (1) de yerine yazılır ve istekler şartın yapılmırsa,

$$F_p \vec{i} \cdot (-a_4 \cos \theta_{14} \delta \theta_{14} \vec{i} + a_4 \sin \theta_{14} \delta \theta_{14} \vec{j}) + F_{16} \vec{j} \cdot (2a_4 \sin \theta_{14} \delta \theta_{14} \vec{j}) = 0$$

$$-F_p a_4 \cos \theta_{14} \delta \theta_{14} + 2F_{16} a_4 \sin \theta_{14} \delta \theta_{14} = 0$$

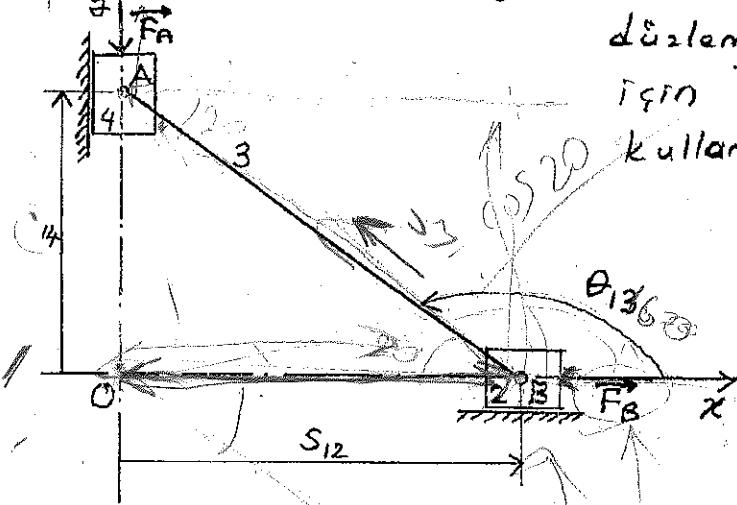
$$[2F_{16} a_4 \sin \theta_{14} - F_p a_4 \cos \theta_{14}] \delta \theta_{14} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

(5) nolu denkleme  $\delta \theta_{14}$  sıfır olmayacağından,

$$2F_{16} a_4 \sin \theta_{14} - F_p a_4 \cos \theta_{14} = 0$$

$$\Rightarrow F_p = 2F_{16} \frac{\sin \theta_{14}}{\cos \theta_{14}} \Rightarrow F_p = 2F_{16} \tan \theta_{14}$$

**ÖRNEK:** Şekilde gösterilen mekanizma sürtünmesiz yatay bir düzlemede statik dengede kalabilmesi için  $\vec{F}_B$  kuvvetini Virtüel iş prensibini kullanarak hesaplayınız.



$$|AB| = l,$$

$$\vec{F}_A = \vec{F}_A \angle 270^\circ \text{ olarak verilmiştir.}$$

$$\cos \theta_{13}$$

**ÇÖZÜM:** Mekanizmanın serbestlik derecesi 1 olduğundan bağımsız parametre olarak  $\theta_{13}$ 'ü alalım. Sisteme sadece  $\vec{F}_A$  ve  $\vec{F}_B$  dış kuvvetler etki etmektedir. Bu durumda Virtüel (Sonal) iş denklemi

$$\vec{F}_A \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F}_B \cdot \delta \vec{r}_B = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\vec{r}_A = l \sin \theta_{13} \vec{j} \quad (\theta_{13}, \theta_{14})$$



$$\Rightarrow \delta \vec{r}_A = l \cos \theta_{13} \delta \theta_{13} \vec{j} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\vec{r}_B = l \cos \theta_{13} \vec{i} \quad (\theta_{13}, \theta_{14})$$

$$\Rightarrow \delta \vec{r}_B = l \sin \theta_{13} \delta \theta_{13} \vec{i} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_A \vec{j}, \quad \vec{F}_B = -\vec{F}_B \vec{i} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

(2), (3) ve (4) nolu denklemler (1) nolu denklemde yerine yazılır ve skaler çarpım yapılırsa :

$$(-F_A \vec{j}) \cdot (\ell \cos \theta_{13} \delta \theta_{13} \vec{j}) + (-F_B \vec{i}) \cdot (\ell \sin \theta_{13} \delta \theta_{13} \vec{i}) = 0$$

$$-F_A \ell \cos \theta_{13} \delta \theta_{13} - F_B \ell \sin \theta_{13} \delta \theta_{13} = 0$$

$$[-F_A \ell \cos \theta_{13} - F_B \ell \sin \theta_{13}] \delta \theta_{13} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

elde edilir. (5) nolu denklemde  $\delta \theta_{13}$  sıfır olamayacağından,

$$-F_A \ell \cos \theta_{13} - F_B \ell \sin \theta_{13} = 0$$

$$\Rightarrow F_B = -F_A \frac{\cos \theta_{13}}{\sin \theta_{13}} \Rightarrow$$

$$F_B = -F_A \cot \theta_{13}$$

olarak bulunur.

**ÖRNEK :** Aşağıdaki şekilde verilen mekanizmanın statik dengedeki durumunda yay kuvvetini hesaplayınız.

**CÖZÜM :** Sistemin serbest cisim görüntüsü aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

Yay rigit bir eleman değildir. Kütlesinin olmadığı düşünülüp, yay sadece sisteme etki eden bir yay kuvveti olarak düşünülebilir.

Mekanizmanın serbestlik derecesi = 1 ( $m=1$ )

Bağımsız değişken =  $\varphi = \theta$  olarak alınınsın.

Dış kuvvetler  $\rightarrow \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_y$  ve  $\vec{T}$

Virtüel iş prensibine göre,

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{F}_y \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{T} \cdot \delta \vec{\theta} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

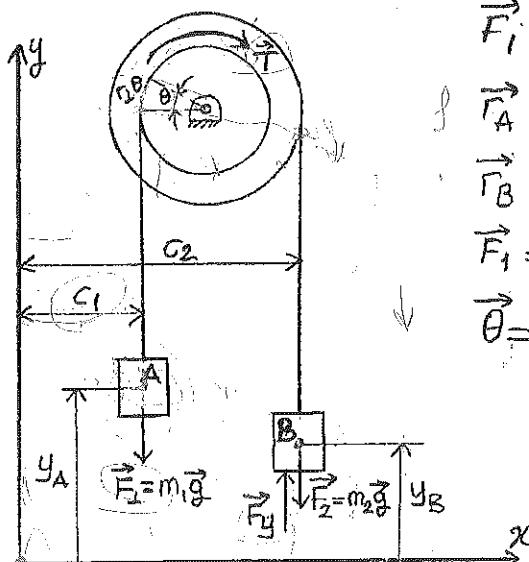
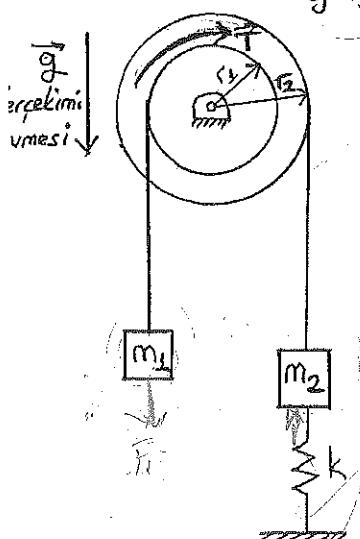
$$\delta \vec{r}_A = C_1 \vec{i} + Y_A \vec{j} \quad \text{ve} \quad Y_A = Y_{A_{IK}} + C_1 \theta \Rightarrow \delta \vec{r}_A = r_1 \delta \theta \vec{j} \quad \text{XIX-unutulmaz}$$

$$\delta \vec{r}_B = C_2 \vec{i} + Y_B \vec{j} \quad \text{ve} \quad Y_B = Y_{B_{IK}} - C_2 \theta \Rightarrow \delta \vec{r}_B = -r_2 \delta \theta \vec{j} \quad (3)$$

$$\vec{F}_1 = -m_1 g \vec{j}, \vec{F}_2 = -m_2 g \vec{j}, \vec{F}_y = F_y \vec{j}, \vec{T} = -T \vec{k} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\vec{\theta} = -\theta \vec{k} \Rightarrow \delta \vec{\theta} = -\delta \theta \vec{k} \quad \dots \dots \dots (5)$$

(2), (3), (4) ve (5) nolu denklemlerde verilen ifadeler (1) nolu denklemde yerine yazılırs



$$(-m_1 g \vec{j}) \cdot (r_1 \delta \theta \vec{j}) + (-m_2 g \vec{j}) \cdot (-r_2 \delta \theta \vec{j}) + (F_y \vec{j}) \cdot (-r_2 \delta \theta \vec{j}) + (-T \vec{k}) \cdot (-\delta \theta \vec{k}) = 0$$

$$-m_1 g r_1 \delta \theta + m_2 g r_2 \delta \theta - F_y r_2 \delta \theta + T \delta \theta = 0$$

$$[-m_1 g r_1 + m_2 g r_2 - F_y r_2 + T] \delta \theta = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

(6) nolu denklemde  $\delta \theta$  sıfır olmayacağından, parantezin içindeki ifade sıfıra eşit olmalıdır.

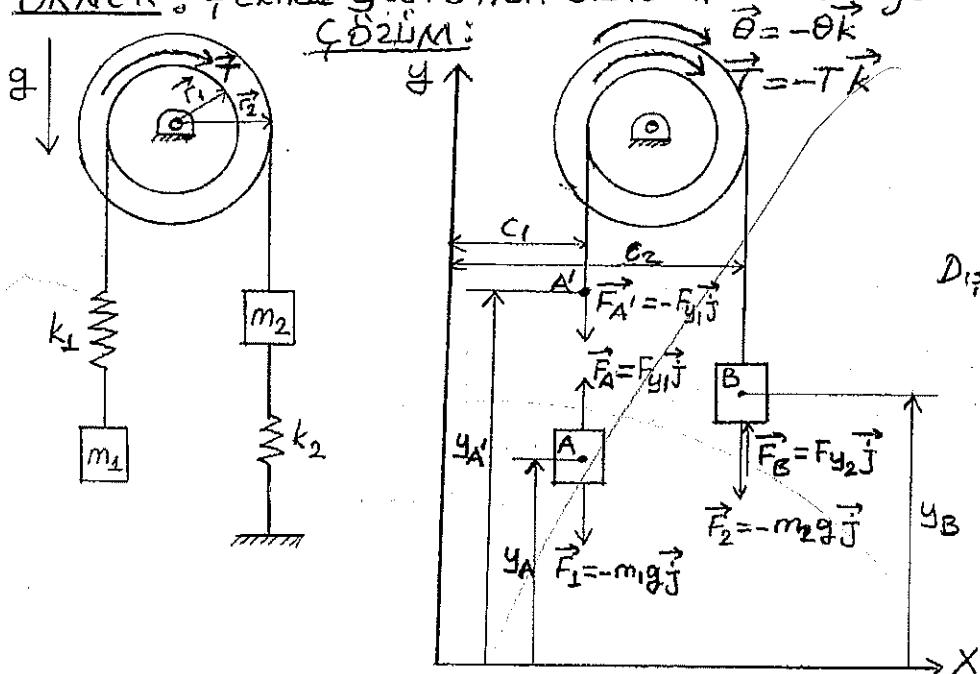
$$-m_1 g r_1 + m_2 g r_2 - F_y r_2 + T = 0$$

$$\Rightarrow F_y = \frac{1}{r_2} (T - m_1 g r_1 + m_2 g r_2) \quad \checkmark$$

olarak yay kuvveti hesaplanır.

ÖRNEK: Şekilde gösterilen sistemin statik denge durumunda yay kuvvetlerini hesaplayınız

CÖZÜM:



$$m=2$$

$$q_1 = \theta$$

$$q_2 = y_A$$

$$Diz Kuvvetleri \rightarrow \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_A, \vec{F}_{A'}, \vec{F}_{B'}, \vec{T}$$

Virtüel iş prensibine göre,

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F}_A \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F}_{A'} \cdot \delta \vec{r}_{A'} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{F}_B \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{T} \cdot \delta \vec{\theta} = 0 \quad \dots \dots \quad (1)$$

$$\vec{r}_A = c_1 \vec{i} + y_A \vec{j} \Rightarrow \delta \vec{r}_A = \delta y_A \vec{j}$$

$$\vec{r}_{A'} = c_1 \vec{i} + y_{A'} \vec{j} \quad \text{ve} \quad y_{A'} = y_{A'ik} + r_1 \theta \Rightarrow \delta \vec{r}_{A'} = r_1 \delta \theta \vec{j} \quad \dots \dots \quad (2)$$

$$\vec{r}_B = c_2 \vec{i} + y_B \vec{j} \quad \text{ve} \quad y_B = y_{Bik} - r_2 \theta \Rightarrow \delta \vec{r}_B = -r_2 \delta \theta \vec{j} \quad \dots \dots \quad (3)$$

$$\vec{F}_1 = -m_1 g \vec{j}, \vec{F}_A = F_{y1} \vec{j}, \vec{F}_{A'} = -F_{y1} \vec{j}, \vec{F}_2 = -m_2 g \vec{j}, \vec{F}_B = F_{y2} \vec{j} \quad \dots \dots \quad (4)$$

$$\vec{\theta} = -\theta \vec{k} \Rightarrow \delta \theta = -\delta \theta \vec{k} \quad \text{ve} \quad \vec{T} = -T \vec{k} \quad \dots \dots \quad (5)$$

(2), (3), (4) ve (5) nolu denklemeler ile verilen ifadeler (1) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$(-m_1 g \vec{j}) \cdot (\delta y_A \vec{j}) + (F_{y_1} \vec{j}) \cdot (\delta y_A \vec{j}) + (-F_{y_1} \vec{j}) \cdot (r_1 \delta \theta \vec{j}) + (-m_2 g \vec{j}) \cdot (-r_2 \delta \theta \vec{j}) + (F_{y_2} \vec{j}) \cdot (-r_2 \delta \theta \vec{j}) + (-T \vec{k}) \cdot (-\delta \theta \vec{k}) = 0$$

$$-m_1 g \delta y_A + F_{y_1} \delta y_A - F_{y_1} r_1 \delta \theta + m_2 g r_2 \delta \theta - F_{y_2} r_2 \delta \theta + T \delta \theta = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{[-m_1 g + F_{y_1}]}_{Q_2} \delta y_A + \underbrace{[-F_{y_1} r_1 + m_2 g r_2 - F_{y_2} r_2 + T]}_{Q_1} \delta \theta = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

(6) nolu denklemde  $\delta y_A$  ve  $\delta \theta$  sıfır olmayacağından,  $Q_1 = 0$  ve  $Q_2 = 0$  olmalıdır.

$$Q_2 = 0 \Rightarrow F_{y_1} = m_1 g \quad \blacktriangleleft$$

$$Q_1 = 0 \Rightarrow -F_{y_1} r_1 + m_2 g r_2 - F_{y_2} r_2 + T = 0$$

$$\Rightarrow -m_1 g r_1 + m_2 g r_2 - F_{y_2} r_2 + T = 0$$

$$\Rightarrow F_{y_2} = \frac{1}{r_2} (T - m_1 g r_1 + m_2 g r_2) \quad \blacktriangleleft$$

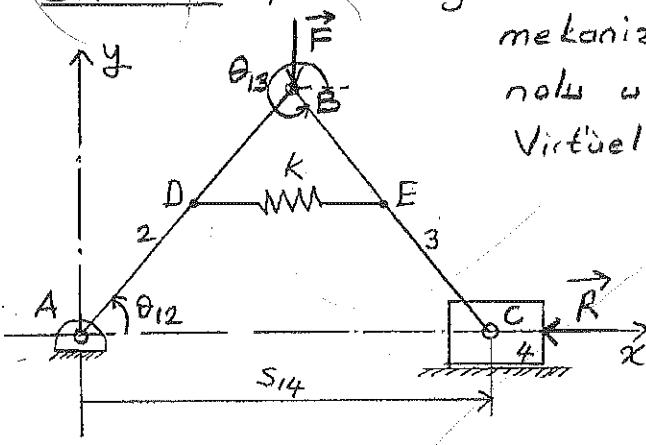
olarak yay kuvvetleri  $F_{y_1}$  ve  $F_{y_2}$  hesaplanır.

ÖRNEK: Şekilde gösterilen mekanizmada belli bir  $\theta_{12}$  değeri için, mekanizmayı statik dengede tutmak için 4 nolu uzaya uygulanması gereken  $\vec{R}$  kuvvetini Virtüel İş prinsibini kullanarak hesaplayınız.

$$|AB| = |BC| = l$$

$$|AD| = |DB| = |BE| = |EC| = \frac{l}{2}$$

Yayın serbest haldeyken boyu =  $l$



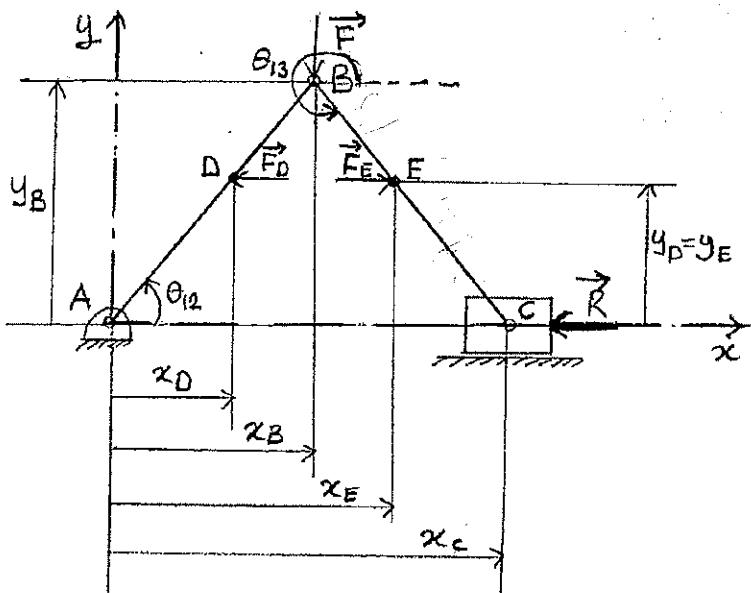
CİLDİM:

Mekanizmanın serbestlik derecesi = 1 ( $m=1$ )

Genelleştirilmiş koordinat olarak,  $\theta_{12}$  seçilebilir. ( $q = \theta_{12}$ )

Dış Kuvvetler  $\rightarrow \vec{F}, \vec{R}, \vec{F}_D$  ve  $\vec{F}_E$

Virtüel iş pressibine göre,  $\vec{F} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{F}_D \cdot \delta \vec{r}_D + \vec{F}_E \cdot \delta \vec{r}_E = 0$  --- (1)



$$\begin{aligned}\vec{r}_B &= x_B \vec{i} + y_B \vec{j} \Rightarrow \delta \vec{r}_B = \delta x_B \vec{i} + \delta y_B \vec{j} \quad (2) \\ \vec{r}_D &= x_D \vec{i} + y_D \vec{j} \Rightarrow \delta \vec{r}_D = \delta x_D \vec{i} + \delta y_D \vec{j} \quad (3) \\ \vec{r}_E &= x_E \vec{i} + y_E \vec{j} \Rightarrow \delta \vec{r}_E = \delta x_E \vec{i} + \delta y_E \vec{j} \quad (4) \\ \vec{r}_c &= x_c \vec{i} \Rightarrow \delta \vec{r}_c = \delta x_c \vec{i} \quad (5) \\ \vec{F} &= -F \vec{j} \\ \vec{R} &= -R \vec{i} \\ \vec{F}_D &= -F_y \vec{i} \\ \vec{F}_E &= F_y \vec{i} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{F} = -F \vec{j} \\ \vec{R} = -R \vec{i} \\ \vec{F}_D = -F_y \vec{i} \\ \vec{F}_E = F_y \vec{i} \end{array} \right\} \quad \text{--- (6)}$$

(2) - (6) denklemlerini (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$(-F \vec{j}) \cdot (\delta x_B \vec{i} + \delta y_B \vec{j}) + (-R \vec{i}) \cdot (\delta x_c \vec{i}) + (-F_y \vec{i}) \cdot (\delta x_D \vec{i} + \delta y_D \vec{j}) + (F_y \vec{i}) \cdot (\delta x_E \vec{i} + \delta y_E \vec{j}) = 0$$

$$\Rightarrow -F \delta y_B - R \delta x_c - F_y \delta x_D + F_y \delta x_E = 0 \quad \text{--- (7)}$$

$$y_B = l \sin \theta_{12} \Rightarrow \delta y_B = l \cos \theta_{12} \delta \theta_{12} \quad \text{--- (8)}$$

$$x_c = 2l \cos \theta_{12} \Rightarrow \delta x_c = -2l \sin \theta_{12} \delta \theta_{12} \quad \text{--- (9)}$$

$$x_D = \frac{l}{2} \cos \theta_{12} \Rightarrow \delta x_D = -\frac{1}{2} \sin \theta_{12} \delta \theta_{12} \quad \text{--- (10)}$$

$$x_E = \frac{3l}{2} \cos \theta_{12} \Rightarrow \delta x_E = -\frac{3}{2} l \sin \theta_{12} \delta \theta_{12} \quad \text{--- (11)}$$

(8) - (11) denklemlerini (7)'de yerine yazarsak,

$$[-F l \cos \theta_{12} + 2R l \sin \theta_{12} + F_y l \sin \theta_{12} \underbrace{\left(\frac{l}{2} - \frac{3l}{2}\right)}_{-l}] \delta \theta_{12} = 0$$

$$[-F l \cos \theta_{12} + 2R l \sin \theta_{12} - F_y l \sin \theta_{12}] \delta \theta_{12} = 0 \quad \text{--- (12)}$$

(12) denklemde  $\delta \theta_{12}$  sıfır olmayacağından, parantezdeki ifadenin sıfır olması gereklidir. Yani,

$$-F l \cos \theta_{12} + 2R l \sin \theta_{12} - F_y l \sin \theta_{12} = 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{F_y l \sin \theta_{12} + F l \cos \theta_{12}}{2 l \sin \theta_{12}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} [F \cot \theta_{12} + F_y] \quad \text{--- (13)}$$

Yay kuvveti,

$$F_y = k \Delta x = k \left[ l - \left( \frac{1}{2} \cos \theta_{12} + \frac{1}{2} \sin (\theta_{13} - 270^\circ) \right) \right]$$

$$\Rightarrow F_y = k \left[ l - \frac{1}{2} \cos \theta_{12} - \frac{1}{2} \cos \theta_{13} \right]$$

$$F_y = kl(1 - \cos \theta_{12}) =$$

$F_y$  değeri (13)'de yerine yazılırsa mekanizmayı statik dengede tutmak için 4 nolu uzva uygulanması gereken  $\vec{R}$  kuvveti;

$$R = \frac{1}{2} [F \cot \theta_{12} + kl(1 - \cos \theta_{12})]$$

olarak hesaplanır.

Sayı

44

?

671 (6,20)

(g)

# VİRTÜEL İŞ YÖNTEMİ İLE DINAMİK KUVVET ANALİZİ

Vektörel dinamik konusunda bahsedildiği gibi; aksiyon kuvvet ve momenti bir dis kuvvetmiş gibi ele alınabilir. (D'Alembert Prensibi)

$$\vec{F}_j^i = -m_j \vec{a}_{G_j} \rightarrow \vec{T}_j^i = -I_{G_j} \vec{\alpha}_j$$

Bu denklemlerde  $j$  alt indis i<sup>th</sup> uzur numarasını göstermektedir. Bu denklemler kullanılarak dinamik analiz için virtüel iş denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\delta U = \sum_{i=1}^{\text{Dis kuvvetlerin sayısı}} \vec{F}_i^{\text{dis}} \cdot \vec{\delta r}_i + \sum_{i=1}^{\text{Dis momentlerin sayısı}} \vec{T}_i^{\text{dis}} \cdot \vec{\delta \theta}_i + \sum_{j=1}^{\text{Uzurların sayısı}} (-m_j \vec{a}_{G_j}) \cdot \vec{\delta r}_{G_j} + \sum_{j=1}^{\text{Uzurların sayısı}} (-I_{G_j} \vec{\alpha}_j) \cdot \vec{\delta \theta}_j = 0$$

*Mehmet Ali*

Bu denklemde

$\vec{\delta r}_i$ :  $\vec{F}_i^{\text{dis}}$  kuvvetinin uygulama noktasının virtüel yer değişimini  
 $\vec{\delta \theta}_i$ :  $\vec{T}_i^{\text{dis}}$  momentinin uygulandığı uzurun virtüel açısal yer değişimini

$\vec{\delta r}_{G_j}$ :  $j$  uzunun ağırlık merkezinin doğrusal ivmesini  
 $\vec{\delta \theta}_j$ :  $j$  " " " virtüel yerdeğisimini

$\vec{\alpha}_j$ :  $j$  " " " açısal ivmesini

$\vec{\omega}_j$ :  $j$  " " " virtüel açısal yerdeğisimini

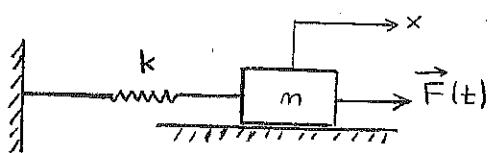
göstermektedir. Sonuç yerdeğisimin  $\delta t$  gibi bir zamanda gerçekleştiğine vücuda ise virtüel gür denklemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\delta P = \sum_i \vec{F}_i^{\text{dis}} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{T}_i^{\text{dis}} \cdot \vec{\omega}_i + \sum_j (-m_j \vec{a}_{G_j}) \cdot \vec{v}_{G_j} + \sum_j (-I_{G_j} \vec{\alpha}_j) \cdot \vec{\omega}_j = 0$$

Bu denklemde de antasılılığı üzere, dinamik analiz yapılmadan önce verilen mekanizmanın konum, hız ve ivme analizlerinin yapılması gereklidir.

Örnek: Aşağıdaki m küteli cismin hareket denklemini elde ediniz

Not: x, yolların serbest boyundan itibaren ölaçlımaktadır.



$$m = 1 \quad ; \quad q = x$$

Dış kuvvetler:  $\vec{F}(t)$ ,  $\vec{F}_{yoy}$ , Atalet kuvveti  $\vec{F}$   
x'e pozitif yönde bir yerdegistirme verinsek

$$\vec{F}_{yoy} = kx(-\vec{i}) = -kx\vec{i}$$

$$\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i} \Rightarrow \vec{F}' = -m\vec{a}_G = -m\ddot{x}\vec{i}$$

$$\vec{F}_t = F(t)\vec{i}$$

Virtüel iş denklemi

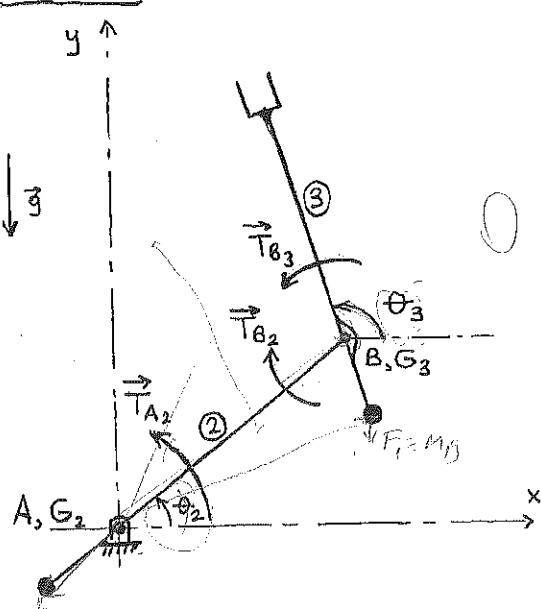
$$\vec{F}(t) \cdot \vec{s}_x + \vec{F}_{yoy} \cdot \vec{s}_x + \vec{F}' \cdot \vec{s}_x = 0$$

$$\vec{s}_x = \vec{s}_x\vec{i}$$

$$\Rightarrow F(t)s_x - kx s_x - m\ddot{x}s_x = 0$$

$$\Rightarrow [F(t) - kx - m\ddot{x}] s_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = F(t)}$$

Örnek:



Şekilde gösterilen iki kollu düzlemsel robotta, 2 uzvrana  $\vec{T}_{A2} = \vec{T}_2(\vec{k})$  ve  $\vec{T}_{B2} = \vec{T}_3(-\vec{k})$  momentleri, 3 uzvrana ise  $\vec{T}_{B3} = \vec{T}_3(\vec{k})$  momenti etki etmektedir. 2 uzvrının ağırlık merkezi A noktasında 3 uzvrının " " " " ise B noktasındadır.  $|AB| = l_2$  dir

$m_2, m_3, I_{G2}$  ve  $I_{G3}$  değerleri verilmiştir. Ayrıca  $\dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3$  ve  $\ddot{\theta}_3$  değerleri verilmiştir. Bu sistem iain dinamik denge denklemelerini virtüel iş prensibini kullanarak elde ediniz.

Gözüm: Serbestlik derecesi:  $m = 2$

Bağımsız değişkenler:  $q_1 = \theta_2$ ,  $q_2 = \theta_3$

Dis kuvvetler:

$$\vec{T}_{A_2} = T_2 \vec{k}, \vec{T}_{B_2} = -T_3 \vec{k}, \vec{T}_{B_3} = T_3 \vec{k}$$

$$\vec{F}_2^i = -m_2 \vec{a}_{G_2}, \vec{a}_{G_2} = 0 \Rightarrow \vec{F}_2^i = 0$$

$$\vec{T}_2^i = -I_{G_2} \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2 = \ddot{\vec{\theta}}_2 = \ddot{\theta}_2 \vec{k} \Rightarrow \vec{T}_2^i = -I_{G_2} \ddot{\theta}_2 \vec{k}$$

$$\vec{F}_3^i = -m_3 \vec{a}_{G_3}, \vec{a}_{G_3} = ?$$

$$\vec{r}_{G_3} = l_2 (\cos \theta_2 \vec{i} + \sin \theta_2 \vec{j})$$

$$\vec{v}_{G_3} = \dot{\vec{r}}_{G_3} = l_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \vec{i} + \cos \theta_2 \vec{j})$$

$$\vec{a}_{G_3} = \ddot{\vec{r}}_{G_3} = l_2 \ddot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \vec{i} + \cos \theta_2 \vec{j}) + l_2 \dot{\theta}_2^2 (-\cos \theta_2 \vec{i} - \sin \theta_2 \vec{j})$$
$$\Rightarrow \vec{a}_{G_3} = (-l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \vec{i} + (l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_3^i = m_3 l_2 (\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \vec{i} + m_3 l_2 (\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2) \vec{j}$$

$$\vec{T}_3^i = -I_{G_3} \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3 = \ddot{\vec{\theta}}_3 = \ddot{\theta}_3 \vec{k} \Rightarrow \vec{T}_3^i = -I_{G_3} \ddot{\theta}_3 \vec{k}$$

Ayrıca ağırlıktan dolayı:  $\vec{W}_3 = -m_3 g \vec{j}$

Bu dis kuvvetleri ve kuvvetlerin uygulama noktalarının virtüel yerdeğişimlerini kullanarak, virtüel iş denklemi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\delta U = \vec{T}_{A_2} \cdot \vec{s}\vec{\theta}_2 + \vec{T}_{B_2} \cdot \vec{s}\vec{\theta}_2 + \vec{T}_{B_3} \cdot \vec{s}\vec{\theta}_3 + \vec{T}_2^i \cdot \vec{s}\vec{\theta}_2 + \vec{F}_3^i \cdot \vec{s}\vec{r}_{G_3} + \vec{T}_3^i \cdot \vec{s}\vec{\theta}_3 + \vec{W}_3 \cdot \vec{s}\vec{r}_{G_3} = 0$$

$$\vec{s}\vec{\theta}_2 = \delta \theta_2 \vec{k}, \vec{s}\vec{\theta}_3 = \delta \theta_3 \vec{k}$$

$$\vec{r}_{G_3} = l_2 \cos \theta_2 \vec{i} + l_2 \sin \theta_2 \vec{j} \Rightarrow \vec{s}\vec{r}_{G_3} = -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 \vec{i} + l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 \vec{j}$$

Bu değerler sonralı iş denkleminde yerine yazılır ise:

$$T_2 \sin \theta_2 - T_3 \sin \theta_2 + T_3 \sin \theta_3 - I_{G_2} \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2$$

$$- I_{G_3} \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow (T_2 - T_3 - I_{G_2} \ddot{\theta}_2 - m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2) \sin \theta_2 + (T_3 - I_{G_3} \ddot{\theta}_3) \sin \theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow T_3 = I_{G_3} \ddot{\theta}_3$$

$$T_2 - T_3 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 = (m_3 l_2^2 + I_{G_2}) \ddot{\theta}_2$$

Dinamik  
denge denklemleri

Not:

$$\begin{aligned} \vec{F}_3^i \cdot \vec{s}_{r_{G_3}} &= [m_3 l_2 (\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \vec{i} + m_3 l_2 (\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \vec{j}] \cdot [-l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_2 \vec{i} \\ &\quad + l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \vec{j}] \\ &= -m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_2 - m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \sin \theta_2 + m_3 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ &\quad + m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2 \\ &= -m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 (\underbrace{\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2}_{=1}) = -m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

~~201~~

Başka!!

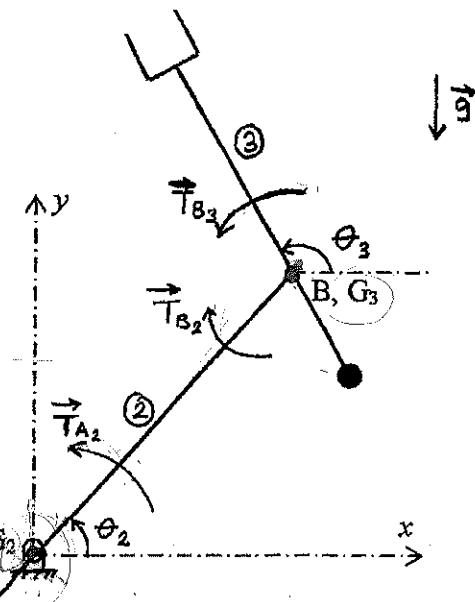
LX

## MAK 360 MAKİNE DİNAMİĞİ 2008-2009 YAZ DÖNEMİ FINAL SINAVI

Öğretim Üyesi: Yrd. Doç.Dr. Yasin YILMAZ  
Süre: 110 dakika

10.08.2009

1-) Şekilde gösterilen iki kollu düzlemsel robotta, 2 uzvuna  $\vec{T}_{A_2} = T_2 (\vec{k})$  ve  $\vec{T}_{B_2} = -T_3 (\vec{k})$ , 3 uzvuna ise  $\vec{T}_{B_3} = T_3 (\vec{k})$  momentleri etki etmektedir. 2 uzvunun ağırlık merkezi A noktasında 3 uzvunun ağırlık merkezi ise B noktasındadır.  $|AB| = 1 \text{ m}$ ,  $m_2 = m_3 = 6 \text{ kg}$ ,  $I_{G_2} = I_{G_3} = 0.5 \text{ kg.m}^2$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$ ,  $\dot{\theta}_2 = 1 (\vec{k}) \text{ radyan/s}$ ,  $\ddot{\theta}_2 = -5 (\vec{k}) \text{ radyan/s}^2$ ,  $\theta_3 = 120^\circ$ ,  $\dot{\theta}_3 = 2 (\vec{k}) \text{ radyan/s}$ ,  $\ddot{\theta}_3 = 10 (\vec{k}) \text{ radyan/s}^2$  olarak verilmiştir. Sistemin dinamik olarak dengede olabilmesi için  $T_2$  ve  $T_3$  moment değerlerini vektörel dinamik veya virtüel iş prensibini kullanarak hesaplayınız. (50 puan)



$$T_2 \cdot \delta \theta_2 + T_3 \cdot \delta \theta_3 + T_3 \cdot \delta \theta_3 + T_3 \cdot \delta \theta_3 + f_3 (63, W) \delta r_{33} = 0$$

$$T_2 (\delta \theta_2 - T_3 (\delta \theta_2)) / T_3 (\delta \theta_3) = -5k \cdot \delta \theta_3 + (-22,98i + 20,196j) \\ (-0,8668i + 0,5i) (\delta \theta_2) + (-58,86j) \cdot (-0,8668i + 0,58j) (\delta \theta_2) + (2,5k) (\delta \theta_2)$$

$$\delta \theta_2 (T_3 - 5) + \delta \theta_2 (T_2 - T_3 + (9,9/90 + 11,7136 - 34,1388)) = 0$$

$$T_3 = 5$$

$$T_2 =$$

$$2) \vec{T}_{A_2} = T_2 \vec{k}, \vec{T}_{B_2} = -T_3 \vec{k}, \vec{T}_{B_3} = T_3 \vec{k}$$

$$|AB|=1m, m_2=m_3=6 \text{ kg}, I_{G_2}=I_{G_3}=0,5 \text{ kg.m}^2$$

$$\theta_2=60^\circ, \dot{\theta}_2=1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \ddot{\theta}_2=-5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\theta_3=120^\circ, \dot{\theta}_3=2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \ddot{\theta}_3=10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Gözüm:

Vektörel Dinamik metod ile çözüm

Ağırlık momentlerinin ivmeleri:

$$\vec{r}_{G_2} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{G_2} = 0$$

$$\vec{r}_{G_3} = |AB| \cdot \cos \theta_2 \vec{i} + |AB| \sin \theta_2 \vec{j} = \cos \theta_2 \vec{i} + \sin \theta_2 \vec{j}$$

$$\vec{v}_{G_3} = \dot{\vec{r}}_{G_3} = -\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \vec{i} + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \vec{j} = -0,866 \vec{i} + 0,5 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{a}_{G_3} = \ddot{\vec{r}}_{G_3} = (-\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \vec{i} + (\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_3} = 3,83 \vec{i} - 3,366 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ağırlık kuvvetleri ve momentleri:

$$\vec{F}_2^i = -m_2 \vec{a}_{G_2} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_2^i = 0}$$

$$\vec{T}_2^i = -I_{G_2} \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2 = -5 \frac{\vec{k}}{\text{s}^2} \Rightarrow \boxed{\vec{T}_2^i = 2,5 \vec{k} \text{ N.m}}$$

$$\vec{F}_3^i = -m_3 \vec{a}_{G_3} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_3^i = -22,98 \vec{i} + 20,196 \vec{j} \text{ N}}$$

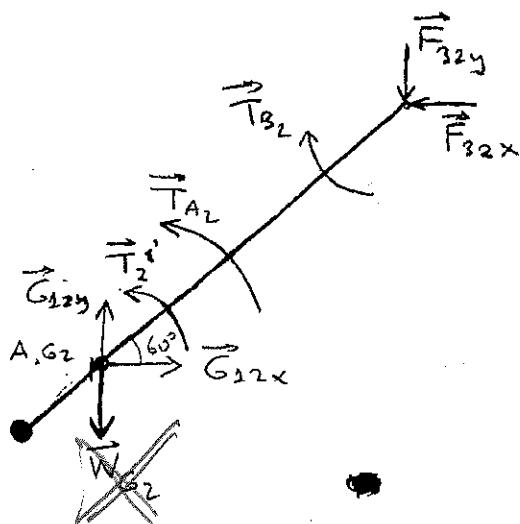
$$\vec{T}_3^i = -I_{G_3} \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_3 = -10 \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{T}_3^i = -5 \vec{k} \text{ N.m}}$$

Ağırlıklardan dolayı gelen kuvvetler

$$\vec{W}_{G_2} = -m_2 g \vec{j} = -58,86 \vec{j} \text{ N} \quad \boxed{\vec{W}_{G_3} = -m_3 g = -58,86 \vec{j} \text{ N}}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Serbest Cisim Gerçebeleri:



Uzuv 2

Denge Denklemleri:

$$\underline{\text{Uzuv 3}}$$

$$\sum \vec{M}_B = 0 \Rightarrow T_3 \vec{k} - 5 \vec{e} = 0 \Rightarrow (T_3 - 5) \vec{k} = 0 \Rightarrow \boxed{T_3 = 5 \text{ Nm}}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_{B3} = 5 \vec{k} \text{ N.m}, \vec{T}_{B2} = -5 \vec{k}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{23x} - 22,98 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{23x} = 22,98 \text{ N} = F_{32x}}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{23y} + 20,136 - 58,86 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{23y} = 38,664 \text{ N} = F_{32y}}$$

$$\underline{\text{Uzuv 2}}$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow F_{32x} \cdot 1 \cdot \sin 60 \vec{k} - F_{32y} \cdot 1 \cdot \cos 60 \vec{k} + 2,5 \vec{k} + T_2 \vec{k}$$

$$-5 \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow (12,98 - 13,332 + 2,5 - 5 + T_2) \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = 1,332 \text{ N.m}}$$

Virtuell  $\Rightarrow$  Preisibili: ille auswerten ( $m=1$ ;  $q_1 = \theta_2$ ,  $q_2 = \theta_3$ )

$$\vec{F}_{G3} = \cos \theta_2 \vec{i} + \sin \theta_2 \vec{j} \Rightarrow \begin{aligned} \delta \vec{F}_{G3} &= -\sin \theta_2 \cdot \delta \theta_2 \vec{i} + \cos \theta_2 \cdot \delta \theta_2 \vec{j} \\ &= -0,866 \cdot \delta \theta_2 \vec{i} + 0,5 \cdot \delta \theta_2 \vec{j} \end{aligned}$$

Virtuell ist unklamm.

$$\begin{aligned} \delta u &= \vec{T}_{A2} \cdot \delta \vec{\theta}_2 + \vec{T}_{B2} \cdot \delta \vec{\theta}_2 + \vec{T}_{B3} \cdot \delta \vec{\theta}_3 + \vec{T}_2 \cdot \delta \vec{\theta}_2 + \\ &\quad + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{F}_{G3} + \vec{T}_3 \cdot \delta \vec{\theta}_3 + \vec{N}_{G3} \cdot \delta \vec{F}_{G3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\vec{T}_2 \vec{i}) \cdot (\delta \theta_2 \vec{i}) + (-\vec{T}_3 \vec{k}) \cdot (\delta \theta_2 \vec{k}) + (\vec{T}_3 \vec{k}) \cdot (\delta \theta_3 \vec{i}) + (2,5 \vec{k}) \cdot (\delta \theta_2 \vec{i}) \\ + (-22,307 + 20,136 \vec{j}) \cdot (-0,866 \delta \theta_2 \vec{i} + 0,5 \delta \theta_2 \vec{j}) \\ + (-5 \vec{k}) \cdot (\delta \theta_3 \vec{k}) + (-5 \cdot 8,86 \vec{j}) \cdot (-0,866 \delta \theta_2 \vec{i} + 0,5 \delta \theta_2 \vec{j}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_2 \delta \theta_2 - T_3 \delta \theta_2 + T_3 \delta \theta_3 + 2,5 \delta \theta_2 + 13,9 \delta \theta_2 + 10,038 \delta \theta_2 - 5 \delta \theta_3 \\ - 23,43 \delta \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\Rightarrow (T_2 - T_3 + 3,068) \delta \theta_2 + (T_3 - 5) \delta \theta_3 = 0}_{= 0} = 0$$

$$T_3 - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{T_3 = 5 \text{ N.m}}$$

$$T_2 - T_3 + 3,068 = 0 \Rightarrow \boxed{T_2 = 1,932 \text{ N.m}}$$

Örnek: Aşağıdaki şekilde gösterilen krank-biyel mekanizmasında

$$|A_0 A| = 0,2 \text{ m}, |AB| = 0,6 \text{ m}, |A_0 G_2| = 0,05 \text{ m}, |AG_3| = 0,2 \text{ m},$$

$$m_2 = 0,5 \text{ kg} > m_3 = 1,2 \text{ kg} > m_4 = 0,8 \text{ kg}, I_{G_2} = I_{G_3} = 0,006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ dir}$$

Mekanizma (yatay düzlemede) gelişmekte ve sisteme sürtünme yoktur. 2 uzunluğun saat yelkovasına ters yönde  $10 \text{ radyon/s}$

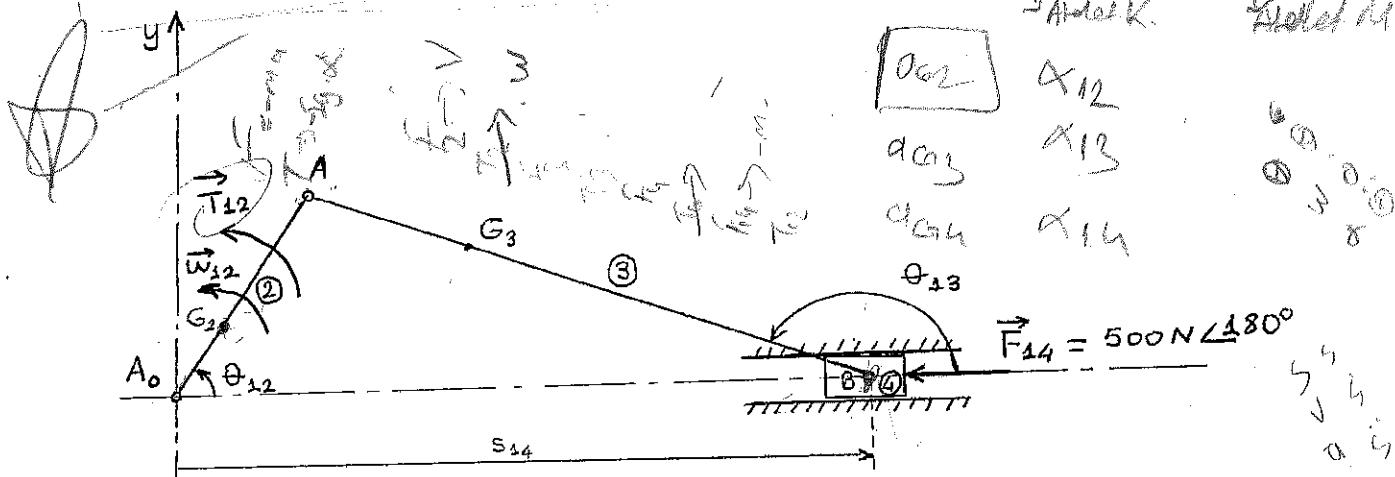
sabit açısal hızla dönmesi istenmektedir.  $\theta_{12} = 60^\circ$ ) için

sistemi dinamik dengede tütəcək 2 uzvunə vyygulanması

gerekken  $T_{z2}$  torkunu virtüel iş veya virtüel güt yantemlerinde

birinci kullanarak hesaplayınız.

$$F = -m a \quad T = -I g \cdot \omega$$



## Gözüm: Kinematik Analiz

Özüm: Kinematik Analizi  
 Devre kopolilik denklemi :  $\vec{A}_o A = \vec{A}_o B + \vec{B} A$

$$0,2 \cdot e^{j\theta_{12}} = s_{14} + 0,6 \cdot e^{j\theta_{13}}$$

### Kosum Analyse

$$\text{Re : } 0.2 \cdot \cos \theta_{12} = s_{14} + 0.6 \cdot \cos \theta_{13} \quad \dots \dots \quad (1)$$

$$T_m: \theta_{21} \sin \theta_{12} = 0.6 \cdot \sin \theta_{43} \quad = - - - - - \quad (2)$$

$$(2) \text{ den: } \theta_{13} = \sin^{-1} \left( \frac{0,2}{0,6} \cdot \sin 60^\circ \right) \Rightarrow \boxed{\theta_{13} = 163,2213^\circ}$$

$$(1) \text{ den: } s_{14} = 0,2 \cdot \cos 60^\circ - 0,6 \cdot \cos 163,2213^\circ \Rightarrow s_{14} = 0,6745 \text{ m}$$

Hiz Analizi: (1) ve (2) denklemlerinin zamanla göre türneflerini alalım

$$-O_2, \dot{\theta}_{12} \sin \theta_{12} = \ddot{s}_{14} - O_3 6, \dot{\theta}_{13} \sin \theta_{13} \quad \dots \quad (3)$$

$$0,2 \cdot \dot{\Theta}_{12} \cos \Theta_{12} = 0,6 \cdot \dot{\Theta}_{13} \cos \Theta_{13} \quad - - - - - \quad (4)$$

$$(4)' \text{den} \quad \ddot{\theta}_{13} = \frac{0,2 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ}{0,6 \cdot \cos 163,2213^\circ} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_{13} = -1,7408 \frac{\text{radyon}}{\text{s}}}$$

$$(3)' \text{den} \quad \ddot{s}_{14} = -0,2 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ + 0,6 \cdot (-1,7408) \cdot \sin 163,2213^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{s}_{14} = -2,0336 \text{ m/s}} \rightarrow f_{12}$$

Ivme Analizi: (3) ve (4)' denklemelerinin zemana göre türevlerini alalım:

$$\ddot{s}_{14} = -0,2 \cdot \ddot{\theta}_{12} \cdot \sin \theta_{12} + 0,2 \cdot \dot{\theta}_{12}^2 \cdot \cos \theta_{12} + 0,6 \cdot \ddot{\theta}_{13} \sin \theta_{13} + 0,6 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 \cos \theta_{13} \quad \dots (5)$$

$$0,2 \cdot \ddot{\theta}_{12} \cos \theta_{12} - 0,2 \cdot \dot{\theta}_{12}^2 \cdot \sin \theta_{12} = 0,6 \cdot \ddot{\theta}_{13} \cos \theta_{13} - 0,6 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 \sin \theta_{13} \dots (6)$$

$$(6)' \text{den:} \quad \ddot{\theta}_{13} = \frac{0,6 \cdot (-1,7408)^2 \cdot \sin(163,2213^\circ) - 0,2 \cdot 10^2 \cdot \sin(60^\circ)}{0,6 \cdot \cos(163,2213^\circ)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_{13} = 29,2374 \frac{\text{radyon}}{\text{s}^2}} = \alpha_{13} \rightarrow \text{Analitik}$$

$$(5)' \text{den:} \quad \ddot{s}_{14} = -0,2 \cdot 10^2 \cdot \cos 60^\circ + 0,6 \cdot 29,2374 \cdot \sin(163,2213^\circ) + 0,6 \cdot (-1,7408)^2 \cdot \cos(163,2213^\circ)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{s}_{14} = -6,6767 \text{ m/s}^2} = \alpha_{G_2} \rightarrow \text{Analitik}$$

(2) uzunun ağırlık merkezinin doğrusal ivmesini bulalım

$$\vec{F}_{G_2} = 0,05 \cdot (\cos \theta_{12} \vec{i} + \sin \theta_{12} \vec{j})$$

$$\vec{v}_{G_2} = 0,05 \cdot \dot{\theta}_{12} (-\sin \theta_{12} \vec{i} + \cos \theta_{12} \vec{j})$$

$$\vec{a}_{G_2} = 0,05 \cdot \ddot{\theta}_{12}^2 (-\sin \theta_{12} \vec{i} + \cos \theta_{12} \vec{j}) + 0,05 \cdot \dot{\theta}_{12}^2 (-\cos \theta_{12} \vec{i} - \sin \theta_{12} \vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_2} = 0,05 \cdot 10^2 (-\cos 60 \vec{i} - \sin 60 \vec{j})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{G_2} = -2,5 \vec{i} - 4,33 \vec{j} \text{ m/s}^2} \rightarrow 2 \text{ ikinci}$$

(3) uzunun ağırlık merkezinin doğrusal ivmesini bulalım:

$$\vec{F}_{G_3} = \vec{A}_0 \vec{B} + \vec{B} \vec{G}_3 = s_{14} \vec{i} + 0,4 \cdot (\cos \theta_{13} \vec{i} + \sin \theta_{13} \vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{G_3} = \vec{r}_{G_3} = s_{14} \vec{i} + 0,4 \cdot \dot{\theta}_{13} (-\sin \theta_{13} \vec{i} + \cos \theta_{13} \vec{j})$$

$$\vec{a}_{G_3} = \vec{v}_{G_3} = s_{14} \vec{i} + 0,4 \cdot \ddot{\theta}_{13} (-\sin \theta_{13} \vec{i} + \cos \theta_{13} \vec{j}) + 0,4 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 (-\cos \theta_{13} \vec{i} - \sin \theta_{13} \vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_3} = -8,8922 \vec{i} - 11,547 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

Atelet kuvvetleri:

Uzuv 2:

$$\vec{F}_2^i = -m_2 \vec{a}_{G_2} = -0,5 \cdot (-2,5 \vec{i} - 4,33 \vec{j}) \Rightarrow \vec{F}_2^i = 1,25 \vec{i} + 2,165 \vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{T}_2^i = -I_{G_2} \vec{\alpha}_{12}^{=0} \Rightarrow \vec{T}_2^i = 0$$

→ Sabit Açısal hızdır.

Uzuv 3:

$$\vec{F}_3^i = -m_3 \vec{a}_{G_3} = -1,2 (-8,8922 \vec{i} - 11,547 \vec{j}) \Rightarrow \vec{F}_3^i = 10,67 \vec{i} + 13,8564 \vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{T}_3^i = -I_{G_3} \vec{\alpha}_{13} = -0,006 \cdot (23,2374 \vec{k}) \Rightarrow \vec{T}_3^i = -0,1754 \vec{k} \text{ N.m}$$

Uzuv 4:

$$\vec{F}_4^i = -m_4 \vec{a}_{G_4} = -0,8 \cdot (6,6767 \vec{i}) \Rightarrow \vec{F}_4^i = 5,34 \vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{T}_4^i = -I_{G_4} \vec{\alpha}_{14}^{=0} \Rightarrow \vec{T}_4^i = 0$$

→ Dörtlü sal hareketten dolayı

Simdi  $\vec{T}_{12}$  turkunu bulmak için virtüel güç prensibini kullanalım  
Mekanizmanın serbestlik derecesi:  $m=1$   
Bağımsız değişken:  $\vartheta = \theta_{12}$

Diğer kuvvetler:  $\vec{F}_{14}, \vec{T}_{12}, \vec{F}_2^i, \vec{F}_3^i, \vec{T}_3^i, \vec{F}_4^i$  (Not:  $\vec{T}_{12} = T_{12} \vec{k}$ ,  $\vec{F}_{14} = -500 \vec{i}$ )

$$\delta P = \vec{F}_{14} \cdot \vec{v}_B + \vec{T}_{12} \cdot \vec{w}_{12} + \vec{F}_2^i \cdot \vec{v}_{G_2} + \vec{F}_3^i \cdot \vec{v}_{G_3} + \vec{T}_3^i \cdot (\vec{w}_{13}) + (\vec{F}_4^i) \cdot \vec{v}_{G_4} = 0$$

$$\vec{v}_B = \dot{s}_{14} \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_B = -2,0336 \vec{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{w}_{12} = \dot{\theta}_{12} \vec{k} \Rightarrow \vec{w}_{12} = 10 \vec{k} \text{ radyan/s}$$

$$\vec{v}_{G_2} = 0,05 \cdot \dot{\theta}_{12}^{=10} (-\sin \theta_{12} \vec{i} + \cos \theta_{12} \vec{j})^{=60^\circ} \Rightarrow \vec{v}_{G_2} = -0,4330 \vec{i} + 0,25 \vec{j}$$

$$\vec{v}_{G_3} = \dot{s}_{14} \vec{i} + 0,4 \cdot \dot{\theta}_{13}^{=-1,7408} (-\sin \theta_{13} \vec{i} + \cos \theta_{13} \vec{j})^{=163,2213^\circ} \Rightarrow \vec{v}_{G_3} = -1,8326 \vec{i} + 0,6667 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

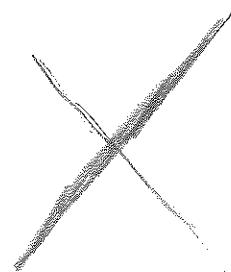
$$\vec{w}_{13} = \dot{\theta}_{13} \vec{k} \Rightarrow \vec{w}_{13} = -3,708 \vec{k} \frac{\text{radyan}}{\text{s}} \quad \therefore \vec{v}_{G_4} = \vec{v}_B = \dot{s}_{14} \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{G_4} = -2,0336 \vec{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned}
 & (-500\vec{\tau}) \cdot (-2,0336\vec{\tau}) + (\vec{T}_{12}\vec{\tau}) \cdot (10\vec{\tau}) + (1,25\vec{\tau} + 2,165\vec{\tau}) \cdot (-0,4730\vec{\tau} + 0,25\vec{\tau}) \\
 & + (10,67\vec{\tau} + 13,8564\vec{\tau}) \cdot (-1,8326\vec{\tau} + 0,6667\vec{\tau}) + (-0,1756\vec{\tau}) \cdot (-1,708\vec{\tau}) \\
 & + (5,34\vec{\tau}) \cdot (-2,0336\vec{\tau}) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1046,8 + 10T_{12} - 0,5413 + 0,5413 - 19,5538 + 9,2381 + 0,2936 - 10,8534 = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = -99,59 \text{ N.m}$$

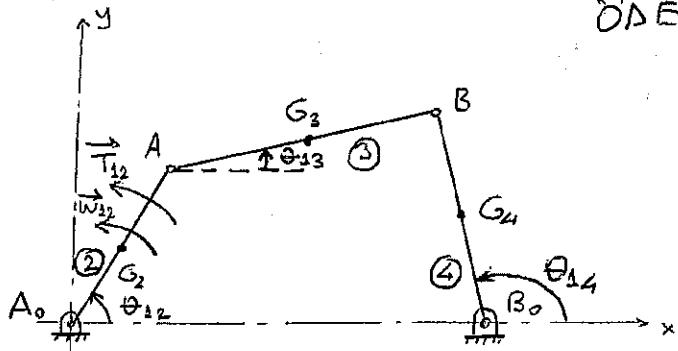
$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{12} = -99,59 \vec{\tau} \text{ N.m}}$$



# MAKİNA DINAMİĞİ

(4)

## ÖDEV-2



$$|A_0G_2| = |G_2A| = 0,2 \text{ m}$$

$$|AG_3| = |G_3B| = 0,4 \text{ m}$$

$$|BG_4| = |G_4B_0| = 0,3 \text{ m}$$

$$|A_0B_0| = 1,2 \text{ m}$$

$$m_2 = 0,5 \text{ kg}, m_3 = 1 \text{ kg}, m_4 = 0,8 \text{ kg}$$

$$\theta_{12} = 60^\circ, \dot{\theta}_{12} = \vec{w}_{12} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \text{ sabit} \Rightarrow \ddot{\theta}_{12} = \vec{\alpha}_{12} = 0$$

$\vec{T}_{12} = ?$ , Motsal kuvvetleri: ? (Yatay düzleme, sürtünme yok)

Gözüm: Kinematik Analiz:

$$\vec{A_0A} + \vec{AB} = \vec{A_0B_0} + \vec{B_0B}$$

$$\Rightarrow 0,4 \cdot e^{j\theta_{12}} + 0,8 \cdot e^{j\theta_{13}} = 1,2 + 0,6 \cdot e^{j\theta_{14}} \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{Re: } 0,4 \cdot \cos 60^\circ + 0,8 \cos \theta_{13} = 1,2 + 0,6 \cdot \cos \theta_{14}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \theta_{13} = 1,25 + 0,75 \cdot \cos \theta_{14}} \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{Im: } 0,4 \cdot \sin 60^\circ + 0,8 \cdot \sin \theta_{13} = 0,6 \cdot \sin \theta_{14}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \theta_{13} = -0,433 + 0,75 \cdot \sin \theta_{14}} \quad \dots \quad (3)$$

(2) ve (3) numaralı denklemlerin korelerini ol ve topla!

$$\cos^2 \theta_{13} + \sin^2 \theta_{13} = 1,5625 + 0,5625 \cos^2 \theta_{14} + 1,875 \cos \theta_{14} \\ + 0,1875 + 0,5625 \sin^2 \theta_{14} - 0,6495 \sin \theta_{14}$$

$$\Rightarrow 1 = 2,3125 + 1,875 \cos \theta_{14} - 0,6495 \sin \theta_{14}$$

$$\Rightarrow \boxed{1,875 \cos \theta_{14} - 0,6495 \sin \theta_{14} = -1,3125} \quad \dots \quad (4)$$

Metodu:  $A \cdot \cos \theta_{14} + B \cdot \sin \theta_{14} = C \Rightarrow A = 1,875, B = -0,6495, C = -1,3125$

$$\begin{cases} A = D \cdot \cos \phi \\ B = D \cdot \sin \phi \end{cases} \Rightarrow D = \sqrt{A^2 + B^2} = 1,9843, \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0,6495}{1,875}\right)$$

$$D \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta_{14} + D \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta_{14} = C \Rightarrow \phi = -19,106^\circ$$

$$\Rightarrow D \cdot \cos(\theta_{14} - \phi) = C \Rightarrow \cos(\theta_{14} - \phi) = \frac{C}{D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{14} = \phi + \sigma \left[ \cos^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) \right]} = -19,106^\circ + \cos^{-1}\left(\frac{-1,3125}{1,9843}\right) = \boxed{142,306^\circ}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} : \text{Açı 2 konusunun: } \rightarrow \Delta \rightarrow \theta_{14} = -150,516^\circ$$

Methode 2:

$$\tan \frac{\theta_{14}}{2} = t_4 \Rightarrow \cos \theta_{14} = \frac{1 - t_4^2}{1 + t_4^2}, \sin \theta_{14} = \frac{2t_4}{1 + t_4^2} \quad \begin{pmatrix} \text{Yerim} \\ \text{Tangent} \\ \text{formu} \end{pmatrix}$$

$$\frac{A}{1+t_4^2} (1-t_4^2) + \frac{B}{1+t_4^2} \cdot 2t_4 = C \Rightarrow A - A \cdot t_4^2 + 2B \cdot t_4 = C + C \cdot t_4^2$$

$$(A+C)t_4^2 - 2Bt_4 - (A-C) = 0 \quad \text{Quadratische Gleichung}$$

$$0,5625t_4^2 + 1,299t_4 - 3,1875 = 0$$

$$t_4 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + A^2 - C^2}}{A + C} = \frac{-0,6495 \pm \sqrt{0,42485 + 3,515625 - 1,7226}}{0,5625}$$

$$\Rightarrow t_4 = 1,49107 \quad \therefore t_4 = -3,8004$$

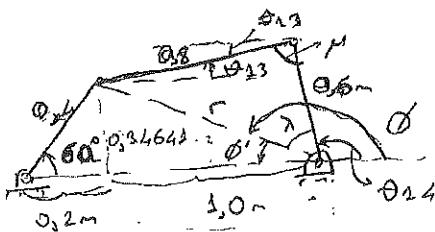
$$\Rightarrow \theta_{14} = 2 \cdot \tan^{-1}(1,49107) \quad | \quad \theta_{14} = -150,516^\circ$$

$$\theta_{14} = 242,304^\circ$$

$\Rightarrow$  (3) noch denklemden:

$$\sin \theta_{13} = -0,433 + 0,25, \sin \theta_{14} = -0,2608874 \Rightarrow \theta_{13} = 15,123^\circ$$

Methode 3: Trigonometrische Kettensinuskette benutzen.



$$r = \sqrt{0,34641^2 + 1^2} = 1,0583 \text{ m}$$

$$\phi' = \cos^{-1} \left( \frac{1,2^2 + 1,0583^2 - 0,4^2}{2 \cdot 1,2 \cdot 1,0583} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{2,6}{2,5} \right)$$

$$\Rightarrow \phi' = 19,1066^\circ$$

$$\lambda = \cos^{-1} \left( \frac{0,6^2 + 1,0583^2 - 0,8^2}{2 \cdot 0,6 \cdot 1,0583} \right) = 48,5904^\circ$$

$$\mu = \cos^{-1} \left( \frac{0,6^2 + 0,8^2 - 1,0583^2}{2 \cdot 0,6 \cdot 0,8} \right) = 97,1807^\circ$$

$$\phi = 180 - \phi' = 160,8934^\circ \Rightarrow \theta_{14} = \phi - \lambda = 112,303^\circ$$

$$\theta_{13} = \theta_{14} - \mu = 15,122^\circ$$

Hiz Analizi: (1) nolu denklenin zomona gõne türkint olalım

(3)

$$0,4 \cdot \dot{\theta}_{12} e^{j(\theta_{12}-\theta_{14})} + 0,8 \cdot \dot{\theta}_{13} e^{j(\theta_{13}-\theta_{14})} = 0,6 \cdot \dot{\theta}_{14} e^{j(\theta_{14}-\theta_{14})} \quad \dots \quad (5)$$

$\dot{\theta}_{13}$  ve  $\dot{\theta}_{14}$  bilinmeyenlerdir. Einsinden lineer bir denklem

$\dot{\theta}_{13}$ 'yi elde etmek için (5) nolu denklemi  $e^{-j\theta_{14}}$  ile çarpı-

$\dot{\theta}_{13}$ 'yi elde etmek için (5) nolu denklemi  $e^{-j\theta_{14}}$  ile çarpı-  
gibarı denklenin kompleks esleştirmi'ye  $\dot{\theta}_{13}$  ve denklenlerin birbirinden  
çıkartı:

$$0,4 \cdot \dot{\theta}_{12} e^{j(\theta_{12}-\theta_{14})} + 0,8 \cdot \dot{\theta}_{13} e^{j(\theta_{13}-\theta_{14})} = 0,6 \cdot \dot{\theta}_{14}$$

$$0,4 \cdot \dot{\theta}_{12} e^{-j(\theta_{12}-\theta_{14})} + 0,8 \cdot \dot{\theta}_{13} e^{-j(\theta_{13}-\theta_{14})} = 0,6 \cdot \dot{\theta}_{14} \rightarrow \text{kompleks esleştirmi}$$

$$0,4 \cdot \dot{\theta}_{12} \cdot 2 \frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_{12}-\theta_{14}) + 0,8 \cdot \dot{\theta}_{13} \cdot 2 \frac{1}{2} \cdot \sin(\theta_{13}-\theta_{14}) = 0 \\ = -\sin(\theta_{14}-\theta_{13})$$

$$\dot{\theta}_{13} = w_{13} = -\dot{\theta}_{12} \cdot \frac{0,4}{0,8} \cdot \frac{\sin(\theta_{12}-\theta_{14})}{\sin(\theta_{14}-\theta_{13})} \quad \dots \quad (6)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_{12} = 10 \cdot 0,5 \cdot \frac{\sin(60^\circ - 112,304^\circ)}{\sin(112,304^\circ - 15,123^\circ)} = -3,9876 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\dot{\theta}_{13} = -3,9876 \vec{k} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Benzer sekilde:

$$\dot{\theta}_{14} = w_{14} = \dot{\theta}_{12} \cdot \frac{0,4}{0,6} \cdot \frac{\sin(\theta_{12}-\theta_{13})}{\sin(\theta_{14}-\theta_{13})} \quad \dots \quad (7)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_{14} = 10 \cdot \frac{0,4}{0,6} \cdot \frac{\sin(60^\circ - 15,123^\circ)}{\sin(112,304^\circ - 15,123^\circ)} = 4,7411 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_{14} = 4,7411 \vec{k} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

İvme Analizi: (6) ve (7) nolu denklemlerin çözümü şöyledir:

$$\ddot{\theta}_{23} = \alpha_{23} = \ddot{\theta}_{22} \cdot (-)$$

$$+ \frac{0,4}{0,8} \left[ \cos(\theta_{12}-\theta_{14}), \sin(\theta_{12}-\theta_{13}), (\dot{\theta}_{22}-\dot{\theta}_{12}) - \cos(\theta_{12}-\theta_{13}), \sin(\theta_{12}-\theta_{14})(\dot{\theta}_{22}-\dot{\theta}_{12}) \right] \sin^2(\theta_{14}-\theta_{13})$$

$$= 0,5 \cdot [2,364] \cdot 10 = \boxed{21,82 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha}_{23} = 21,82 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}$$

$$\ddot{\theta}_{24} = \alpha_{24} = \ddot{\theta}_{22} \cdot (-)$$

$$+ \frac{0,4}{0,6} \left[ \cos(\theta_{12}-\theta_{13}), \sin(\theta_{24}-\theta_{13}), (\dot{\theta}_{22}-\dot{\theta}_{12}) - \cos(\theta_{12}-\theta_{13}), \sin(\theta_{24}-\theta_{13})(\dot{\theta}_{22}-\dot{\theta}_{12}) \right] \sin^2(\theta_{14}-\theta_{13})$$

$$= \frac{0,4}{0,6} \cdot [10,7724] \cdot 10 = \boxed{71,816 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha}_{24} = 71,816 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}$$

Ağırlık merkezlerinin hikayeleri:

$$\vec{r}_{G_2} = 0,2 \cdot \cos \theta_{12} \vec{i} + 0,2 \cdot \sin \theta_{12} \vec{j}$$

$$\vec{r}_{G_2} = \vec{v}_{G_2} = (-0,2 \cdot \dot{\theta}_{12} \sin \theta_{12}) \vec{i} + (0,2 \cdot \dot{\theta}_{12} \cos \theta_{12}) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{G_2} = [-0,2 \cdot \ddot{\theta}_{12} \sin \theta_{12} - 0,2 \cdot \dot{\theta}_{12}^2 \cos \theta_{12}] \vec{i} + [0,2 \cdot \ddot{\theta}_{12} \cos \theta_{12} - 0,2 \cdot \dot{\theta}_{12}^2 \sin \theta_{12}] \vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{G_2} = -10 \vec{i} - 17,3205 \vec{j}} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{r}_{G_3} = (0,4 \cdot \cos \theta_{12} + 0,4 \cdot \cos \theta_{13}) \vec{i} + (0,4 \cdot \sin \theta_{12} + 0,4 \cdot \sin \theta_{13}) \vec{j}$$

$$\vec{v}_{G_3} = (-0,4 \cdot \dot{\theta}_{12} \sin \theta_{12} - 0,4 \cdot \dot{\theta}_{13} \sin \theta_{13}) \vec{i} + (0,4 \cdot \dot{\theta}_{12} \cos \theta_{12} + 0,4 \cdot \dot{\theta}_{13} \cos \theta_{13}) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{G_3} = (-0,4 \cdot \ddot{\theta}_{12} \cos \theta_{12} - 0,4 \cdot \ddot{\theta}_{12} \sin \theta_{12} - 0,4 \cdot \ddot{\theta}_{13} \cos \theta_{13} - 0,4 \cdot \ddot{\theta}_{13} \sin \theta_{13}) \vec{i} \\ + (-0,4 \cdot \dot{\theta}_{12}^2 \sin \theta_{12} + 0,4 \cdot \dot{\theta}_{12}^2 \cos \theta_{12} - 0,4 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 \sin \theta_{13} + 0,4 \cdot \dot{\theta}_{13}^2 \cos \theta_{13}) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_{G_3} = -27,3736 \vec{i} - 31,736 \vec{j}} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(5)

$$\vec{F}_{G_4} = (1,2 + 0,3 \cdot \cos \theta_{14}) \vec{i} + 0,3 \cdot \sin \theta_{14} \vec{j}$$

$$\vec{v}_{G_4} = -0,3 \cdot \dot{\theta}_{14} \sin \theta_{14} \vec{i} + 0,3 \cdot \dot{\theta}_{14} \cos \theta_{14} \vec{j}$$

$$\vec{a}_{G_4} = (-0,3 \cdot \ddot{\theta}_{14}^2 \cos \theta_{14} - 0,3 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \sin \theta_{14}) \vec{i} + (-0,3 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \sin \theta_{14} + 0,3 \cdot \dot{\theta}_{14}^2 \cos \theta_{14}) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_{G_4} = -17,3736 \vec{i} - 14,4156 \vec{j}} \quad m/s^2$$

### Atalet Kuvvet ve Momentleri:

Uzuv 2:

$$\vec{F}_2^i = -m_2 \vec{a}_{G_2} = -0,5 k_3, (-10\vec{i} - 17,3205\vec{j}) = 5\vec{i} + 8,66\vec{j} \quad N$$

$$\vec{T}_2^i = -I_{G_2} \vec{\alpha}_{12}^{\perp=0} = 0$$

Uzuv 3:

$$\vec{F}_3^i = -m_3 \vec{a}_{G_3} = -1 k_3, (-27,3786\vec{i} - 31,736\vec{j}) = 27,3776\vec{i} + 31,736\vec{j} \quad N$$

$$I_{G_3} = \frac{1}{12} m_3 l_s^2 = \frac{1}{12} \cdot 1k_3 \cdot (0,8m)^2 = 0,0533 \text{ kg} \cdot m^2$$

$$\vec{T}_3^i = -I_{G_3} \vec{\alpha}_{13} = -0,0533 \cdot (14,82 \vec{i}) = -0,6304 \vec{k} \text{ N.m}$$

Uzuv 4:

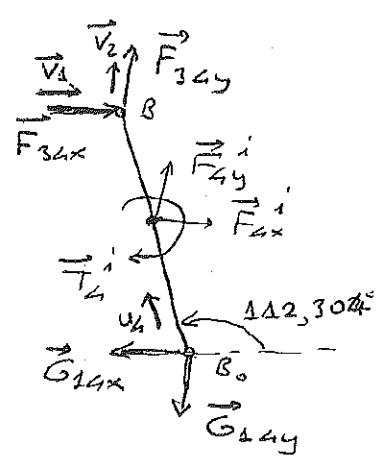
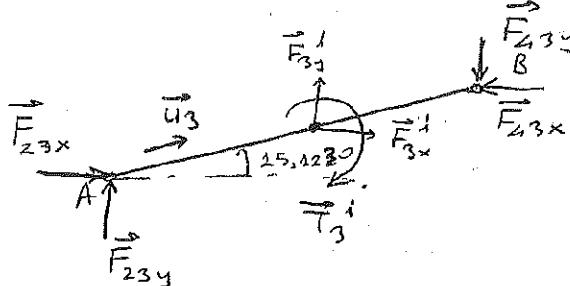
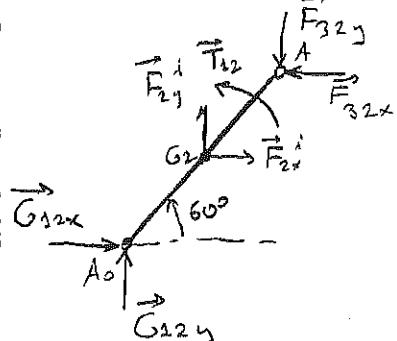
$$\vec{F}_4^i = -m_4 \vec{a}_{G_4} = -0,8 k_4, (-17,3736\vec{i} - 14,4156\vec{j}) = 17,3736\vec{i} + 14,4156\vec{j}$$

$$I_{G_4} = \frac{1}{12} m_4 l_s^2 = \frac{1}{12} \cdot 0,8 \cdot (0,6m)^2 = 0,024 \text{ kg} \cdot m^2$$

$$\vec{T}_4^i = -I_{G_4} \vec{\alpha}_{14} = -0,024 \cdot (72,816 \vec{i}) = -1,7236 \vec{k} \text{ N.m}$$

## Serbest Cism Gereklilikleri:

(6)



## Denge Denklemleri:

Uzunluk:

$$\leq \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{34x} + F_{4x}^i - G_{14x} = 0 \Rightarrow [F_{34x} - G_{14x} = -13,9] \quad (1)$$

$$\leq \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{34y} + F_{4y}^i - G_{14y} = 0 \Rightarrow [F_{34y} - G_{14y} = -11,5325] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \leq M_{B_0} = 0 \Rightarrow & (0,6\vec{u}_4) \times (F_{34x}\vec{v}_1) + (0,6\vec{u}_4) \times (F_{34y}\vec{v}_2) + (0,3\vec{u}_4) \times (F_{4x}^i\vec{v}_1) \\ & + (0,3\vec{u}_4) \times (F_{4y}^i\vec{v}_2) - 1,7236 \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

$$[0,6 \cdot F_{34x} \cdot \sin(0-112,304^\circ) + 0,6 \cdot F_{34y} \cdot \sin(90-112,304^\circ)]$$

$$+ 0,3 \cdot 13,9 \cdot \sin(0-112,304^\circ) + 0,3 \cdot 11,5325 \cdot \sin(90-112,304^\circ) - 1,7236 \vec{E} =$$

$$-0,5551 F_{34x} - 0,2277 F_{34y} - 3,858 - 1,313 - 1,7236 = 0$$

$$\Rightarrow [0,5551 F_{34x} + 0,2277 F_{34y} = -6,8946] \quad (1)$$

Uzunluk 2:

$$\begin{aligned} \leq \vec{M}_A = 0 \Rightarrow & (0,8\vec{v}_3) \times (-F_{43x}\vec{v}_1) + (0,8\vec{v}_3) \times (-F_{43y}\vec{v}_2) + (0,4\vec{v}_3) \times (F_{3x}^i\vec{v}_1) \\ & + (0,4\vec{v}_3) \times (F_{3y}^i\vec{v}_2) - 0,6304 \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [-0,8 \cdot F_{43x} \cdot \sin(0-15,123^\circ) - 0,8 \cdot F_{43y} \cdot \sin(90-15,123^\circ) + 0,4 \cdot 27,2726 \cdot \sin(0-15,123^\circ)] \\ + 0,4 \cdot 31,736 \cdot \sin(90-15,123^\circ) - 0,6304 \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

$$0,2087 F_{43x} - 0,7723 F_{43y} - 2,8566 + 12,2548 - 0,6304 = 0$$

$$[0,2082 F_{43x} - 0,7723 F_{43y} = -8,7678] \quad (2)$$

(10) u. (12) numerisch den Werten:

(7)

$$\left. \begin{array}{l} F_{34x} + 0,4202 F_{34y} = -12,4205 \\ F_{43x} - 3,7005 F_{43y} = -42,0115 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} F_{34x} = F_{43x} \\ F_{34y} = F_{43y} \end{array}$$

$$4,1107 F_{34y} = 29,591 \Rightarrow \boxed{F_{34y} = 7,1985 \text{ N}} \\ \times \boxed{7,20 \text{ N}} = F_{43y}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{34x} = -15,3733 \text{ N}} \\ \boxed{-15,37 \cdot N} = F_{43x}$$

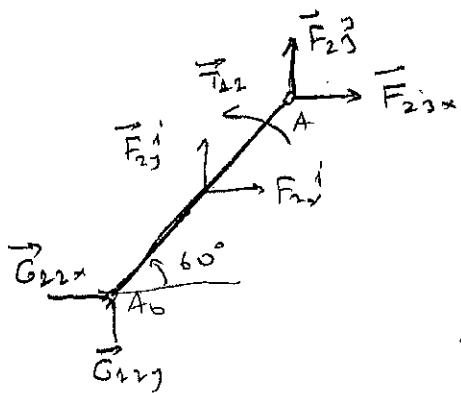
$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{23x} + F_{34x} - F_{43x} = 0$$

$$\Rightarrow F_{23x} + 27,3736 + 15,37 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{23x} = -42,75 \text{ N}} = F_{32x}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{23y} + F_{34y} - F_{43y} = 0$$

$$F_{23y} + 31,736 - 7,20 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{23y} = -24,54 \text{ N}} = F_{32y}$$

zu 2: Drehmoment um A (F<sub>23</sub> i sin)



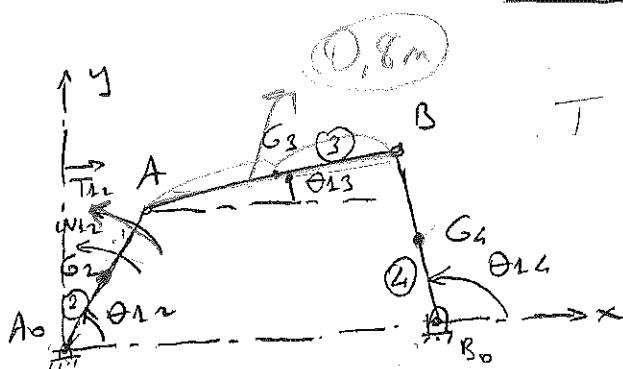
$$\sum M_A = 0$$

$$-42,75 \cdot 0,4 \cdot \sin 60^\circ + 24,54 \cdot 0,4 \cdot \cos 60^\circ \\ - 5 \cdot 0,2 \cdot \sin 60^\circ + 8,66 \cdot 0,2 \cdot \cos 60^\circ \vec{k} + T_{12} = 0$$

$$\Rightarrow T_{12} = 9,9 \text{ N.m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}_{12} = 9,9 \text{ N.m}}$$

$$\text{ÖDEV-3: } -\frac{1}{12} \cdot T_{12} f^2$$



$$|AG_2| = |G_2A| = 0.2 \text{ m}$$

$$|AG_3| = |G_3B| = 0.4 \text{ m}$$

$$|BG_4| = |G_4B_0| = 0.3 \text{ m}$$

$$|AB_0| = 1.2 \text{ m}$$

$$(m_2 = 0.5 \text{ kg}, m_3 = 1 \text{ kg}, m_4 = 0.8 \text{ kg})$$

$$\theta_{12} = 60^\circ \Rightarrow \dot{\theta}_{12} = \vec{w}_{12} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ radyan/s} \Rightarrow \ddot{\theta}_{12} = \alpha_{12} = 0$$

$$\ddot{T}_{12} = ?$$

Virtuel iş pressyonu kullanınız. (Yatay düzleme, sırıtma)

Gözleme

Kinematik Analiz Sonucu

$$\theta_{14} = 112,304^\circ, \theta_{13} = 15,123^\circ$$

$$\dot{\theta}_{13} = \vec{w}_{13} = -3,9876 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\dot{\theta}_{14} = \vec{w}_{14} = 1,2441 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\ddot{\theta}_{12} = \vec{\alpha}_{13} = 12,82 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\ddot{\theta}_{14} = \vec{\alpha}_{14} = 7,816 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$F = -m_1 g$$

$$T = -Ig$$

olarak Ödev 2'de  
bulundurulur.

$$T = -Ig$$

Ağırlık merkezinin pozisyonu ve formeleri

$$\vec{v}_{G_2} = -2,732 \vec{x} + (1 \vec{y}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{a}_{G_2} = -20 \vec{x} - 17,3205 \vec{y} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{v}_{G_3} = -3,048 \vec{x} + 0,4602 \vec{y} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{a}_{G_3} = -27,3776 \vec{x} - 31,236 \vec{y} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{v}_{G_4} = -1,316 \vec{x} - 0,5338 \vec{y} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{a}_{G_4} = -17,3236 \vec{x} - 14,4156 \vec{y} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

100

70

40

olarak Ödev 2'de  
bulundurulur.

$$T = -$$

100

50, 100

A tolet kúnet ve momentler:

$$\vec{F}_2^i = 5\vec{i} + 8,66\vec{j} \text{ N}$$

M. C

~~$\vec{T}_2^i$~~

$$\vec{F}_3^i = 27,3236\vec{i} + 31,736\vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{T}_3^i = -0,6304\vec{k} \text{ N.m}$$

$$\vec{F}_4^i = 13,9\vec{i} + 11,5325\vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{T}_4^i = -1,7236\vec{k} \text{ N.m}$$

olaylı Oder 2<sup>te</sup>  
bulunurdu

Virtuell GÖL Prinzip

$$\vec{F}_2^i \cdot \vec{v}_{G2} + \vec{F}_3^i \cdot \vec{v}_{G3} + (\vec{T}_3^i \cdot \vec{\omega}_{12}) + (\vec{F}_4^i \cdot \vec{v}_{G4}) + \vec{T}_4^i \cdot \vec{\omega}_{14} + (\vec{T}_4^i \cdot \vec{\omega}_{23}) = 0$$

+ (2,5238)

$$(-8,66 + 8,66) + (-83,4347 + 14,6049) + (-18,2924 - 6,2252)$$

$$+ (-8,1218) + 10T_2 = 0$$

$$\Rightarrow 10T_2 - 99 = 0 \Rightarrow \boxed{T_2 = 9,9 \text{ N.m}}$$

## BÖLÜM 3

### DENGELİME

Giriş : Gesitli makina parçalarında gerek dizayn aşamasında gerekse imalat işlemlerinden gelen ve önlenemeyeş gesitli hataların sonucunda kütle dağılımında meydana gelen düzgünsüzlikler dengesizlik olarak tanımlanır. Bir makinedeki dönen uzuvarlar dengelenmemişse, harmonik olarak değişen atalet kuvvetleri oluşur. Bu kuvvetler yataklardan makinanın diğer uzuvalarına iletilir. Bu tür kuvvetler makinalarda titresim ve gürültünün temel nedenidir. Ayrıca, titreyen bir gövdenin olması durumundaki makinanın yaptığı işin kaliteside olumsuz yönde etkilenecektir. Örneğin, titreyen bir yüzey taşkama makinasından elde edilebilecek hassasiyet sınırlı olacaktır.

Dengeleme : (Günlük hayatı BALANS olarak da adlandırılmaktadır)

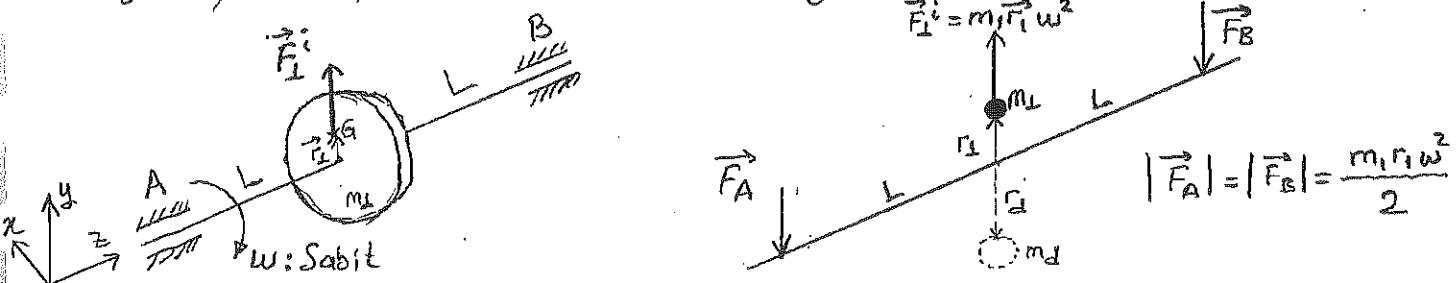
Atalet kuvvetlerinden kaynaklanan yatak kuvvetlerini yok etmek, sıfırlamak için dönen uzuvlara kütle eklenmesi veya çıkartılmasıdır.

Bu kısımda iki tür dengelmeden bahsedeceğiz :

- 1) Statik dengelime
- 2) Dinamik dengelime

Statik Dengeleme :

Dönen bir makina parçasının, kütle merkezi dönme eksenini üzerinde değılse, dönen parça statik olarak dengesizdir. Balanssız dönen bir disk düşünelim:



$m_1 r_1$ : Dönen parçanın dengesizliği,  $m_2$ : Dengeleme kütlesi,  $r_2$ : Dönen eksenine uzaklığı  
 \* Statik dengelmede amacımız, kütle merkezini dönme eksenine getmetir, ve  $\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$  yapmaktır. ①

\* Balanslanmamış kütteker aynı düzleme üzerindedir.

Önceki sayfadaki şekilde verilen diskin dengelenmesi için balansız kütlenin tam karşı tarafına,  $r_d$  mesafede bir  $m_d$  kütlesi eklenerek kütte merkezi döilage eksenine getirilebilir. Yani,

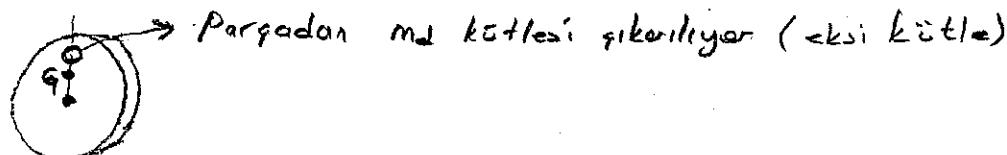
$$m_1 r_1 \omega^2 = m_d r_d \omega^2 \Rightarrow m_1 r_1 = m_d r_d$$

Keyfi olarak seçilen bir  $r_d$  mesafesi için,

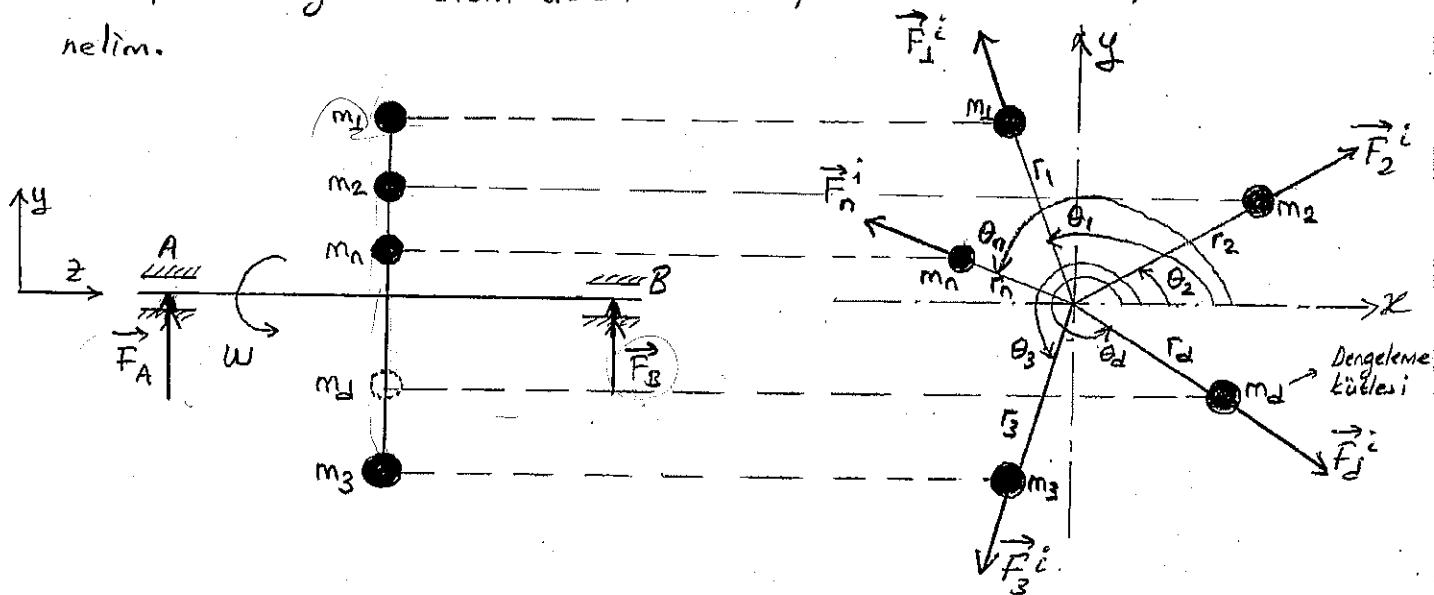
$$m_d = \frac{m_1 r_1}{r_d}$$

olarak elde edilir. Böylece parça dengelenmiş ve yatay kuvvetleri sıfırlanmış olur.

Diger tarafından, alternatif olarak, balansız kütte tarafından kütte çekilebilir.



Şimdi aynı düzleme üzerinde bir çok balanslanmamış kütte düşünelim.



Amaç: Kütte merkezinin döilage eksenine gelecek,  $(\vec{F}_A + \vec{F}_B)$ 'yi sıfır yapacak,  $m_d$  dengeleme kütlesini ve bu kütlenin açısal pozisyonu hesaplamak.

Kuvvet dengesi:  $\sum \vec{F} = 0$

$$\vec{F}_1^c + \vec{F}_2^c + \dots + \vec{F}_n^c + \vec{F}_d + (\vec{F}_A + \vec{F}_B) = 0$$

Yataylardan gelen kuvvetlerin toplamı

(2)

$m_d$  ve  $\vec{r}_d$ 'yi söyle seçelim ki  $F_A + F_B = 0$  olsun.

$$\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i + \dots + \vec{F}_{n-1}^i + \vec{F}_d^i = 0$$

$$m_1 \vec{r}_1 \cdot \vec{u}^2 + m_2 \vec{r}_2 \cdot \vec{u}^2 + \dots + m_{n-1} \vec{r}_{n-1} \cdot \vec{u}^2 + m_d \vec{r}_d \cdot \vec{u}^2 = 0$$

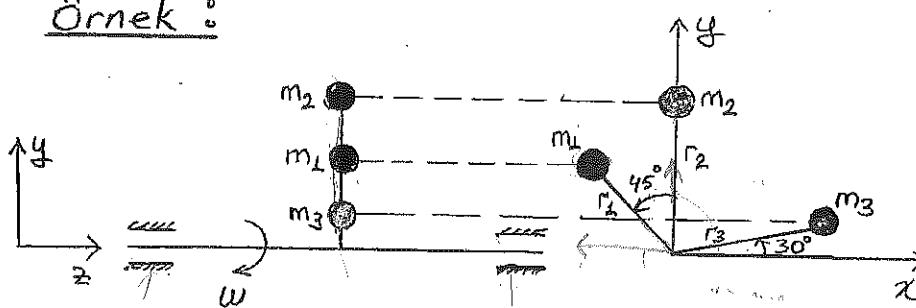
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i + m_d \vec{r}_d = 0$$

Bu denklem sistemin ağırlık merkezinin (kütle merkezinin) dönme ekseniinde olduğunu göstermektedir.

Bu denklemden  $m_d \vec{r}_d$  bulunur. [Yönü ve şiddeti ( $m_d \vec{r}_d$ )]. Seçilen  $r_d$  uzaklığına göre kütle,  $m_d$ , belirlenir.

Dengelene hesaplarında genellikle  $m_d \vec{r}_d$  şiddeti değeri elde edilecektir. Kütle veya merkezden uzaklık istenilen bir değer seçildiğinde diğer parametre değeri hesaplanabilir. Uygulamada genellikle merkezden uzaklık,  $r_d$ , seçilir (kütlelerin yerleştirilebileceği yerlerin sınırlı olmasından dolayı). Bu seçilen uzaklığa göre dengelene külesi bulunur.

Örnek :



$$m_1 = 1,5 \text{ kg}, m_2 = 2,5 \text{ kg}, m_3 = 2,0 \text{ kg}$$

$$r_1 = 20 \text{ mm}, r_2 = 30 \text{ mm}, r_3 = 15 \text{ mm}$$

Sistemi dengelendirmek için gerekli olan  $m_d \vec{r}_d$  şiddetini ve yönünü bulunuz.

1. Top ekince  $\rightarrow w$  yok

2. Yatır. Kırıklıklar  $\rightarrow w$  var

Gözleme:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i + m_d \vec{r}_d = 0 \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_d \vec{r}_d = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

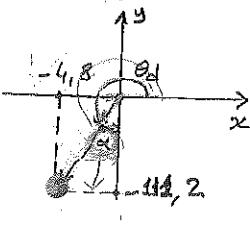
$$\vec{r}_1 = 20 [\cos 135 \vec{i} + (\sin 135 \vec{j})] \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 = -21,2 \vec{i} + 21,2 \vec{j} \text{ (kg.mm)} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\vec{r}_2 = 30 \vec{j} \Rightarrow m_2 \vec{r}_2 = 75 \vec{j} \text{ (kg.mm)} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (3)$$

$$\vec{r}_3 = 15 [\cos 30 \vec{i} + \sin 30 \vec{j}] \Rightarrow m_3 \vec{r}_3 = 26 \vec{i} + 15 \vec{j} \text{ (kg.mm)} \quad \dots \dots \dots (4)$$

(2), (3) ve (4) değerleri (1)'de yerine yazılırsa:

$$4,8 \vec{i} + 11,2 \vec{j} + m_d \vec{r}_d = 0 \Rightarrow m_d \vec{r}_d = -4,8 \vec{i} - 11,2 \vec{j}$$

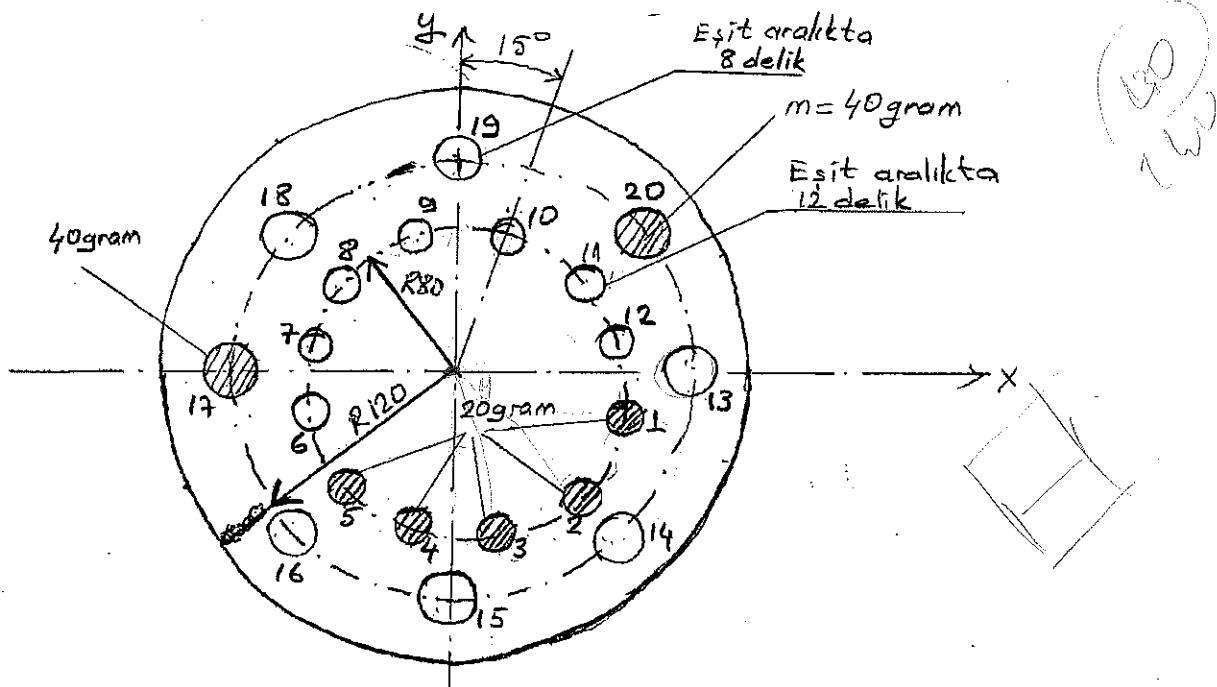


$$\tan \alpha = \frac{-4,8}{-11,2} \Rightarrow \alpha \approx 2,47 \Rightarrow \theta_d \approx 267,53^\circ$$

$$m_d \vec{r}_d = \sqrt{4,8^2 + 11,2^2} \Rightarrow m_d \vec{r}_d = 111,3 \text{ kg.mm}$$

Seçilen keyfi bir  $r_d$  için  
 $m_d$  hesaplanabilir

ÖRNEK :



Yukarıdaki şekilde bir mile bağlı ince bir disk görülmektedir. 120 mm yarıçapta 8 delik, 80 mm yarıçapta ise 12 delik bulunmaktadır. Diskte bulunan delikler boşken disk tam olarak dengededir. 1, 2, 3, 4 ve 5 numaralı deliklere herbiri 20 gram gelen civata, 17 ve 20 numaralı deliklere is 40 gram gelen civata fakıldığından denge bozulmuştur. Boş olan deliklere gerekli büyüklükte somun yarıştırarak dengelenme yapmamız gerekmektedir. Somun konacak delikleri ve somun ağırlığını belirleyin.

Cözüm :

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i + m_d \vec{r}_d = 0$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_4 \vec{r}_4 + m_5 \vec{r}_5 + m_{17} \vec{r}_{17} + m_{20} \vec{r}_{20} + m_d \vec{r}_d = 0$$

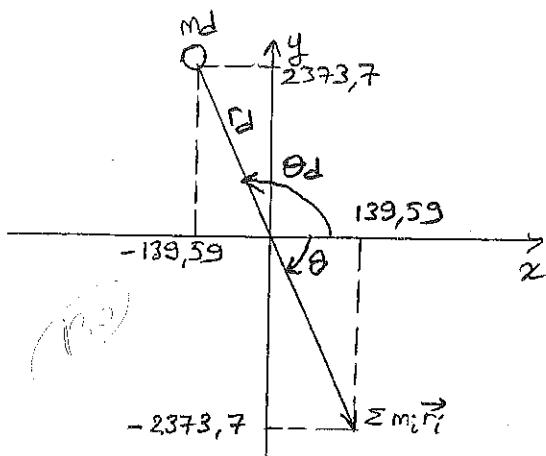
$$20 \cdot 80 [\cos(-15) \vec{i} + \sin(-15) \vec{j}] + 20 \cdot 80 [\cos(-45) \vec{i} + \sin(-45) \vec{j}] + 20 \cdot 80 [\cos(-75) \vec{i} + \sin(-75) \vec{j}] \\ + 20 \cdot 80 [\cos(-105) \vec{i} + \sin(-105) \vec{j}] + 20 \cdot 80 [\cos(-135) \vec{i} + \sin(-135) \vec{j}] + 40 \cdot 120 [\cos 180 \vec{i} + \sin 180 \vec{j}] \\ + 40 \cdot 120 [\cos 45 \vec{i} + \sin 45 \vec{j}] + m_d \vec{r}_d = 0$$

$$[1545,48 + 1131,37 + 44,11 - 44,11 - 1131,37 - 4800 + 3394,11] \vec{i} +$$

$$[-44,11 - 1131,37 - 1545,48 - 1545,48 - 1131,37 + 0 + 3394,11] \vec{j} + m_d \vec{r}_d = 0$$

$$\Rightarrow m_d \vec{r}_d = -139,59 \vec{i} + 2373,7 \vec{j}$$

(4)



$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{-2373,7}{139,59} \right) \Rightarrow \theta \approx -86,63^\circ$$

$$\theta_D = 180 - 86,63^\circ \Rightarrow \theta_D = 93,37^\circ$$

ve

$$\sum m_i r_i = 2378 \text{ gram} \cdot \text{mm}$$

$$m_D r_D = 2378 \text{ gram} \cdot \text{mm}$$

Şeklinde olduğumuz dönen eksen takımına göre  $93,37^\circ$  açı yapan  $m_D \vec{r}_D$  2378 gram. mm olacak şekilde kütle yerleştirirsek sistem dengeye gelecektir. Kütleyi sadece deliklere yerlestirebileceğimizden dolayı  $93,37^\circ$  ye en yakın delikler 9 ve 10 numaralı deliklerdir ( $r = 80 \text{ mm}$ ). Bu deliklere konan kütlerin oluşturacağı atalet kuvveti  $m_D \vec{r}_D$  'ye eşit olmalıdır.

$$m_9 \vec{r}_9 + m_{10} \vec{r}_{10} = m_D \vec{r}_D = -139,59 \vec{i} + 2373,7 \vec{j}$$

$$m_9 \cdot 80 [\cos 105^\circ \vec{i} + \sin 105^\circ \vec{j}] + m_{10} \cdot 80 [\cos 75^\circ \vec{i} + \sin 75^\circ \vec{j}] = -139,59 \vec{i} + 2373,7 \vec{j}$$

i yönü:  $m_9 \cdot 80 \cos 105 + m_{10} \cdot 80 \cos 75^\circ = -139,59 \quad \boxed{m_9 = 18,7 \text{ gram}}$

j yönü:  $m_9 \cdot 80 \sin 105 + m_{10} \cdot 80 \sin 75^\circ = 2373,7 \quad \boxed{m_{10} = 12,0 \text{ gram}}$

Not: Balanslanmamış kütelerin hepsi aynı düzlemede ise dengeleme için (yani,  $\vec{F}_A = \vec{F}_B = 0$  yapmak için) statik dengeleme yapmak yetertidir. Ama balanssız küteler farklı düzlemlerde ise DINAMİK DENGELİME gereklidir ( $\vec{F}_A = \vec{F}_B = 0$  olması için).

Statik dengeleme "Tek düzlemede dengeleme" olarak da adlandırılır. Dinamik dengeleme, sabit açısal döndürmeden dolayı oluşan atalet kuvvetlerinin dengelemesi (statik dengeleme) ile birlikte atalet kuvvetlerin oluşturacağı momentlerin de dengelemesini ifermektedir.

## Dinamik Dengeme:

Genel olarak statik denge ağırlık merkezinin dönme eksenini üzerinde olması ile sınırlıdır. Bu nedenle statik denge sadece kalınlık, az olan disk, fan, kasnak gibi dönen cisimler için kullanılır. Bu nedenle statik dengeme "Tek düzlemede dengeme" olarak da adlandırılır. Dinamik dengeme ise daha genel olup, sabit açısal dönmeden oluşan atalet kuvvetlerinin dengelenmesi ile birlikte atalet kuvvetlerinin oluşturacağı momentinde dengelenmesini iferir.

Dinamik dengeme için sağlanması gereklili denklemler:

$$1) \sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{F}_{\text{yatay kuvveti}} + \sum \vec{F}_{\text{balanssızlık}} = 0$$

Burada amacımız  $\sum \vec{F}_{\text{yatay kuvveti}} = 0$  yapmak olduğundan,

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{balanssızlık}} = 0}$$

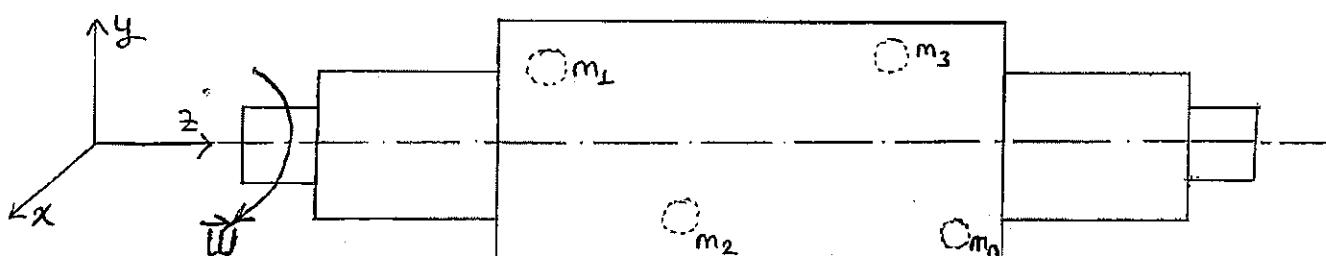
$$2) \sum \vec{M} = 0 \quad (\text{herhangi bir noktaya göre})$$

$$\sum \vec{M}_{\text{yatay kuvvetleri}} + \sum \vec{M}_{\text{balanssızlık}} = 0$$

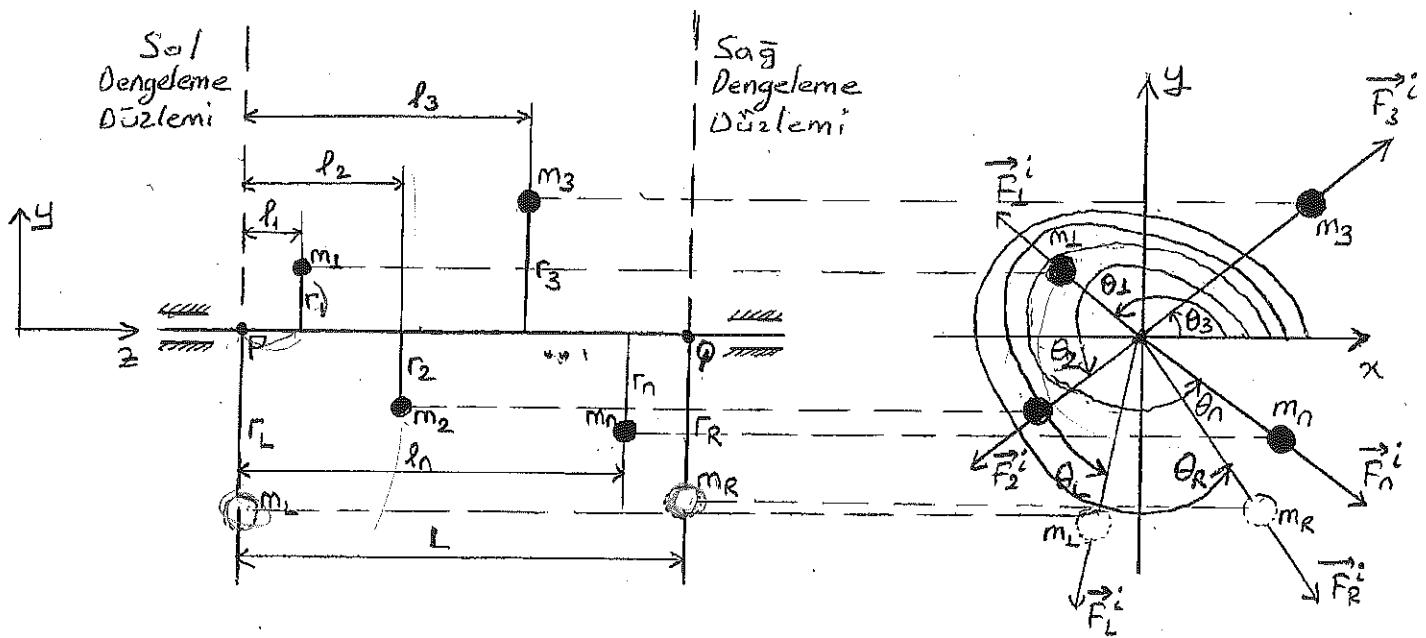
$\vec{F}_A = \vec{F}_B = 0$  olduğundan  $\sum \vec{M}_{\text{yatay kuvvetleri}} = 0$  olacaktır. O halde,

$$\boxed{\sum \vec{M}_{\text{balanssızlık}} = 0}$$

Aşağıdaki şekilde gösterilen bir mili ele alalım ve mil üzerinde dengelenmemiş  $m_1, m_2, m_3$  ve  $m_n$  küteleri olsun.



(6)



$\omega$  sabit hızıyla dönen mil üzerindeki不平衡likten kaynaklanan alet kuvvetleri yataklara iletilecek ve milin bağlı olduğu gördeyi yatay ve dikey yönlerde sarsacaktır.

Dönen dengesiz kütelerden dolayı oluşan bu yatak kuvvetlerini yok etmek için mil üzerine dengeleme küteleri koymamız gereklidir. Hem kuvvet hem de moment dengelemesi yapılması gerekligidir. Tek bir dengeleme kütlesi yeterli olmayacağından, bu nedenle mil üzerinde mil eksenine dik iki düzleme seçilir. Bu düzlemler SOL ve SAĞ dengeleme düzlemleri olarak adlandırılır. Dengeleme kütelerini azaltmak ve hassasiyeti artırmak için bu iki düzlemin mümkün olduğunca birbirinden uzak seçilmesi uygun olacaktır.

Kullanılacak denklemler :

$$1) \text{ Kuvvet dengesi : } \sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i + \dots + \vec{F}_n^i + \vec{F}_L^i + \vec{F}_R^i = 0$$

$$m_1 \vec{r}_1 \psi + m_2 \vec{r}_2 \psi + \dots + m_n \vec{r}_n \psi + m_L \vec{r}_L \psi + m_R \vec{r}_R \psi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i + m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = 0}$$

$$2) \text{ Moment dengesi : } \sum \vec{M} = 0 \quad (\sum \vec{M}_{sol} = \sum \vec{M}_P = 0 \text{ veya } \sum \vec{M}_{sağ} = \sum \vec{M}_Q = 0)$$

$$* \quad \sum \vec{M}_{sol} = \sum \vec{M}_P = 0$$

$$(l_1 \vec{k}) \times \vec{F}_1^i + (l_2 \vec{k}) \times \vec{F}_2^i + \dots + (l_n \vec{k}) \times \vec{F}_n^i + (L \vec{k}) \times \vec{F}_R^i = 0$$

$$l_1 m_1 \psi (\vec{k} \times \vec{r}_1) + l_2 m_2 \psi (\vec{k} \times \vec{r}_2) + \dots + l_n m_n \psi (\vec{k} \times \vec{r}_n) + L m_R \psi (\vec{k} \times \vec{r}_R) = 0$$

$$m_1 l_1 (\vec{k} \times \vec{r}_1) + m_2 l_2 (\vec{k} \times \vec{r}_2) + \dots + m_n l_n (\vec{k} \times \vec{r}_n) + m_R L (\vec{k} \times \vec{r}_R) = 0$$

(7)

$$*\sum \vec{M}_{\text{sağ}} = \sum \vec{M}_\varphi = 0$$

$$-(L-\ell_1)m_1 \cancel{(\vec{k} \times \vec{r}_1)} - (L-\ell_2)m_2 \cancel{(\vec{k} \times \vec{r}_2)} - \dots - (L-\ell_n)m_n \cancel{(\vec{k} \times \vec{r}_n)} - Lm_L \cancel{(\vec{k} \times \vec{r}_L)} \\ - m_1(L-\ell_1)(\vec{k} \times \vec{r}_1) - m_2(L-\ell_2)(\vec{k} \times \vec{r}_2) - \dots - m_n(L-\ell_n)(\vec{k} \times \vec{r}_n) - m_L L (\vec{k} \times \vec{r}_L) = 0$$

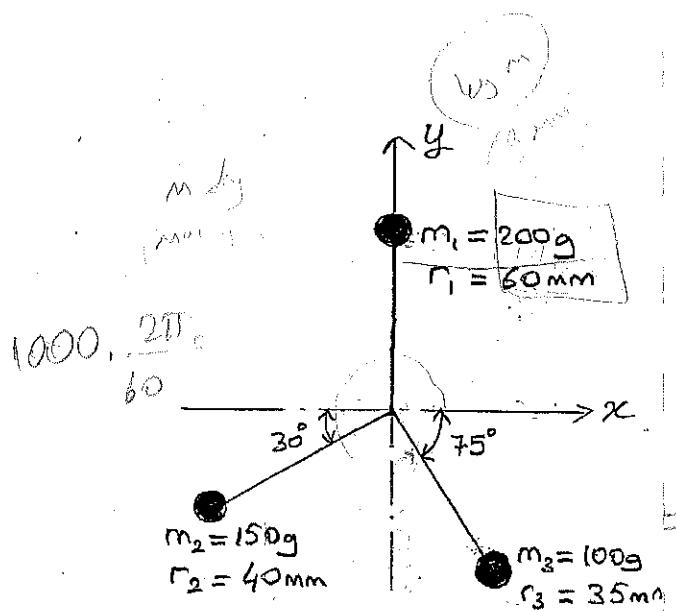
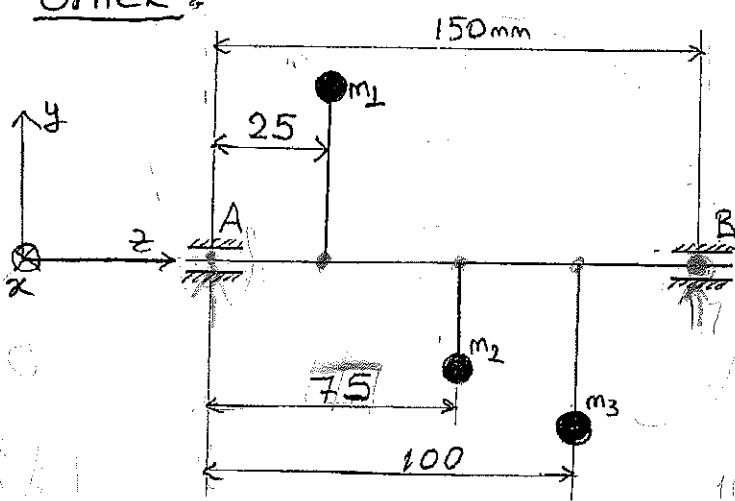
NOT:

i-) Dengelenmiş bir mil her açıda dengelenmiş olacaktır. Ayrıca dikkat edilirse yukarıdaki denklemlerde  $\omega$  açısal hız terimi yoktur.

ii-) Dengeleme küteleri her zaman mite eklenen küteler olmaya bilir. Milden sıkarılan kütelerde olabilir. Bu durumda denklemlerde  $m_L$  yerine  $-m_L$ ,  $m_R$  yerine  $-m_R$  yazılmalıdır, yani eksi kütle).

iii-) Dengesiz küteler her zaman yatakların veya dengelene düzlemlerinin arasında olmayı bilin.

Örnek:



Sekilde  $1000$  devir/dak hızla dönen bir mil üzerinde bulunan  $3$  dengesiz kütte ve konumları görülmektedir. Bu dengesiz kütelerden dolayı, oluşacak olan yatak kuvvetlerini belirleyiniz.

Gözüm:

$M_1$  üzerinde kuvvet dengesini yazalım:  $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$

$$m_1 \vec{r}_1 \omega^2 + m_2 \vec{r}_2 \omega^2 + m_3 \vec{r}_3 \omega^2 + (\vec{F}_A + \vec{F}_B) = 0 \quad (1)$$

$$\omega = 1000 \frac{\text{devir}}{\text{dak}} \cdot \frac{1 \text{ devir}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ devir}} \Rightarrow \omega = 104,72 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (2)$$

$$\vec{r}_1 = 0,06 (\cos 30 \vec{i} + \sin 30 \vec{j}) \Rightarrow \vec{r}_1 = 0,06 \vec{j} \quad (2a)$$

$$\vec{r}_2 = 0,04 (\cos 210 \vec{i} + \sin 210 \vec{j}) \Rightarrow \vec{r}_2 = -0,035 \vec{i} - 0,02 \vec{j} \quad (2b)$$

$$\vec{r}_3 = 0,035 (\cos 285 \vec{i} + \sin 285 \vec{j}) \Rightarrow \vec{r}_3 = 0,003 \vec{i} - 0,034 \vec{j} \quad (2c)$$

$$\frac{1 \text{ devir}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ devir}} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$$

(8)

(2) nolu denklem ile verilen ifadeler ve  $\omega$  degeri (1)'de yerine yazilrsa.

$$0,2 \cdot 0,06 \vec{j} \cdot 104,72^2 + 0,15 \cdot (-0,035 \vec{i} - 0,02 \vec{j}) \cdot 104,72^2 + 0,1 \cdot (0,009 \vec{i} - 0,034 \vec{j}) \cdot 104,72^2 + \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$$

$$131,595 \vec{j} - 57,573 \vec{i} - 32,899 \vec{j} + 9,870 \vec{i} - 37,285 \vec{j} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 47,703 \vec{i} - 62,507 \vec{j} \quad \text{--- (3)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow K \times \vec{j}$$

$$(25 \vec{k}) \times (m_1 \vec{r}_1 \omega^2) + (75 \vec{k}) \times (m_2 \vec{r}_2 \omega^2) + (100 \vec{k}) \times (m_3 \vec{r}_3 \omega^2) + (150 \vec{k}) \times F_B (\cos \theta_B \vec{i} + \sin \theta_B \vec{j}) = 0$$

$$(25 \vec{k}) \times (131,595 \vec{j}) + (75 \vec{k}) \times (-57,573 \vec{i} - 32,899 \vec{j}) + (100 \vec{k}) \times (9,870 \vec{i} - 37,285 \vec{j}) + (150 \vec{k}) \times F_B (\cos \theta_B \vec{i} + \sin \theta_B \vec{j}) = 0$$

$$-3289,875 \vec{i} - 4317,975 \vec{j} + 2467,425 \vec{i} + 987 \vec{j} + 37285 \vec{i} + 150 F_B \cos \theta_B \vec{j} - 150 F_B \sin \theta_B \vec{i} =$$

$$2906,05 \vec{i} - 3330,975 \vec{j} + 150 F_B \cos \theta_B \vec{j} - 150 F_B \sin \theta_B \vec{i} = 0$$

$i$  bileseni :  $2906,05 - 150 F_B \sin \theta_B = 0 \Rightarrow 150 F_B \sin \theta_B = 2906,05 \quad \text{(4)}$

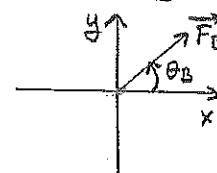
$j$  bileseni :  $-3330,975 + 150 F_B \cos \theta_B = 0 \Rightarrow 150 F_B \cos \theta_B = 3330,975 \quad \text{(5)}$

$$\frac{(4)}{(5)} \Rightarrow \tan \theta_B = \frac{2906,05}{3330,975} \Rightarrow \theta_B \approx \tan^{-1}(0,872) \Rightarrow \boxed{\theta_B = 41,08^\circ}$$

(4) nolu denklemde :

$$150 F_B \sin \theta_B = 2906,05 \Rightarrow 150 \cdot F_B \cdot \sin 41,08^\circ = 2906,05$$

$$\Rightarrow \boxed{F_B = 29,483 \vec{j}}$$



$$\boxed{\vec{F}_B = 29,483 \angle 41,08^\circ}$$

(3) nolu denklemde :

$$\vec{F}_A = 47,703 \vec{i} - 62,507 \vec{j} - F_B \cos \theta_B \vec{i} - F_B \sin \theta_B \vec{j}$$

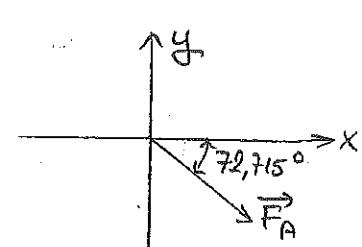
$$\vec{F}_A = 47,703 \vec{i} - 62,507 \vec{j} - 29,483 \cos 41,08^\circ \vec{i} - 29,483 \sin 41,08^\circ \vec{j}$$

$$\vec{F}_A = 47,703 \vec{i} - 62,507 \vec{j} - 22,224 \vec{i} - 19,374 \vec{j} \Rightarrow$$

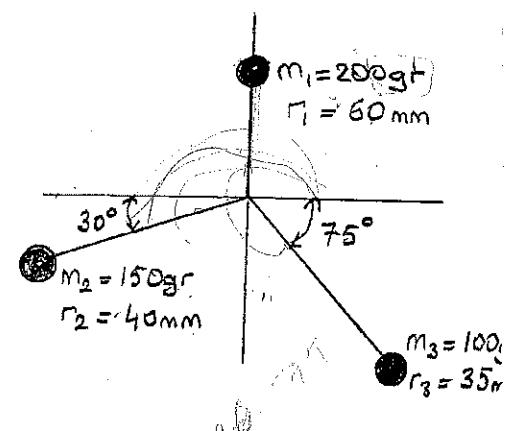
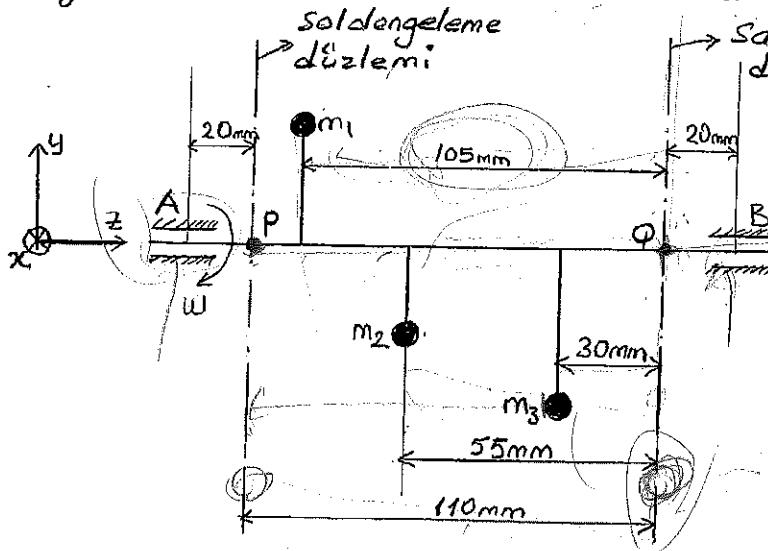
$$\vec{F}_A = 25,479 \vec{i} - 81,881 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_A = 85,754 \angle 287,285^\circ}$$

(5)



Örnek : Bir önceki örnekte verilen soru için aşağıda verilen düzlemlere yerleştirilecek kütelerin  $m_L r_L$  ve  $m_R r_R$  sıddetlerini ve yönlerini bulunuz.



Cözüm :

Dengelme sonucu :  $\vec{F}_A = \vec{F}_B = \vec{0}$  olmalı

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 \omega^2 + m_2 \vec{r}_2 \omega^2 + m_3 \vec{r}_3 \omega^2 + m_L \vec{r}_L \omega^2 + m_R \vec{r}_R \omega^2 = \vec{0}$$

$$200 \cdot 60 (\cos 30 \vec{i} + \sin 30 \vec{j}) + 150 \cdot 40 (\cos 210 \vec{i} + \sin 210 \vec{j}) + 100 \cdot 35 (\cos 285 \vec{i} + \sin 285 \vec{j}) \\ + [m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R] = \vec{0}$$

$$12000 \vec{j} - 5196,15 \vec{i} - 3000 \vec{j} + 905,87 \vec{i} - 3380,74 \vec{j} + m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = 4280,28 \vec{i} - 5619,26 \vec{j} \quad \dots \quad (1)$$

Sağ veya sol dengelme düzlemine göre moment alalım :

$$\sum \vec{M}_{\text{sağ}} = \sum \vec{M}_P = 0$$

$$(-105 \vec{k}) \times (m_1 \vec{r}_1 \omega^2) + (-55 \vec{k}) \times (m_2 \vec{r}_2 \omega^2) + (-30 \vec{k}) \times (m_3 \vec{r}_3 \omega^2) + (-110 \vec{k}) \times (m_L \vec{r}_L \omega^2) = 0$$

$$-105 \cdot 200 \cdot 60 [\vec{k} \times (\cos 30 \vec{i} + \sin 30 \vec{j})] - 55 \cdot 150 \cdot 40 [\vec{k} \times (\cos 210 \vec{i} + \sin 210 \vec{j})]$$

$$-30 \cdot 100 \cdot 35 [\vec{k} \times (\cos 285 \vec{i} + \sin 285 \vec{j})] - 110 \cdot m_L r_L \cdot [\vec{k} \times (\cos \theta_L \vec{i} + \sin \theta_L \vec{j})] = 0$$

$$126000 \vec{i} + 285788,38 \vec{j} - 165000 \vec{i} - 27176 \vec{j} - 101422,21 \vec{i} - 110 m_L r_L \cos \theta_L \vec{j} \\ + 110 m_L r_L \sin \theta_L \vec{i} = 0$$

$$\text{İşleme : } 993577,79 + 110 m_L r_L \sin \theta_L = 0 \Rightarrow 110 m_L r_L \sin \theta_L = -993577,79 \dots (2)$$

$$\text{İşleme : } 258612,38 - 110 m_L r_L \cos \theta_L = 0 \Rightarrow 110 m_L r_L \cos \theta_L = 258612,38 \dots (3)$$

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \tan \theta_L = \frac{-993577,79}{258612,38} \Rightarrow \theta_L = -75,41^\circ$$

4. Büyle

(3) nolu denklemde:

$$m_L r_L = \frac{258612,38}{110 \cdot \cos(-75,41)} \Rightarrow m_L r_L = 9333,5 \text{ g.m.m}$$

(1) nolu denklemde bu değerleri yerine yazarsak:

$$m_R r_R = 1939,26 \vec{i} + 3413,26 \vec{j}$$

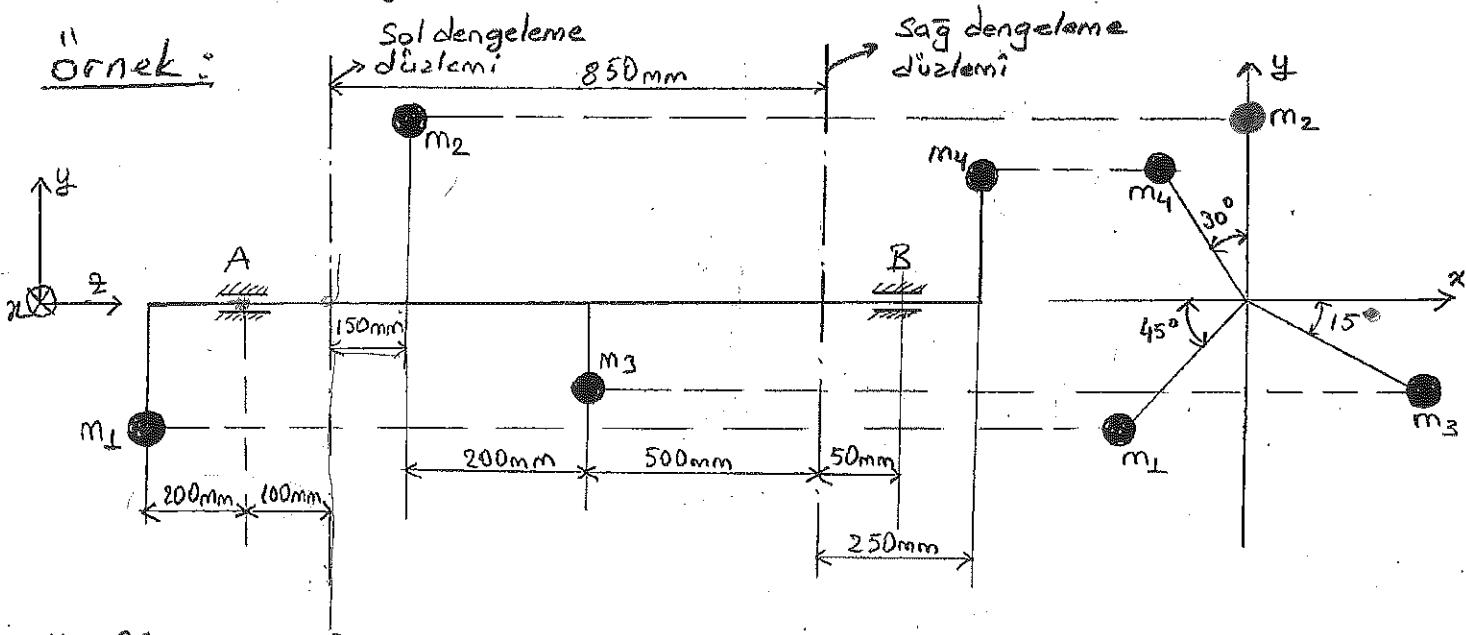
$$\Rightarrow m_R r_R = 3925,7 \text{ g.m.m} \quad \text{ve} \quad \theta_R = 60,4^\circ$$



Sağ ve sol dengeleri küteleri sağ ve sol dengelerde düzlemlerde istenilen yere yerleştirilebilir. Örneğin bu dengeleri kütelerini 50 mm yarıçapta yerleştirirse:

$$m_R = 78,5 \text{ gram} \quad \text{ve} \quad m_L = 186,7 \text{ gram} \quad \text{olmalıdır.}$$

Örnek:



$$m_1 = 20 \text{ gram}, m_2 = 30 \text{ gram}, m_3 = 10 \text{ gr}, m_4 = 40 \text{ gr}, r_1 = 40 \text{ mm}, r_2 = 50 \text{ mm}, r_3 = 50 \text{ mm}, r_4 = 30 \text{ mm}$$

Sağ ve sol düzlemlere kütle ekleyerek sistemi dengeye getirmemiz istenmektedir.  $m_L r_L$  ve  $m_R r_R$  siddetlerini ve yönlerini bulunuz.

Cözüm:

(Dengelme sonucu  $\vec{F}_A = \vec{F}_B = 0$  olacaktır.)

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 \omega^2 + m_2 \vec{r}_2 \omega^2 + m_3 \vec{r}_3 \omega^2 + m_4 \vec{r}_4 \omega^2 + m_L \vec{r}_L \omega^2 + m_R \vec{r}_R \omega^2 = 0$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_4 \vec{r}_4 + m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = 0$$

$$20 \cdot 40 \cdot [\cos 225 \vec{i} + \sin 225 \vec{j}] + 30 \cdot 50 \cdot [\cos 90 \vec{i} + \sin 90 \vec{j}] + 10 \cdot 50 \cdot [\cos(-15) \vec{i} + \sin(-15) \vec{j}] \\ + 40 \cdot 30 \cdot [\cos 120 \vec{i} + \sin 120 \vec{j}] + m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = 0$$

(11)

$$\Rightarrow m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = 682,7224 \vec{i} - 1844,1351 \vec{j} \quad \text{--- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- (1)}$$

$$\sum \vec{M}_{sol} = 0 \Rightarrow$$

$$-300\vec{k} \times (m_1 \vec{r}_1 \omega^2) + 150\vec{k} \times (m_2 \vec{r}_2 \omega^2) + 350\vec{k} \times (m_3 \vec{r}_3 \omega^2) + 1100\vec{k} \times (m_4 \vec{r}_4 \omega^2) + 850\vec{k} \times (m_R \vec{r}_k \omega^2) = 0$$

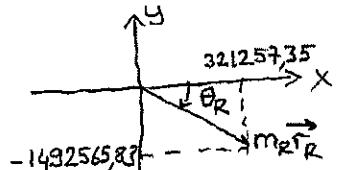
$$-300\vec{k} \times [20.40.(\cos 225\vec{i} + \sin 225\vec{j})] + 150\vec{k} \times [30.50.(\cos 90\vec{i} + \sin 90\vec{j})] \\ + 350\vec{k} \times [10.50.(\cos(-15)\vec{i} + \sin(-15)\vec{j})] + 1100\vec{k} \times [40.30.(\cos 120\vec{i} + \sin 120\vec{j})] \\ + 850\vec{k} \times [m_R r_R (\cos \theta_R \vec{i} + \sin \theta_R \vec{j})] = 0$$

$$169705,63\vec{j} - 169705,63\vec{i} - 225000\vec{i} + 169037,02\vec{j} + 45293,33\vec{i} - 660000\vec{j} \\ - 1143153,53\vec{i} + 850m_Rr_R \cos\theta_R\vec{j} - 850m_Rr_R \sin\theta_R\vec{i} = 0$$

$$\Rightarrow 1492565,83\vec{i} - 321257,35\vec{j} - 850m_Rr_R \sin\theta_R \vec{i} + 850m_Rr_R (\cos\theta_R) \vec{j} = 0$$

$$\text{iyolu: } 850 \text{ m}_{R} \sin \theta_R = -1492565,83 \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \tan \Theta_R = \frac{-1492565,83}{321259,35} \Rightarrow \Theta_R = -77,853^\circ$$

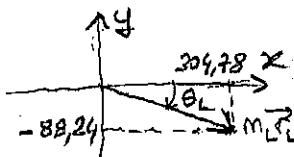


(2) noch danklenden ;

$$M_R F_R = 1796,1 \text{ gram} \cdot \text{mm}$$

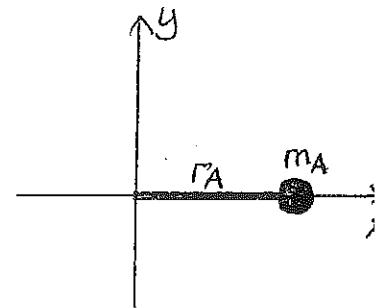
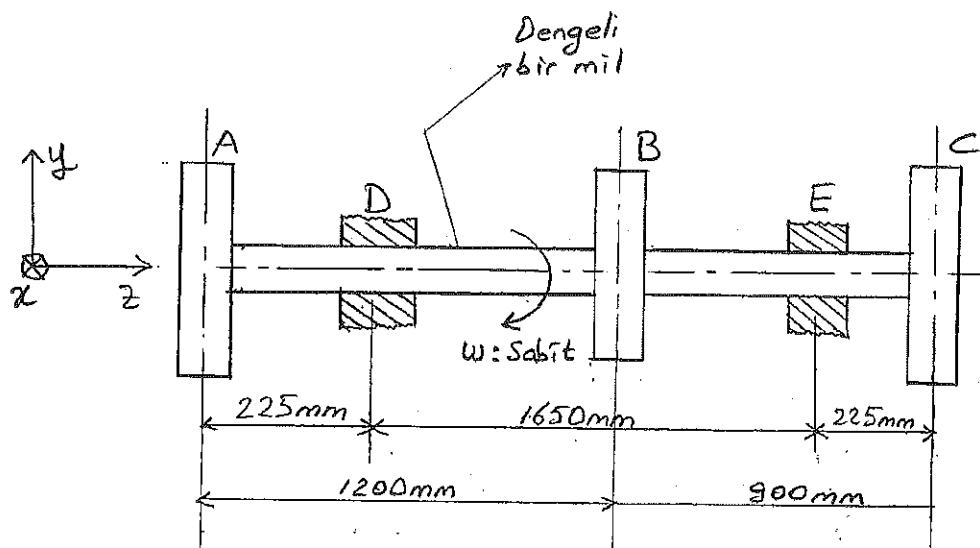
$$(1) \text{ nach denkender; } m_L \vec{r}_L = 304,78 \vec{i} - 88,24 \vec{j}$$

$$M_L \Gamma_L = 317,3 \text{ g-cm-mm} \quad \text{ve} \quad \theta_L = -16,147^\circ$$



clarat hesaplanır.

Örnek :



$$m_A = 15 \text{ kg}, m_B = 20 \text{ kg}, m_C = 16 \text{ kg}$$

$r_A = 25 \text{ mm}, r_B = 12 \text{ mm}, r_C = 18 \text{ mm}$  : Dönme ekseninden kaçıklıklar

a-) Kasnaklar birbirine göre döndürülerek statik denge elde edilmek istenmektedir. B ve C kasnaklarının statik denge için A kasnağına göre bağıl konumlarını belirleyin.

b-) Mil  $w = 150 \frac{\text{dak}}{\text{dak}}$  sabit açısal hız ile dönerken statik dengede olan bu milin yataylarına gelen kuvvetlerini belirleyin.

c-) A ve C kasnaklarına 400 mm yarıçapta küteler ekleyerek sistem dengeye getirilecektir. Dengeleme kütelerini ve açısal konumlarını belirleyin.

Fözüm:

a) statik denge için (Yatay kuvvetleri,  $\vec{f}_A + \vec{f}_E = 0$ ) ;

$$m_A \vec{r}_A \vec{w} + m_B \vec{r}_B \vec{w} + m_C \vec{r}_C \vec{w} = 0$$

$$15 \text{ kg} \cdot 25 \text{ mm} \cdot (\cos \theta_A \vec{i} + \sin \theta_A \vec{j}) + 20 \text{ kg} \cdot 12 \text{ mm} \cdot (\cos \theta_B \vec{i} + \sin \theta_B \vec{j}) + 16 \text{ kg} \cdot 18 \text{ mm} \cdot (\cos \theta_C \vec{i} + \sin \theta_C \vec{j}) = 0$$

$$375 \vec{i} + 240 \cos \theta_B \vec{i} + 240 \sin \theta_B \vec{j} + 288 \cos \theta_C \vec{i} + 288 \sin \theta_C \vec{j} = 0$$

İşlemler:  $240 \cos \theta_B + 288 \cos \theta_C = -375 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$

İşlemler:  $240 \sin \theta_B + 288 \sin \theta_C = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$

(1) ve (2) nolu denklemlerin kareleri alınır ve toplanırso;

$$57600 \cos^2 \theta_B + 138240 \cos \theta_B \cos \theta_C + 82944 \cos^2 \theta_C + 57600 \sin^2 \theta_B + 138240 \sin \theta_B \sin \theta_C + 82944 \sin^2 \theta_C = 140625$$

$$\cos(\theta_B - \theta_C)$$

(13)

$$\Rightarrow 57600 + 82944 + 138240 (\cos \theta_B \cos \theta_C + \sin \theta_B \sin \theta_C) = 140625$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_B - \theta_C) = 0,000586 \Rightarrow \boxed{\theta_B - \theta_C \approx 89,96^\circ} \text{ veya } \boxed{\theta_C - \theta_B \approx 89,96^\circ}$$

(2) nolu denklemler ;

$$240 \sin \theta_B = -288 \sin \theta_C$$

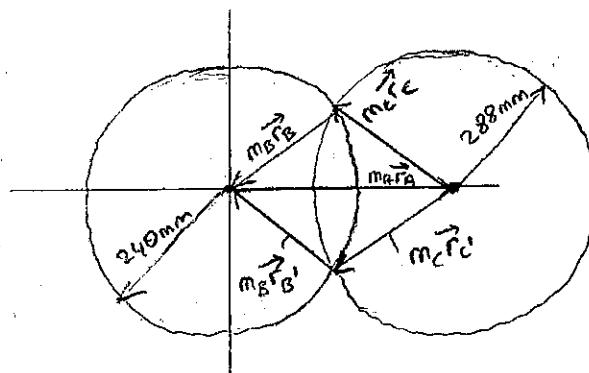
$$240 \sin(\theta_C + 89,96^\circ) = -288 \sin \theta_C$$

$$240 [\sin \theta_C \cos 89,96^\circ + \sin 89,96^\circ \cos \theta_C] = -288 \sin \theta_C$$

$$0,17 \sin \theta_C + 240 \cos \theta_C = -288 \sin \theta_C$$

$$240 \cos \theta_C + 288,17 \sin \theta_C = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

(3) nolu denklemler  $\theta_C$  değerini bulmadan önce statik denge için  $m_B \vec{r}_B$  ve  $m_C \vec{r}_C$  'nın konumlarına bakalım:



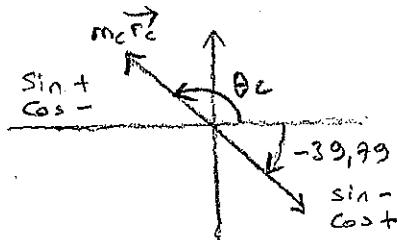
statik denge için ;

$$m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B + m_C \vec{r}_C = 0 \text{ olmalı.}$$

Yani şartları  $m_B \vec{r}_B = 240$  ve  $m_C \vec{r}_C = 288$  birim olan iki daire  $m_A \vec{r}_A$  vektörünün başlangıç ve bitiminden çizili şekilde görüldüğü gibi  $m_B \vec{r}_B$  ve  $m_C \vec{r}_C$  iin 2 farklı konfigürasyon var.

(3) nolu denklemler,

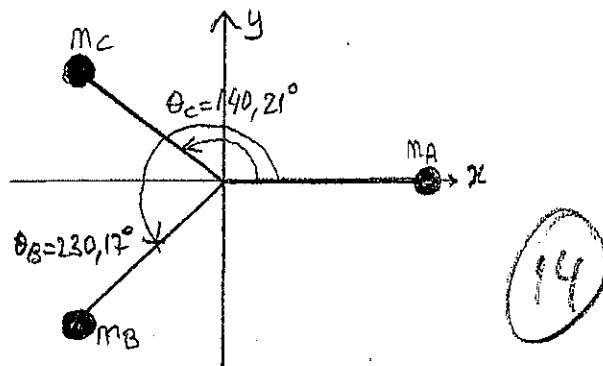
$$240 \cos \theta_C = -288,17 \sin \theta_C \Rightarrow \tan \theta_C = \frac{240}{-288,17} \approx -0,833 \approx -39,79$$



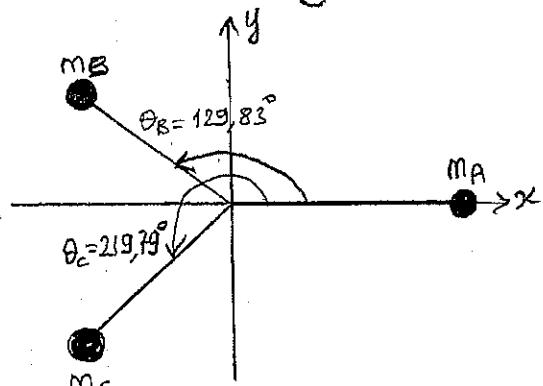
$$\Rightarrow \theta_C = 140,21^\circ \text{ olarak hesaplanır.}$$

$$\theta_B - \theta_C = 89,96^\circ \Rightarrow \theta_B = 230,17^\circ \text{ olarak hesaplanır.}$$

Sonuç olarak aşağıdaki şekillerde 2 farklı konfigürasyonlar verilmiştir



I. Konfigürasyon ( $\theta_B - \theta_C = 89,96^\circ$ )



II. Konfigürasyon ( $\theta_C - \theta_B = 89,96^\circ$ )

b) 1. konfigürasyonu ele alarak çözümü yapalım.

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \underbrace{m_A \vec{r}_A \omega^2 + m_B \vec{r}_B \omega^2 + m_C \vec{r}_C \omega^2}_{=0} + \vec{F}_D + \vec{F}_E = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_D + \vec{F}_E = 0$$

$$\sum \vec{M}_D = 0 \Rightarrow$$

$$(-225 \vec{k}) \times (m_A \vec{r}_A \omega^2) + (975 \vec{k}) \times (m_B \vec{r}_B \omega^2) + (1875 \vec{k}) \times (m_C \vec{r}_C \omega^2) + (1650 \vec{k}) \times \vec{F}_E = 0$$

$$\omega = 150 \frac{\text{devir}}{\text{dak}} \cdot \frac{1 \text{ dak}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ radyan}}{1 \text{ devir}} = 15,708 \text{ rad/s}$$

$$(-225 \vec{k}) \times [15 \text{ kg} \cdot 0,025 \vec{i} \cdot 15,708^2] + (975 \vec{k}) \times [20 \text{ kg} \cdot 0,012 \text{ m} \cdot (\cos 230,17 \vec{i} + \sin 230,17 \vec{j}) \cdot 15,708^2] \\ + (1875 \vec{k}) \times [16 \text{ kg} \cdot 0,018 \text{ m} \cdot (\cos 140,21 \vec{i} + \sin 140,21 \vec{j}) \cdot 15,708^2] + (1650 \vec{k}) \times [F_E \cos \theta_E \vec{i} + F_E \sin \theta_E \vec{j}] = 0 \\ - 20818,8 \vec{j} - 36981,5 \vec{j} + 44339,4 \vec{i} - 102381,2 \vec{j} - 85270,5 \vec{i} + 1650 F_E \cos \theta_E \vec{i} - 1650 F_E \sin \theta_E \vec{j} = 0$$

$$i \text{ yönü : } 1650 F_E \sin \theta_E = -40931,1$$

$$j \text{ yönü : } 1650 F_E \cos \theta_E = 160181,5 \quad \left. \begin{array}{l} \tan \theta_E = \frac{-40931,1}{160181,5} \\ \theta_E = -14,334^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\theta_E = -14,334^\circ}$$

$$\Rightarrow 1650 F_E \sin \theta_E = -40931,1 \Rightarrow \boxed{F_E = 100,20 \text{ N}}$$

$$\boxed{\vec{F}_E = 100,20 \text{ N} \angle -14,334^\circ = 97,08 \vec{i} - 24,81 \vec{j}}$$

$$\vec{F}_D + \vec{F}_E = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_D = -97,08 \vec{i} + 24,81 \vec{j}}$$

$$c) r_L = 400 \text{ mm} \quad (A \text{ kasnağı, düzlemi}) \quad m_L = ? \quad \theta_L = ?$$

$$r_R = 400 \text{ mm} \quad (C \quad " \quad " \quad ) \quad m_R = ? \quad \theta_R = ?$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{m_A \vec{r}_A \omega^2 + m_B \vec{r}_B \omega^2 + m_C \vec{r}_C \omega^2}_{=0 \text{ (statik dengeden)}} + m_L \vec{r}_L \omega^2 + m_R \vec{r}_R \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow (\text{Sol dengeleme düzlemine göre moment})$$

$$(1200 \vec{k}) \times (m_B \vec{r}_B \omega^2) + (2100 \vec{k}) \times (m_C \vec{r}_C \omega^2) + (2100 \vec{k}) \times (m_R \vec{r}_R \omega^2) = 0$$

$$1200 \cdot 20 \cdot 12 [\vec{k} \times (\cos 230,17 \vec{i} + \sin 230,17 \vec{j})] + 2100 \cdot 16 \cdot 18 [\vec{k} \times (\cos 140,21 \vec{i} + \sin 140,21 \vec{j})] \\ + 2100 \cdot m_R \cdot 400 [\vec{k} \times (\cos \theta_R \vec{i} + \sin \theta_R \vec{j})] = 0$$

(15)

$$-184467,4226 \vec{i} + 221169,0982 \vec{j} - 464725,4367 \vec{j} - 387057,2423 \vec{i} + 840000 m_R \cos \theta_R \vec{i} \\ - 840000 \cdot m_R \cdot \sin \theta_R \vec{j} = 0$$

$$\begin{aligned} i \text{ yönü : } 840000 m_R \sin \theta_R &= -165888,1441 \\ j \text{ yönü : } 840000 m_R \cos \theta_R &= 649192,8583 \end{aligned} \Rightarrow \tan \theta_R = \frac{-165888,1441}{649192,8583} \Rightarrow \boxed{\theta_R = -14,334^\circ}$$

$$840000 m_R \sin \theta_R = -165888,1441 \Rightarrow \boxed{m_R = 0,798 \text{ kg}}$$

$$m_L \vec{r}_L + m_R \vec{r}_R = 0$$

$$400 m_L (\cos \theta_L \vec{i} + \sin \theta_L \vec{j}) + 0,798 \cdot 400 [\cos(-14,334) \vec{i} + \sin(-14,334) \vec{j}] = 0$$

$$400 m_L \cos \theta_L \vec{i} + 400 m_L \sin \theta_L \vec{j} + 309,263 \vec{i} - 79,026 \vec{j} = 0$$

$$i \text{ yönü : } 400 m_L \cos \theta_L + 309,263 = 0 \Rightarrow 400 m_L \cos \theta_L = -309,263$$

$$j \text{ yönü : } 400 m_L \sin \theta_L - 79,026 = 0 \Rightarrow 400 m_L \sin \theta_L = 79,026$$

$$\Rightarrow \tan \theta_L = \frac{79,026}{-309,263} \Rightarrow \theta_L = -14,334^\circ \quad \begin{array}{l} \theta_L = 165,666^\circ \\ \downarrow -14,334^\circ \end{array} \\ \Rightarrow \boxed{\theta_L = 165,666^\circ}$$

$$400 m_L \cos \theta_L + 309,263 = 0 \Rightarrow \boxed{m_L = 0,798 \text{ kg}}$$

(16)

**MAK 360 MAKİNE DİNAMIĞİ**  
**2008-2009 BAHAR DÖNEMİ FINAL SINAVI**

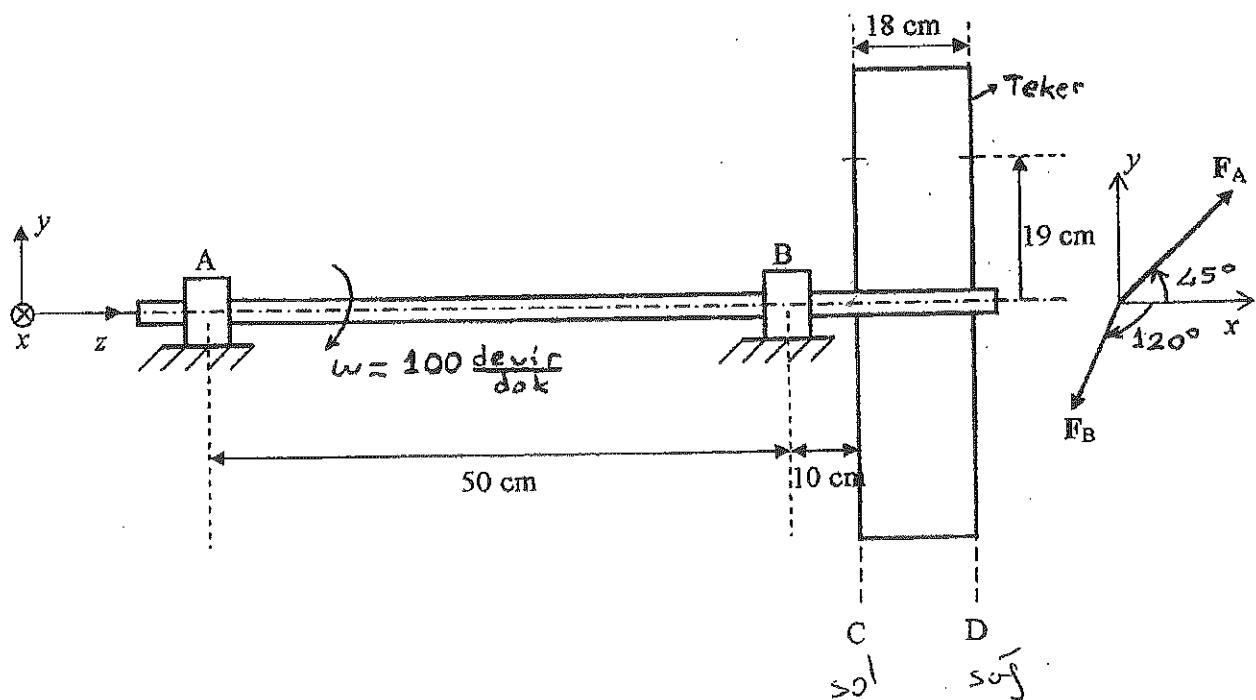
Öğretim Üyesi: Yrd. Doç.Dr. Yasin YILMAZ  
 Süre: 110 dakika

01.06.2009

2-) Bir dengeme makinasına bir teker aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bağlanmıştır. Mil 100 devir/dakika sabit açısal hızda döndürüldüğünde A ve B yataklarındaki kuvvetler ölçülmüş ve aşağıdaki değerler okunmuştur. Yatak kuvvetleri şekilde x-y düzleminde gösterilmiştir.

$$F_A = 2,2 \text{ N} \angle 45^\circ, \quad F_B = 1,2 \text{ N} \angle -120^\circ$$

Tekerin dinamik olarak dengelenmesi için C ve D düzlemlerine, dönme ekseninden 19 cm mesafede takılması gereken küteleri ve açısal pozisyonlarını bulunuz.



2-) Mil üzerindeki dengeliğin A ve B desteklerinde bulunan dengeliğin  
kötelerden kaynaklandığı düşünüldür ise, bu dengeliğin kötelerde  
olarak sağa ve sola kuvvetlerin sırasıyla A ve B desteklerinde  
bulutu yatak kuvvetteine eşit olmalıdır.

Dinamik dengelene C (sol dengelene desteni) ve D (sağ dengelene  
desteni) desteklerine, dönme ekseniinden  $19\text{ cm}$  uzaklıktaki köteler  
yeterliklerini yapısızca.

Dinamik dengelene dördüncü maddedeki kuvvet dengesi:

$$2,2 \cdot (\cos 45^\circ + \sin 45^\circ) + 1,2 \cdot [\cos(-120) \bar{i} + \sin(-120) \bar{j}] + \\ + m_L \cdot 0,19 \text{ m} (\cos \theta_L \bar{i} + \sin \theta_L \bar{j}) \omega^2 m_R \cdot 0,19 \text{ m} (\cos \theta_R \bar{i} + \sin \theta_R \bar{j}) \omega^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Moment dengesi: } \sum M_C = \sum M_{sol} = 0$$

$$-0,6 \bar{k} \times [2,2 \cdot (\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)] - 0,1 \bar{k} \times \{1,2 \cdot [\cos(-120) \bar{i} + \sin(-120) \bar{j}] \\ + 0,18 \bar{k} \times [m_R \cdot 0,19 \cdot (\cos \theta_R \bar{i} + \sin \theta_R \bar{j}) \omega^2]\} = 0 \\ - 0,6 \cdot 2,2 \cdot \cos 45^\circ + 0,6 \cdot 2,2 \cdot \sin 45^\circ - 0,1 \cdot 1,2 \cdot \cos(-120) \bar{j} + 0,1 \cdot 1,2 \cdot \sin(-120) \bar{i} \\ + 0,18 \cdot m_R \cdot 0,19 \cdot \cos \theta_R \cdot \omega^2 \bar{j} - 0,18 \cdot m_R \cdot 0,19 \cdot \sin \theta_R \cdot \omega^2 \bar{i} = 0$$

$\times$  ve  $y$  bilgilendirme syirrişti

$$x: -0,6 \cdot 2,2 \cdot \sin 45^\circ + 0,1 \cdot 1,2 \cdot \sin(-120) - 0,18 \cdot m_R \cdot 0,19 \cdot \sin \theta_R \cdot \omega^2 = 0 \quad (2)$$

$$y: -0,6 \cdot 2,2 \cdot \cos 45^\circ - 0,1 \cdot 1,2 \cdot \cos(-120) + 0,18 \cdot m_R \cdot 0,19 \cdot \cos \theta_R \cdot \omega^2 = 0 \quad (3)$$

$$(2) \text{ten } m_R \cdot \sin \theta_R = \frac{-0,6 \cdot 2,2 \cdot \sin 45^\circ + 0,1 \cdot 1,2 \cdot \sin(-120)}{\omega^2 \cdot 0,19 \cdot 0,19} = 0,22$$

$$(3) \text{ten } m_R \cdot \cos \theta_R = \frac{-0,6 \cdot 2,2 \cdot \cos 45^\circ - 0,1 \cdot 1,2 \cdot \cos(-120)}{\omega^2 \cdot 0,19 \cdot 0,19} = 0,23$$

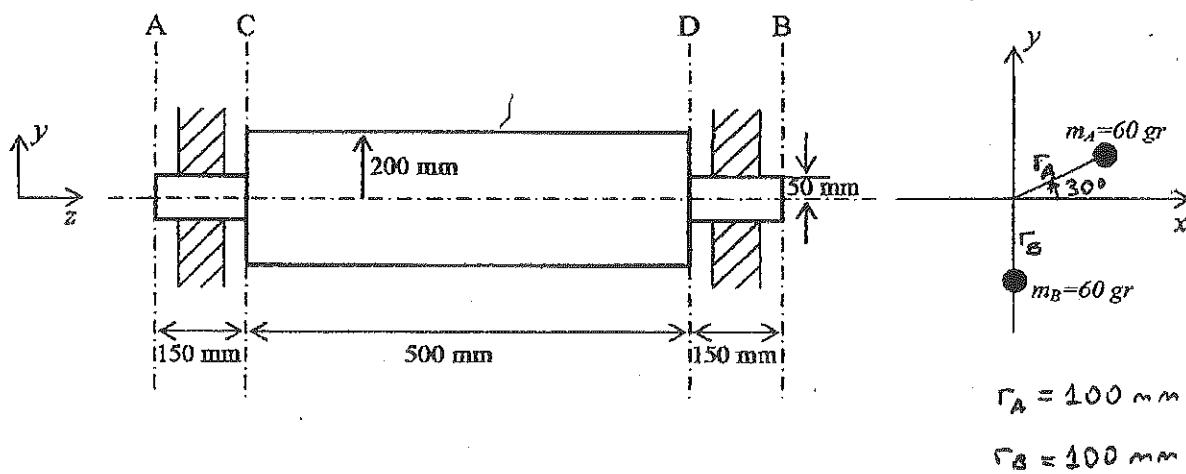
$$\Rightarrow \tan \theta_R = \frac{0,22}{0,23} = 0,957^\circ \Rightarrow \theta_R = 43,7^\circ \Rightarrow m_R < 0,32 \text{ kg}$$

(D) Hesapları yeterle yararlı olsun

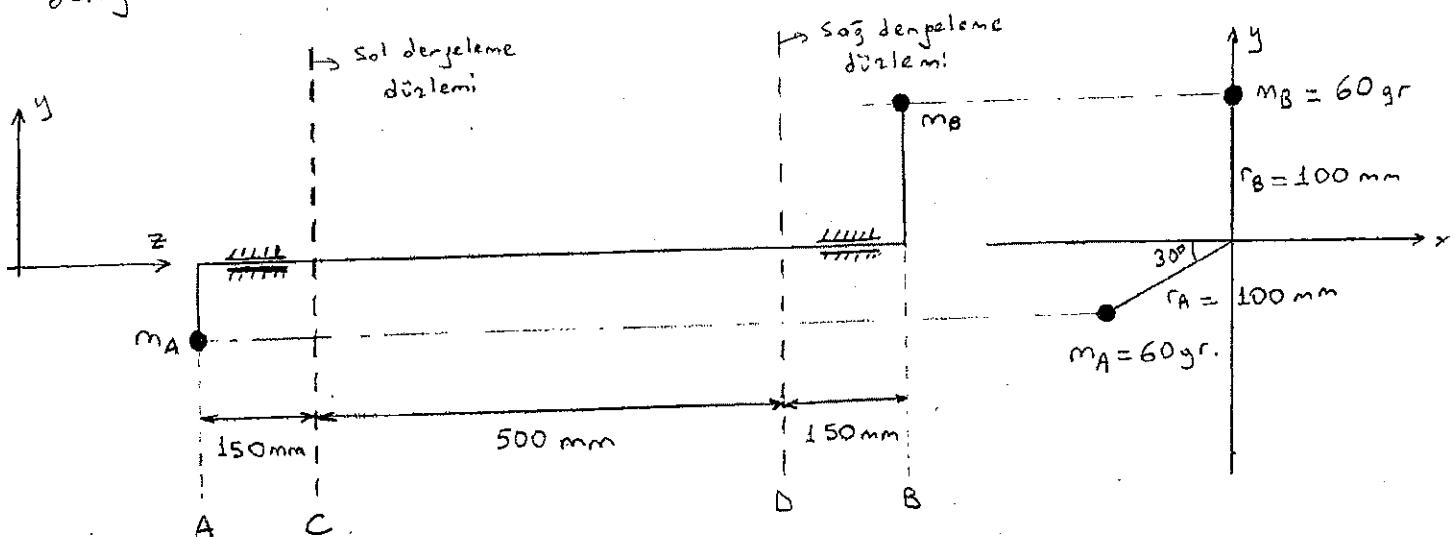
$$\boxed{\theta_L = 224,6^\circ} \text{ ve } \boxed{m_L = 0,37 \text{ kg}} \text{ olacak bulunur.}$$

**MAK 360 MAKİNE DİNAMİĞİ**  
**2009-2010 BAHAR DÖNEMİ FINAL SINAVI**

- 2-) Aşağıdaki şekilde gösterilen tambur, bir balanslama makinasında A ve B düzlemlerine, x-y koordinat sisteminde gösterilen açısal pozisyonlarda dönme eksene 100 mm mesafede 60 gr kütleler ( $m_A$  ve  $m_B$ ) yerleştirilerek dengelenmiştir. Daha sonra bu dengeleme kütleleri sistemden alınmıştır. Dinamik dengeleme için C ve D düzlemlerine, dönme eksene 150 mm mesafede yerleştirilmesi gereken kütleleri ve açısal pozisyonlarını belirleyiniz. (40 puan)



2-) Dengeleme kütelerinin sisteminde alınması, tam tersi yönlerinde bu kütelerin oluşturduğu balanssızlığa eşit bir dengesizlik oluşturur. Yeri sistem şu şekilde dir.



Dinamik dengelene iken sol ve sağ dengelene düzlemlerine dünme ekseninden 150 mm mesafede yerleştirilmeli gerekken kütelerin ve ağırlık pozisyonlarını bulalım.

Mit räum Kurvet dengeli:  $\sum \vec{F} = 0$

$$m_A \vec{r}_A w^2 + m_B \vec{r}_B w^2 + m_C \vec{r}_C w^2 + m_D \vec{r}_D w^2 = 0$$

$$\Rightarrow 60 \text{ gr. } 100 \text{ mm } [\cos(210) \vec{i} + \sin(210) \vec{j}] + 60 \text{ gr. } 100 \text{ mm } [\cos 90 \vec{i} + \sin 90 \vec{j}] + m_C \cdot 150 \text{ mm } [\cos(\theta_C) \vec{i} + \sin(\theta_C) \vec{j}] + m_D \cdot 150 \text{ mm } [\cos(\theta_D) \vec{i} + \sin(\theta_D) \vec{j}] = \\ + m_D \cdot 150 \text{ mm } [\cos(\theta_D) \vec{i} + \sin(\theta_D) \vec{j}] + m_D \cdot 150 \text{ mm } [\cos(\theta_D) \vec{i} + \sin(\theta_D) \vec{j}] = \dots (1)$$

sol veya sağ dengelene düzlemlerinden birisine göre moment denklemi  $\Sigma M_{sol} = 0$  :

$$\sum M_{sol} = \sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$(-150 \vec{r}) \times [m_A \vec{r}_A w^2] + (500 \vec{r}) \times [m_D \vec{r}_D w^2] + (650 \vec{r}) \times [m_B \vec{r}_B w^2] = 0 \\ \Rightarrow (-150 \vec{r}) \times [60 \cdot 100 \cdot (\cos 210 \vec{i} + \sin 210 \vec{j})] + (500 \vec{r}) \times [m_D \cdot 150 \cdot (\cos \theta_D \vec{i} + \sin \theta_D \vec{j})] + (650 \vec{r}) \times [60 \cdot 100 \vec{j}] = 0$$

$$\Rightarrow 779422,863406 \vec{j} - 450,000 \vec{i} + 75000 \cdot m_D \cdot \cos \theta_D \vec{j} - 75000 m_D \cdot \sin \theta_D \vec{i} \\ - 3,900,000 \vec{i} = 0$$

$x$  ve  $y$  yönlerini ağırlığına paralel hizalıyalım

$$\vec{r} \text{ yani: } -4.350.000 = 75000 m_D \sin \theta_D \quad \dots \quad (2)$$

$$\Rightarrow \dots \quad -773422,863406 = 75000 m_D \cos \theta_D \quad \dots \quad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \text{ 'de } \tan \theta_D = \frac{-4.350.000}{-773.422,863406} = 5.581$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_D = 253,84167^\circ}$$

$$(2) \text{ ve } (3) \text{ 'de } m_D = \boxed{m_D = 58,32368 \text{ gr.}}$$

(2)'de yerine yazılım:

$$-5136,152422 \vec{i} - 3000 \vec{j} + 6000 \vec{k} + m_c \cdot 150, \cos \theta_C \vec{i} + m_c \cdot 150, \sin \theta_C \vec{j} \\ + 58,32368 \cdot 150, [\cos(1253,84167) \vec{i} + \sin(1253,84167) \vec{j}] = 0$$

$\Rightarrow$  x ve y yani  $m_c$  için  $\theta_C$ 'ye yazılım:

$$m_c \cdot 150, \cos \theta_C = 6754,3382 \quad \dots \quad (4)$$

$$m_c \cdot 150, \sin \theta_C = 5700 \quad \dots \quad (5)$$

$$(5) \text{ 'de } (4) \text{ 'e } \Rightarrow \tan \theta_C = \frac{5700}{6754,3382} \Rightarrow \boxed{\theta_C = 40,15833^\circ}$$

(4) ve (5)'de yerine  $m_c$

$$\boxed{m_c = 58,32368 \text{ gr.}}$$

11/08/2001 40:44 M.  
1984-2001 15 May - 065  
2002-2016 18.01.2016  
Njut 30.7.2016

# VOLAN SEÇİMİ

Volan, bağlı bulunduğu milin bir sevrim sırasında aksat hız değişimini (dolgulanmasını) azaltmak için kullanılır. (Makinelerin mümkün olduğu kadar sabit aksat hızda dönmesi istenmektedir)

Dinamik analiz sonucunda, giriş kolunun sabit giriş hızında dönmesi için giriş miline etki etmesi gereken  $T_L(\theta)$  momenti degeri bir sevrim için elde edilebilir.

$T_L(\theta)$ : tahrik kolunu sabit aksat hızda döndürmek için gerekli moment  
[Yani makinaya uygulanan yükü (otolet veya baska kuvvetlerden dolayı) karşılamak için gerekli moment]

Bu gereksinime karşın elektrik motorunun uygulayacağı moment, aksat hızın sabit değişeceğini düşünürse, sabit bir degerdir, veya bir iaten yonmeli motor kullanılığında ise,  $T_L(\theta)$ 'ya benzeren farklı bir  $T_d(\theta)$  tahrik eğrisi olacaktır.

$T_d(\theta)$ : motorun ürettigi moment

$T_L(\theta)$  ve  $T_d(\theta)$  eğrilerinin birbirile干涉 etmemesi mutlaka hız dolgulanmasına neden olacaktır.

$$\delta = \frac{\Delta w}{w_{ort}} : \text{Hız kororsızlık katsayısi}$$

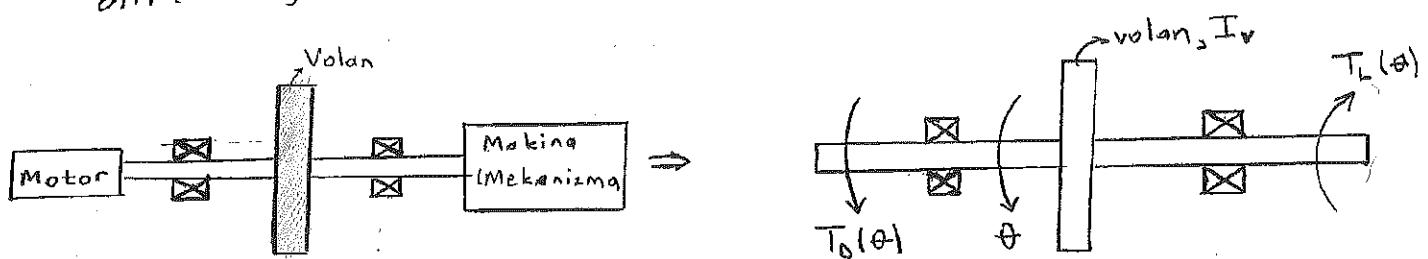
Bu denklemede  $\Delta w = w_{max} - w_{min}$  ve  $w_{ort} = \frac{1}{2}(w_{max} + w_{min})$  şeklinde

Bizim omacımız ise, boston hızın sabit değişeceğini ile yaptığımız versiyolar, konumak için hız kororsızlık katsayıısını,  $\delta$ , gerekinse volan kullanarak belirli bir degerin altında tutmaktadır.

<u>Uygulama</u>	<u><math>\delta</math></u>
Pompalar, kompresörler	0,050 - 0,030
Gemi motorları	0,050 - 0,025
Totum terzge hizları	0,030 - 0,020
Tekstil makineleri	0,030 - 0,015
Doğru akım jeneratörleri	0,010 - 0,005
Alternatif akım "	0,003
Araç motorları	0,005 - 0,003
Uzak motorları	0,001

Volan kullanarak hız konstantlığını katsayısını belirli bir degerde tutucığınız kabul edilir ise, su varsayımları yapabiliriz:

- (i) Ortalama hız değeri ile dinamik analiz sırasında kullanılan motor nominal hız değeri aynıdır.
- (ii) Hesaplanan  $T_L(\theta)$  moment eğrisi küçük hız değişimlerinde aynı kalacaktır.
- (iii) Tarihî kısmında uygulanan  $T_d(\theta)$  tarihî momenti bilmelidir. (örneğin elektrik motorları için bu sabit bir değerdir.)



$T_d(\theta)$ : motor tarafından sağlanan tarihî momenti

$T_L(\theta)$ : makinenin ihtiyaç duyduğu moment (makinaya uygulanan yük)

$\theta$ : Belirli bir referans şöre dönmeye aşısi

$I_v$ : volanın kütle otalete momenti

$\theta^*$ : Bir devrinin periyodu  $[T_d(\theta) - T_L(\theta) = T_d(\theta + \theta^*) - T_L(\theta + \theta^*)]$

$\theta^* \pi, 2\pi$  veya  $2\pi$ 'nin katları şeklinde olabilir.

Yani  $\theta^*$ ,  $T_d(\theta) - T_L(\theta)$ 'nın (volan üzerindeki net tork) periyodusudur.

$w_{max}$ : bir devrin içindeki maksimum aksiyal hız değeri dir ( $\dot{\theta}_{max}$ )  
 $w_{min}$ : " " " minimum " " " " " " ( $\dot{\theta}_{min}$ )

$\theta_{max}$ :  $w_{max}$ 'ın gerçekleştiği  $\theta$  (dönmeye aşısi) değeri  $\theta_{max}$

$\theta_{min}$ :  $w_{min}$ 'ın " " " " " " " " " " " " ( $\theta_{min}$ )

Amaçımız: aksiyal hızdaki,  $w = \dot{\theta}$ , değişimi (dalgalanmayı) belirli limitler içерisinde tutmak için gerekli volan kütle otalete momentinin,  $I_v$ , seçilmesi (yani uygun volanın belirlenmesidir)

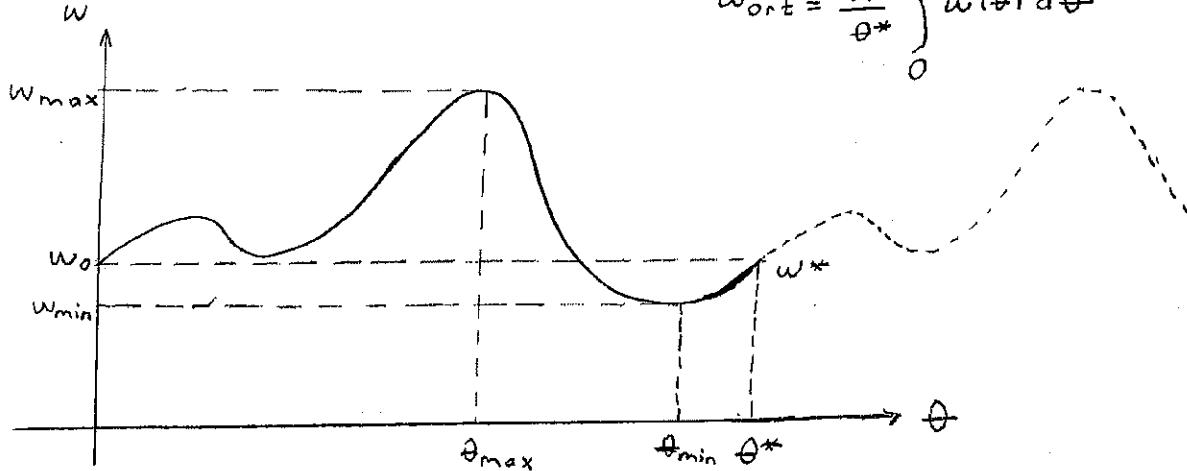
$$\Delta w = w_{max} - w_{min}, \quad w_{avg} = \frac{1}{2} (w_{max} + w_{min}) \Rightarrow \delta = \frac{\Delta w}{w_{avg}}$$

$$\Rightarrow w_{max} = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) w_{avg}, \quad w_{min} = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) w_{avg}$$

11/11/2010

Note: Eğer  $w$ ,  $\theta$ 'ya bağlı bir fonksiyon olursa verilmesse;

$$w_{\text{ort}} = \frac{1}{\theta^*} \int_0^{\theta^*} w(\theta) d\theta$$



İş-Enerji Denklemi (Mil-valon sistemi için)

$$\Delta U = \Delta E_k + \cancel{\Delta E_p} = 0$$

$\Delta U$ : sistem üzerinde yapan net iş

$\Delta E_k$ : sistemin kinetik enerjisindeki değişim

$\Delta E_p$ : " potansiyel " "

Bir törn çevrim için ( $\theta=0$  dan  $\theta=\theta^*$  'a kadar)

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= \int_0^{\theta^*} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta \\ \Delta E_k &= \frac{1}{2} I_v [w^{*2} - w_0^2] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_0^{\theta^*} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} I_v [w^{*2} - w_0^2]$$

$w_0$ :  $\theta=0$  'daki açısal hız değeri

$w^*$ :  $\theta=\theta^*$  'daki " " "

Düzgün hareket için  $w^* = w_0$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\theta^*} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta = 0} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

\* Bir çevrim boyunca yapan net iş 0'a eşittir.

(1) numaralı denklem kullanılarak motorun sağlaması gereken ortalama elektrik momenti bulunabilir.  $\Rightarrow$

$$\int_0^{\theta^*} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta = \underbrace{\int_0^{\theta^*} T_D(\theta) d\theta}_{T_{D,\text{ort}}, \theta^*} - \int_0^{\theta^*} T_L(\theta) d\theta = 0$$

$$\Rightarrow T_{D,\text{ort}} = \frac{1}{\theta^*} \int_0^{\theta^*} T_L(\theta) d\theta$$

: Motorun motorla birlikte sağlanması gereken ortalama tekrık momenti (sabit bir değer)

Bu değer volan hesabi sırasında kullanılabılırse de motor seçimi sırasında kullanılması doğru değildir. Motor seçimi sırasında

$T_{M,\text{ort}}^n = \frac{1}{\theta^*} \int_0^{\theta^*} T_L^n(\theta) d\theta$   
şeklinde ele alınmalıdır. Motor üreticisinin önerisine bağlı olmakla birlikte  $n \geq 2$  seçilmesi gereklidir. ( $n=4$  eniyetti; bir sayıdır)

$T_{M,\text{ort}}^n$  bize gerekliliğinden motor gücünü vercektir.  $T_{D,\text{ort}}$  ise ortalama tekrık motorunun ortalama olarak sistemimize sağlanması gereken moment olup, seçilmiş olan motor gücünden bağımsızdır.

is-Enerji Denklemi ( $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$  iken)

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} I_v (w_{\max}^2 - w_{\min}^2) = \frac{1}{2} I_v (w_{\max} + w_{\min}) (w_{\max} - w_{\min})$$

$\downarrow = w_{\text{ort}}$

$= \Delta w$

E, Enerji formülü (sistemi minimum hızdan maksimum hız'a getirmek için gereklili enerji)

$$E = I_v \cdot w_{\text{ort}} \cdot \Delta w = I_v \cdot w_{\text{ort}}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

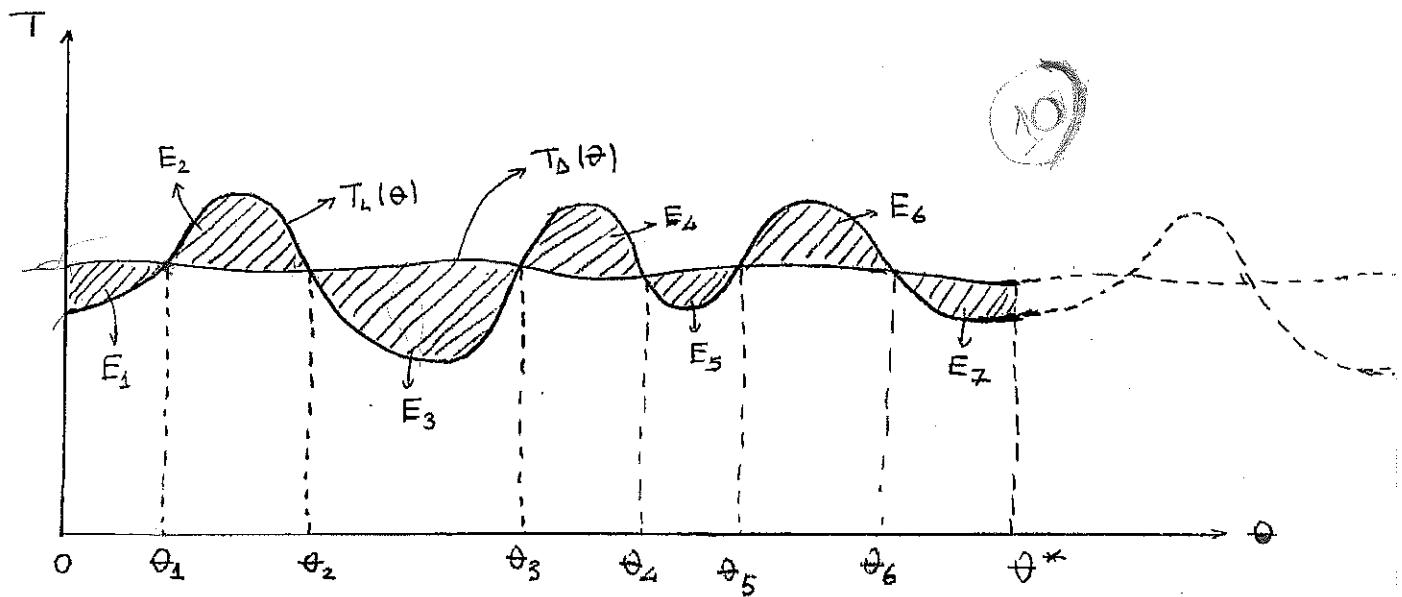
$\downarrow$  volan təsorim denklemi:

Bu denklemde:

$$E = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta \quad \text{şeklinde dir}$$

$E'$ 'yi bulmak için ilk önce  $\theta$ min ve  $\theta$ max değerleri bulunmalıdır. Bunun için enerji grubuk diagramı kullanılacaktır.

Verilen  $T_L(\theta)$  ve  $T_D(\theta)$  için, mesela



$0$ 'dan  $\theta_1$ 'e kadar krank mili dönmesi sırasında  $T_D > T_L$  olduğundan, yani motor makinanın ihtiyaç duyduğu momentten daha fazla bir moment uygulayacağından dolayı, Newton'un 2. kanunu göre sistem ivmelenecet ve hız artacaktır.  $\theta_1$ 'den  $\theta_2$ 'ye kadar krank mili dönmesi sırasında  $T_D < T_L$  olduğundan yani motor istenilen momentten daha az bir moment uyguladığından, sistem eksik bir ivme kazanacaktır ve krank mili hızı azalacaktır. Bu ivmelenme onarında motoruna yapan ister sırasıyla  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$  ve  $E_7$ 'dir.

$E_i$ : volan üzerinde yapan ister ( $\theta_{i-1} < \theta < \theta_i$  aralığında)

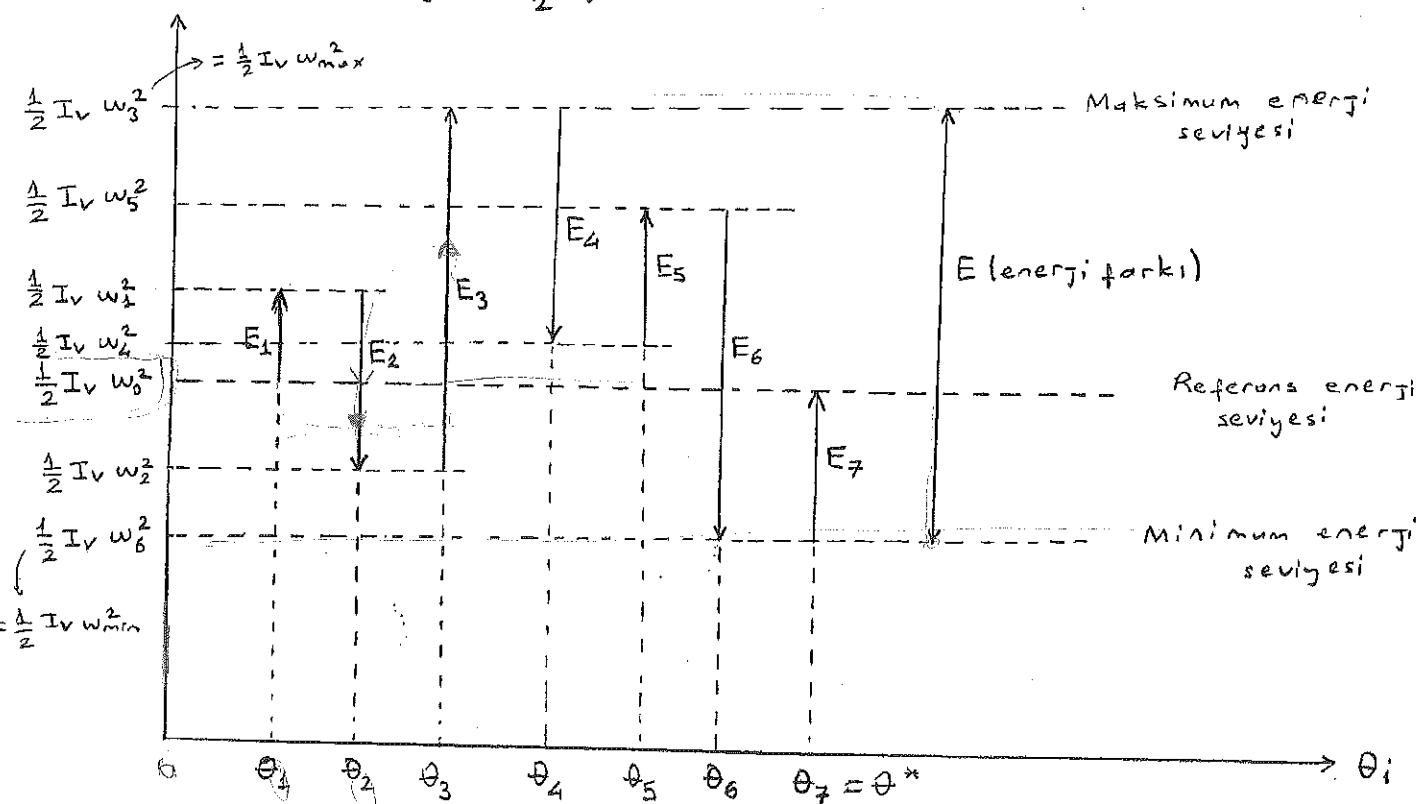
$$E_i = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta \quad : \text{şekilde gösterilen olantılar (pozitif veya negatif)}$$

$\theta_i$ :  $T_D(\theta)$ 'nın  $T_L(\theta)$ 'ya eşit olduğu  $\theta$  değerleri

$$-3 + 2 - 5 = -6 \quad (5) \quad 2 + 2 + 3 + 5 = 10$$

Şimdi Enerji - cubuk diagrammini çizebiliriz.

$$Volonin kinetik enerjisi = \frac{1}{2} I_{\nu} w^2$$



Cubuk diyagramından  $\theta_{\min}$  ve  $\theta_{\max}$  su şekilde bulunur

$$w_{\max} = w_3 \Rightarrow \theta_{\max} = \theta_3$$

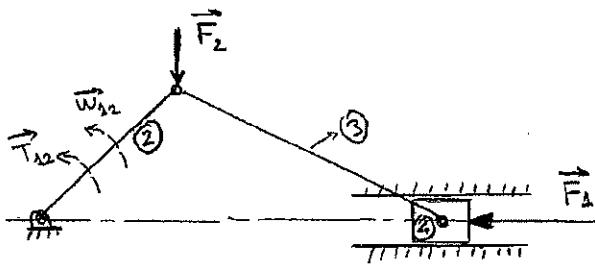
$$w_{\min} = w_6 \Rightarrow \theta_{\min} = \theta_6$$

$$\Rightarrow E = \int_{\theta_{\min} = \theta_6}^{\theta_{\max} = \theta_3} [T_0 - T_L] d\theta \quad \text{veya} \quad E = E_7 + E_1 + E_2 + E_3 \\ = -(E_4 + E_5 + E_6)$$

Not: Bir çevrimde enerji dengeinden:  $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 = 0$  olmalıdır.

Makine bir mekanizma olduğunda  $T_L$  ve  $I_v^2$ 'nin bulunması

Mesela:



Verilenler: Kranık-bigel mekanizması ve  
üzerindeki yükler ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, v_{ib}$ )

Tehrik kolu olan (2) nolu uzun, ürettigi  
tork  $T_D(\theta)$  olan bir motor tarafindan  
döndürülmektedir.

Tehrik kolunu (kranık): sabit bir açısal hızda dönmesi istenmektedir.

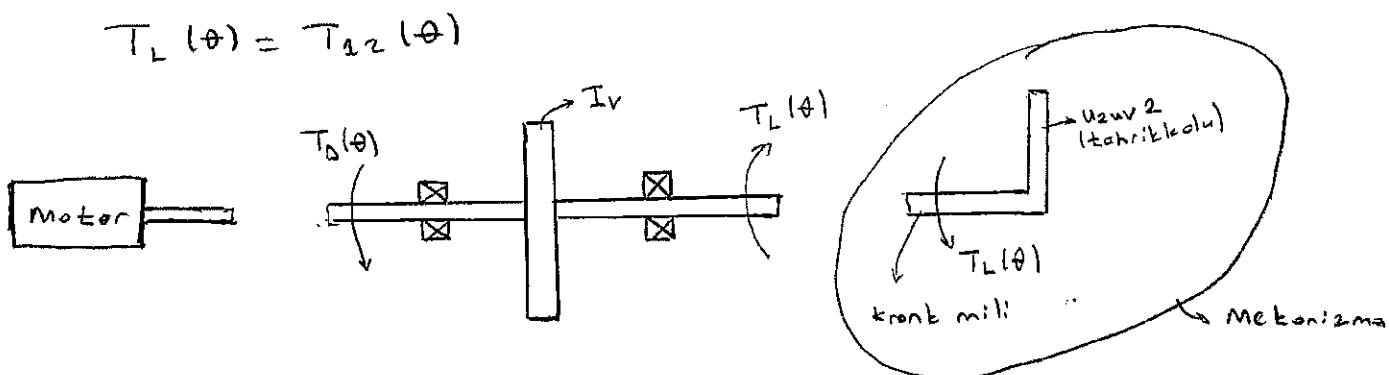
Tehrik kolu (kranık) bir mili vasıtası, ile döndürülmektedir (kranık mili).

Soru: Belirli bir  $\theta$  değerini sağlamak için, kranık miline bogulan mavi  
gerekken volanın kütle etkisi momenti,  $I_v = ?$

Gözüm:

1-) Kranık'ı (tehrik kolunu) istenilen sabit açısal hızda döndürmek için  
gereklili torku,  $\bar{T}_{D2}(\theta)$ , bulmak için dinamik kuvvet analizi uygulanır.  
Bunun için ya herbir uzun serbest sistim görüntüüsü çizilir  
ve kuvvet, moment, dengesi denklemleri kullanılır veya sonılıs  
prinsibi kullanılır. Bulduğumuz  $T_{D2}(\theta)$  değeri  $T_L(\theta)$ 'dır.

$$T_L(\theta) = T_{D2}(\theta)$$



2-) Şimdiye kadar elde edilen denklemlerle  $I_v^2$ : hesapla

$w_{ort} = w_{istenilen}$  sieklinde ol.

Not: Aşağı kutusunu kullanıyor ise hız ve torkdaki antis ve ozalisa  
dikkat etmek gereklidir.

**Örnek:** Bir makinenin teknik koluñun (krankinin) 120 devir/dak. sabit bir saatlı hızda dönmeli iñin, krank milindeki moment gereksinimi:  $T_L(\theta) = 300 \cdot (4 + 0,5 \cdot \sin 2\theta - \cos 2\theta)$  N.m'dir.

a) Kullanocagınız elektrik motorunun saglamasi gereken ortalamalı teknik momentini ve ortalamalı gücünü hesaplayınız.  $T_D$

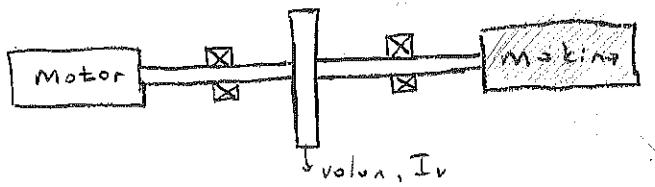
b).  $\dot{\theta} \leq 1/60$  olması iñin kranc miline takilmasi gereken volanın kütle otaklet momentini belirleyiniz.

c) Diski orani  $\frac{10}{1}$  olan bir disk kutusu kullanildiginda aynı hızda otaklet kotsugus, iñin motor miline takilmasi gereken volanın kütle otaklet momentini belirleyiniz.

**Gözüm:**  $T_L(\theta)$  egrisi her  $180^\circ$ 'de (her  $\pi$  radyonda) tekrur on maktadir.

$$\theta^* = \pi \quad \text{yani} \quad T_L(\theta) = T_L(\theta + \pi) \quad \text{dir.}$$

a) Motorun saglamasi gereken ortalamalı teknik momenti.



$$T_{D,ort} = \frac{1}{\theta^*} \int_0^{\theta^*} T_L(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 300 \cdot (4 + 0,5 \cdot \sin 2\theta - \cos 2\theta) d\theta$$

$$\Rightarrow T_{D,ort} = \frac{300}{\pi} \left[ 4\theta - 0,25 \cos 2\theta - 0,5 \sin 2\theta \right]_0^{\pi}$$

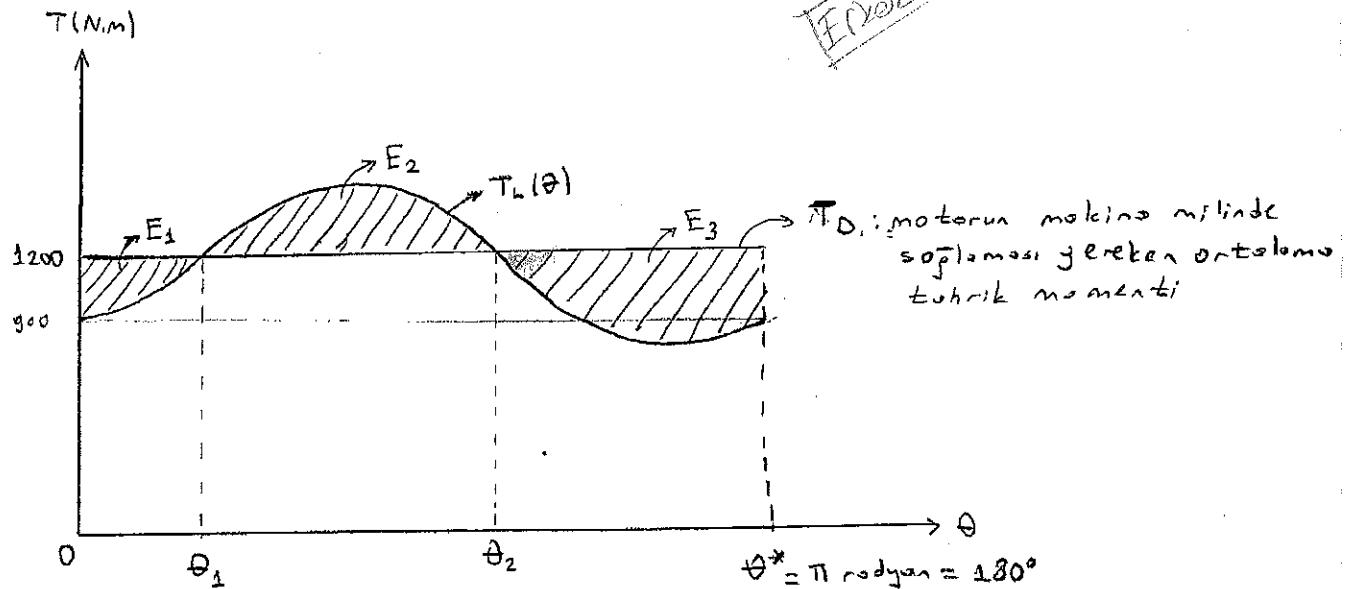
$$\Rightarrow \boxed{T_{D,ort} = 1200 \text{ N.m}}$$

Elektrik motorunun ortalamalı gücü (120 devir/dak hızla dönen sistemde)

$$P_{ort} = T_{D,ort} \cdot \omega_{ort} = (1200 \text{ N.m}) \cdot \left( 120 \cdot \frac{\pi}{30} \frac{\text{radyon}}{\text{s}} \right) = 15079,6 \text{ W}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{ort} \approx 15,1 \text{ kW}} \quad \text{motor en az bu kadar güç üretmelidir}$$

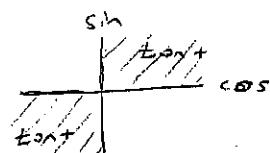
b)



$\theta_{\min}$  ve  $\theta_{\max}$  değerleri bulmak için  $T_D$ 'nın  $T_L$ 'ye eşit olduğu  
 $\theta$  değerleri belirlenmelidir. ( $T_D = T_L$  denklemlerinden)

$$T_D = T_L \Rightarrow 1200 = 300 \cdot (4 + 0.5 \cdot \sin 2\theta - \cos 2\theta)$$

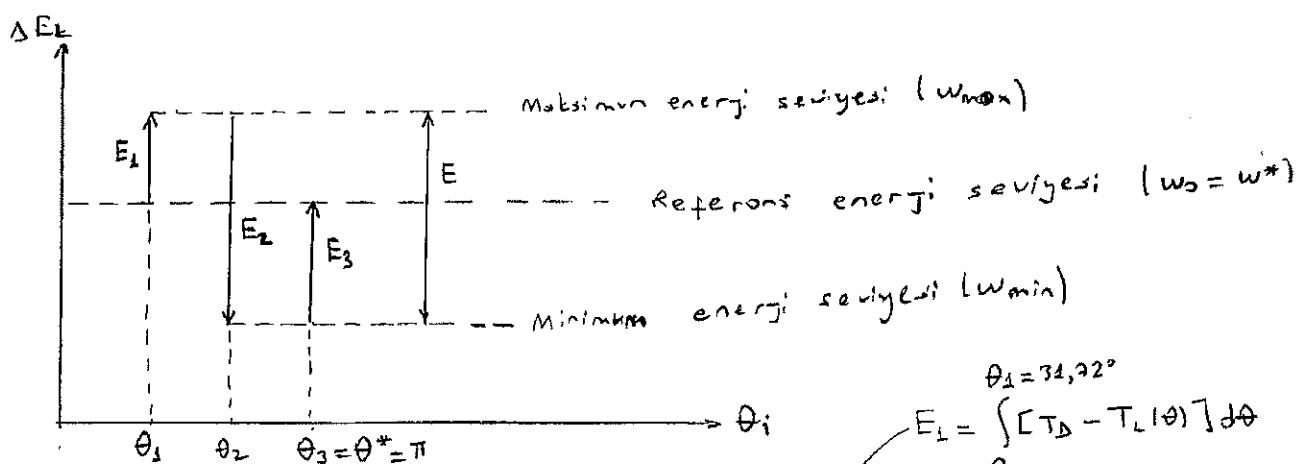
$$\Rightarrow 0.5 \cdot \sin 2\theta - \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta = 2$$



$$\Rightarrow 2\theta = 63,435^\circ \text{ ve } 2\theta = 180 + 63,435^\circ = 243,435^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = 31,72^\circ} \quad \Rightarrow \boxed{\theta_2 = 121,72^\circ}$$

Enerji arıbuluk diyagramını çizelim:



$$\therefore \theta_{\max} = \theta_1 = 31,72^\circ, \theta_{\min} = \theta_2 = 121,72^\circ$$

$$\Rightarrow E = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} [T_D - T_L(\theta)] d\theta \quad \text{veya} \quad E = E_3 + E_1 = -E_2$$

$$E_1 = \int_0^{121,72^\circ} [T_D - T_L(\theta)] d\theta$$

$$E_2 = - \int_{31,72^\circ}^{121,72^\circ} [T_D - T_L(\theta)] d\theta$$

$$E_3 = \int_{31,72^\circ}^{180^\circ} [T_D - T_L(\theta)] d\theta$$

(9)

$31,72^\circ$

$$E = \int_{121,72^\circ}^{31,72^\circ} [1200 - 300(1 + 0,5 \cdot \sin 2\theta - \cos 2\theta)] d\theta$$

$$\Rightarrow E = -300 [-0,25 \cdot \cos 2\theta - 0,5 \cdot \sin 2\theta] \Big|_{121,72^\circ}^{31,72^\circ}$$

$$= -300 [-0,559 - (0,559)]$$

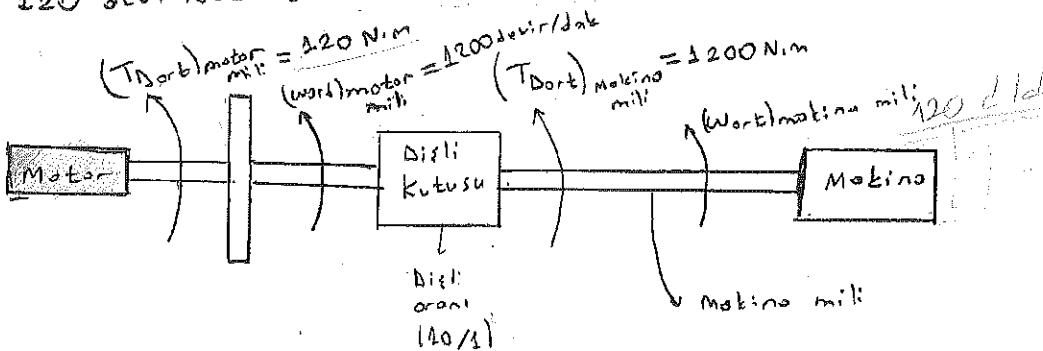
$$\Rightarrow E = 335,4 \text{ N-m (Joule)}$$

$$I_v = \frac{E}{w_{\text{ort}}^2 \cdot s} = \frac{335,4 \text{ N-m}}{(120 \cdot \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \cdot \frac{1}{40}} = 84,96 \text{ kg.m}^2 \approx 85 \text{ kg.m}^2 = \frac{1}{2} \text{ m}^2$$

$= \text{m}(\text{kg})$   
otakayıcıya!

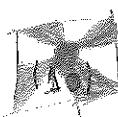
Valon otaket momenti; oldukça yüksek bir değer çıkmıştır. Ancak bu değer 120 devir/dak oarsız hızla dönen mil üzerinde yerleştirilmesi gereken değerdir.

c)



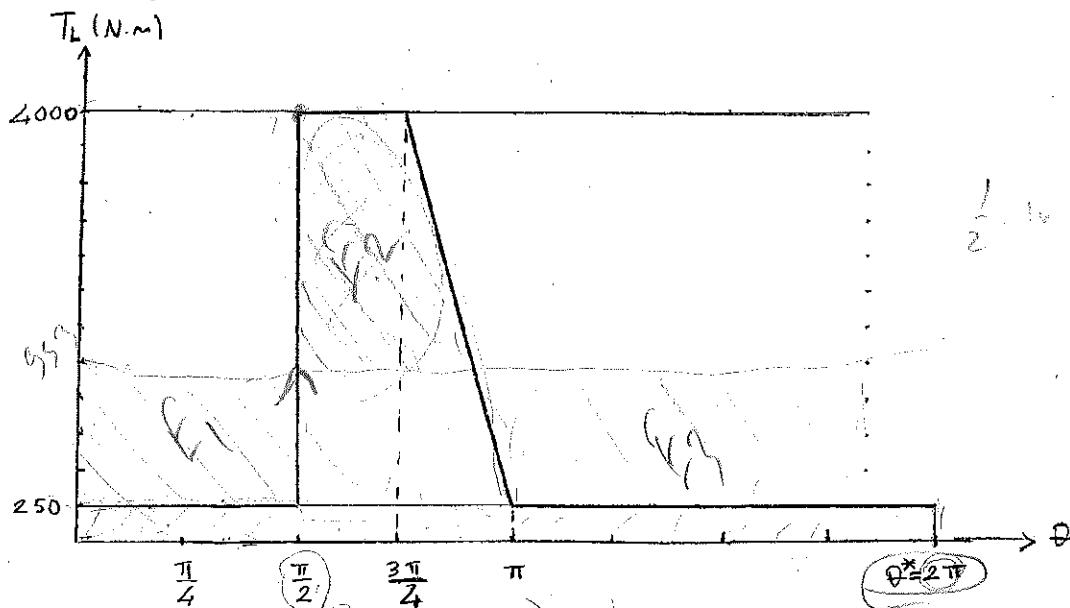
$$P_{\text{ort}} = (T_{\text{Dort}})_{\text{makina}} \cdot (w_{\text{ort}})_{\text{makina}} = (T_{\text{Dort}})_{\text{motor}} \cdot (w_{\text{ort}})_{\text{motor}} = 15,1 \text{ kW}$$

$$I_v = \frac{335,4}{(1200 \cdot \frac{\pi}{30})^2 \cdot \frac{1}{20}} = 0,85 \text{ kg.m}^2$$



Mühendis

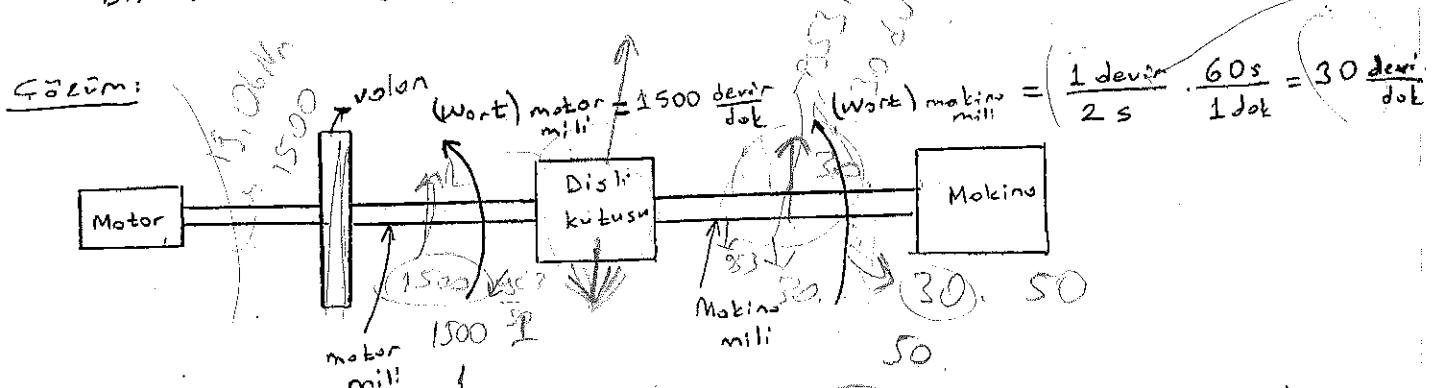
Örnek: Bir soğuk levha kesme makinasının giriş milinde ihtiyaç duyulan moment gereksinimi dönüş eksenine bağlı olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Bir devir 2 sonda gerçekleşmektedir. Makina, sabit bir tork üretken ve ortalama hızı  $1500 \text{ devir/dak}$  olan reduktörlü bir motorla tahrik edilecektir.

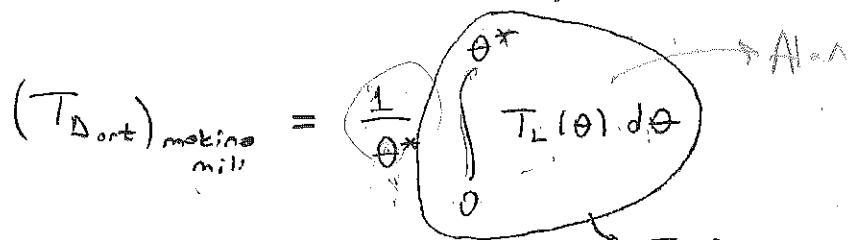
a) Kullanıcıyı elektrik motorunun mekanizmalarında sağlaması gereken ortalama tahrik momentini ve ortalama gücünü bulunuz.

b) Motor miline ağırlığı  $m = 30 \text{ kg}$  ve oturak yeri 250 mm olan bir volan takıldığı zaman, hız konsernlilik katsayısını hesaplayınız.



⇒ Kullanıcıya disk kutusunun disk oranı  $\frac{50}{1}$  olmalıdır. Yani hızı  $\frac{1}{50}$  oranında azaltıyor ve torku 50 kat artıyor.

a) Motorun makine milinde saatlarası gerekken ortalamalı tork momenti



$T - \theta$  grafğında  $T_L$  eğrisi olində kalan alan :

$$\Rightarrow (T_{Dort})_{makine\ milli} = \frac{1}{2\pi} [250 \cdot 2\pi + (4000 - 250) \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} (4000 - 250) \left( \pi - \frac{3\pi}{4} \right)]$$

$$\Rightarrow (T_{Dort})_{makine\ milli} = 953 \text{ N.m}$$

Dışlı tətəsəcənən əsaslı hizi  $2500 \frac{\text{devir}}{\text{səh}}$  dan  $30 \frac{\text{deg.M}}{\text{səh}}$  yərən düşürmək tədди, dəyəri cıqıla momentində oynu orando artırmaq tədди.

$$(T_{Dort})_{motor\ milli} = \frac{(T_D)_{makine\ milli}}{50} = \frac{953}{50} \text{ N.m.}$$

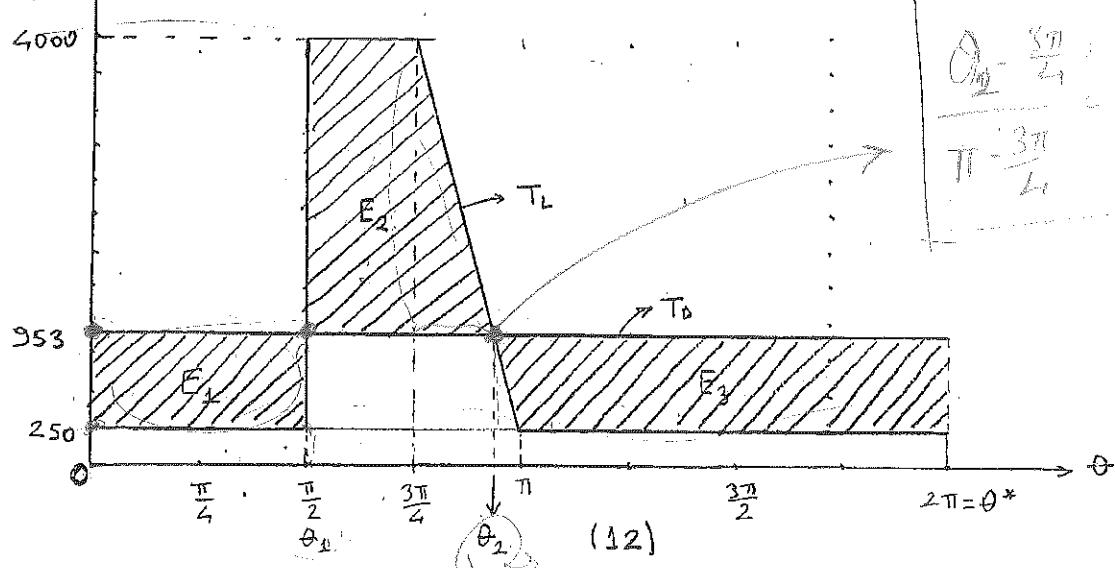
Elektrik motorunun ortalamalı  $\rho_{000}$

$$P_{Port} = (T_{Dort})_{motor\ milli} \cdot (W_{ort})_{motor\ milli} = (T_{Dort})_{makine\ milli} \cdot (W_{ort})_{makine\ milli}$$

$$P_{Port} = (T_{Dort})_{makine\ milli} \cdot \rho_{000} = 953 \text{ N.m} \left( 30 \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

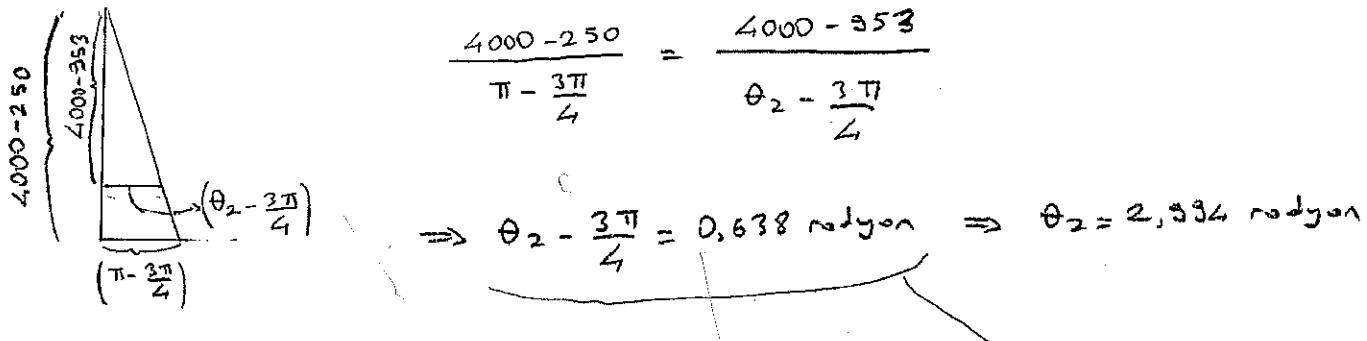
$$\Rightarrow P_{Port} = 2394 \text{ W} \approx 3 \text{ kW}$$

b)  $T(N.m)$



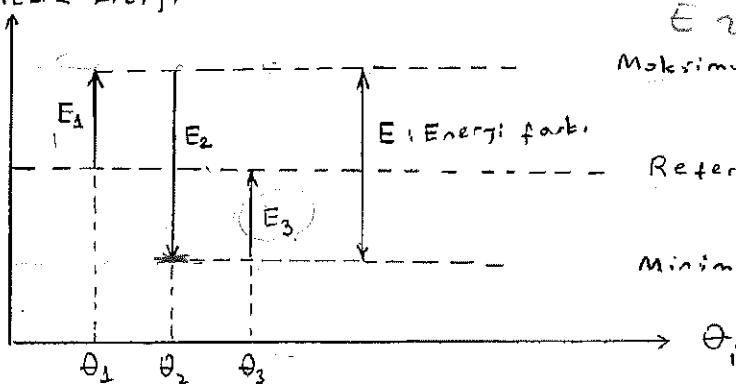
$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{4} : \frac{4000 - 353}{4000 - 250} \\ \pi - \frac{3\pi}{4} &= \frac{4000 - 353}{4000 - 250} \end{aligned}$$

$T_L$  ve  $T_D$ 'nın kesim noktaları  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  olduğunu söylüyor. Grafikten  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  olduğu görülmektedir.  $\theta_2$  ise uye termiğinden sağda miktar bulunabilir.



Enerji çubuk diyagramı:

Kinetik Enerji:



$E_1 + E_3$

$E_2$

Maksimum Enerji Seviyesi

Referans Enerji Seviyesi

Minimum Enerji Seviyesi

$$\omega_{max} = \omega_1 \Rightarrow \theta_{max} = \theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ radyon}$$

$$\omega_{min} = \omega_2 \Rightarrow \theta_{min} = \theta_2 = 2,534 \text{ radyon}$$

Diyagramdan

$$E = E_3 + E_1 = -E_2$$

$$\text{veya } \theta_{max} = \theta_1$$

$$E = \int [T_D - T_L(\theta)] d\theta$$

$$\theta_{min} = \theta_2$$

$T-\theta$  grafiğinden  $E_2$  bulunabilir

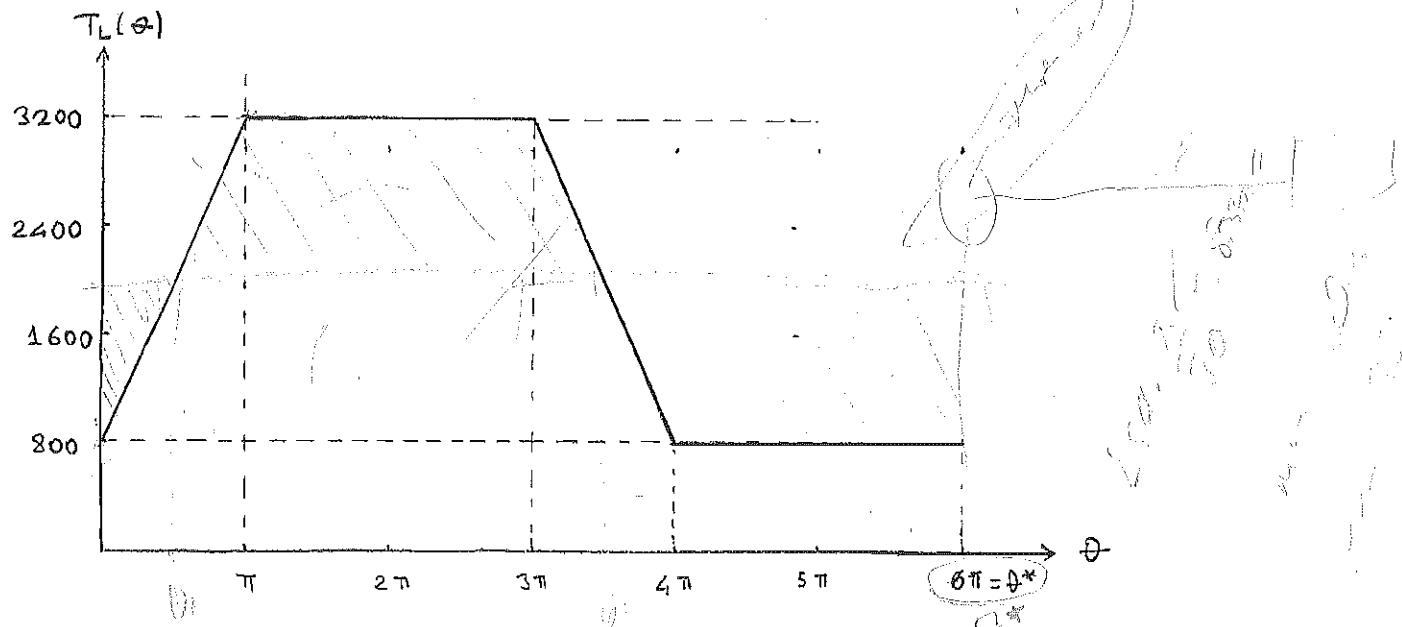
$$E_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [T_D - T_L] d\theta = - \left[ (4000 - 353) \cdot \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} (4000 - 353) \cdot 0,638 \right]$$

$$\Rightarrow E_2 = -3365,1 \text{ N-m (Joule)} \Rightarrow E = -E_2 = 3365,1 \text{ N-m (Joule)}$$

$$\delta = \frac{E}{(W_{\text{ort}})^2 \cdot \text{motor mili} \cdot I_v \cdot m \cdot k_G^2} = \frac{3365,1}{\left(1500 \cdot \frac{\pi}{30}\right)^2 \cdot (30 \times 0,25^2)} = 0,0727$$

$$\Rightarrow \delta = \% 7,27$$

Örnek: Üzerinde volan takılı bir makine giriş mili  $250 \frac{\text{devir}}{\text{dak}}$  hızda dönmektedir. Makinanın moment gereksinimi aşağıdaki grafikte gösterildiği gibi milin her üç devrinde bir tekrarlanmaktadır.

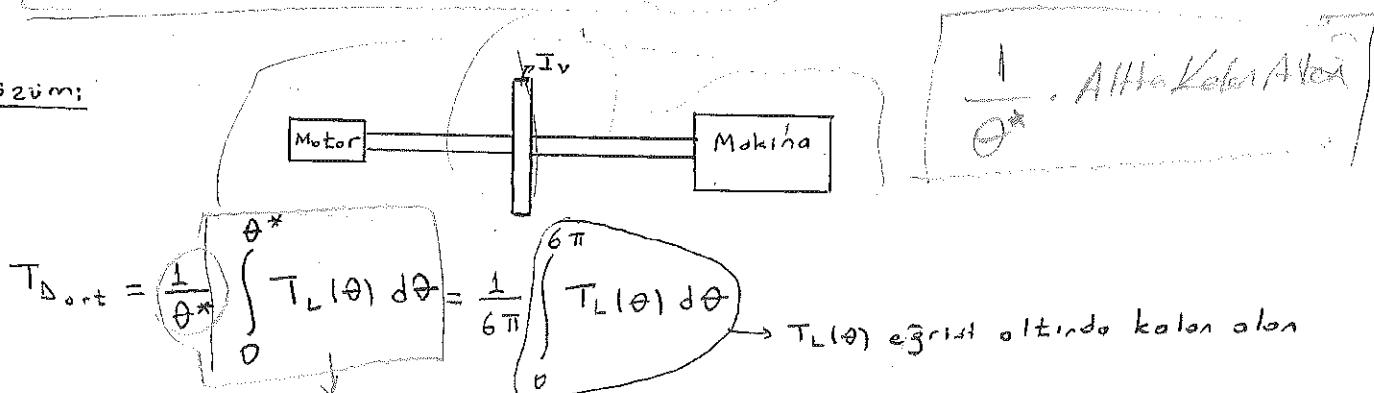


Volan  $500 \text{ kg}$  ağırlığından dolayı atlet yarıçapı  $0,6 \text{ metredir}.$

a) Motorun sağlanması gereken ortalamalı tork momenti ve ortalamalı güçünü bulunuz.  $T_{D,ort} = W_{D,ort} / 6\pi$

b) Hız. körorsızlık kat sayısını hesaplayınız.

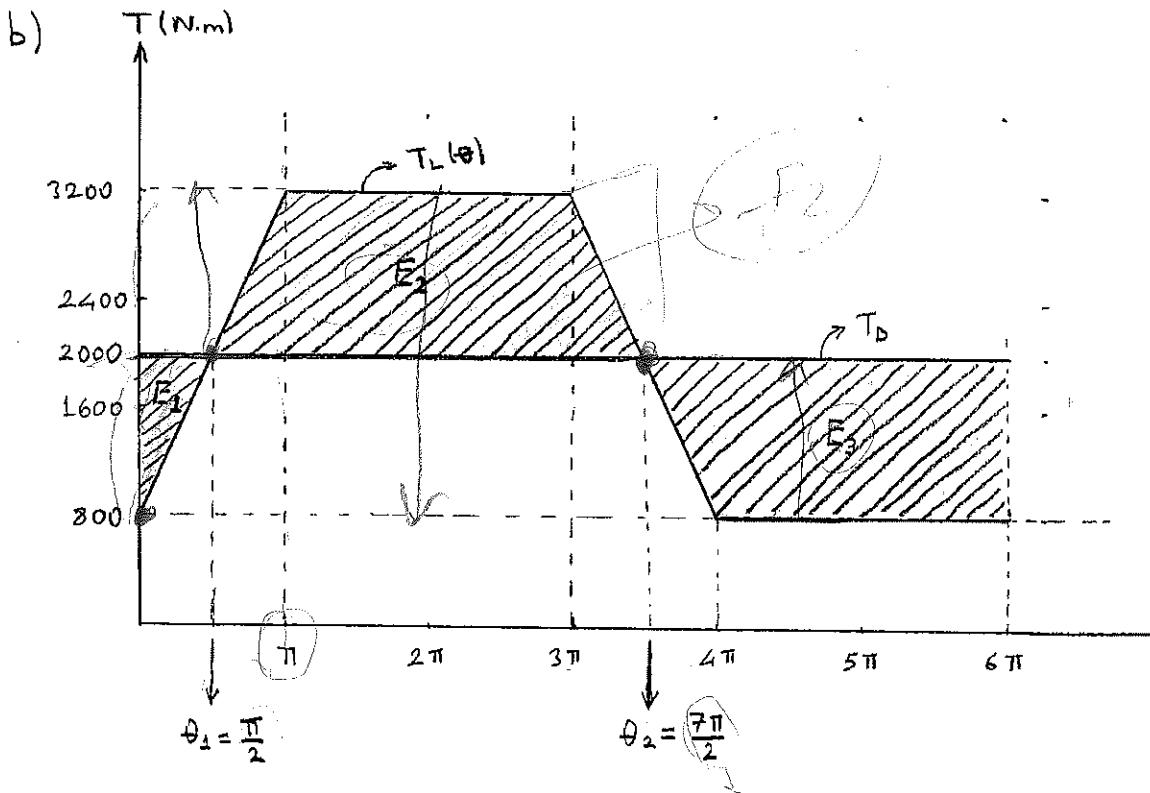
Gözüm:



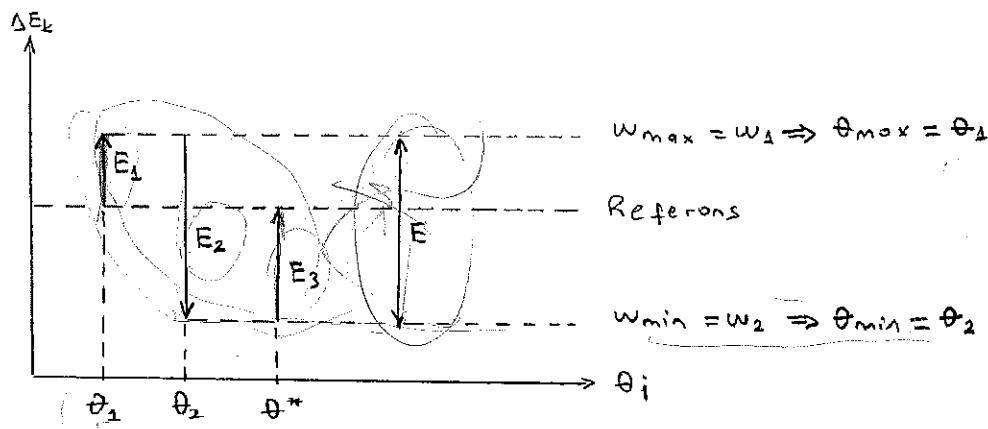
$$\Rightarrow T_{D,ort} = \frac{1}{6\pi} \left[ 800 \cdot 6\pi + (3200 - 800) \cdot (3\pi - \pi) + 2 \cdot \frac{1}{2} (3200 - 800) \cdot \pi \right]$$

$$\Rightarrow T_{D,ort} = 2000 \text{ N.m}$$

$$\boxed{P_{D,ort} = T_{D,ort} \cdot \omega_{D,ort} = 2000 \cdot \left( 250 \cdot \frac{\pi}{30} \right)} \Rightarrow P = 52360 \text{ W} = 52,36 \text{ kW}$$



Enerji Gubuk Diagramı



$$E = -E_2 = E_1 + E_3$$

veya

$$E = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} (T_D - T_L) d\theta = \int_{\theta_2}^{\theta_1} (T_D - T_L) d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} (T_D - T_L) d\theta = -E_2$$

$$E_2 = - \left[ (3200 - 200) \cdot (3\pi - \pi) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3200 - 2000) \cdot \frac{\pi}{2} \right] = -9425 \text{ N}\cdot\text{m} (\text{J})$$

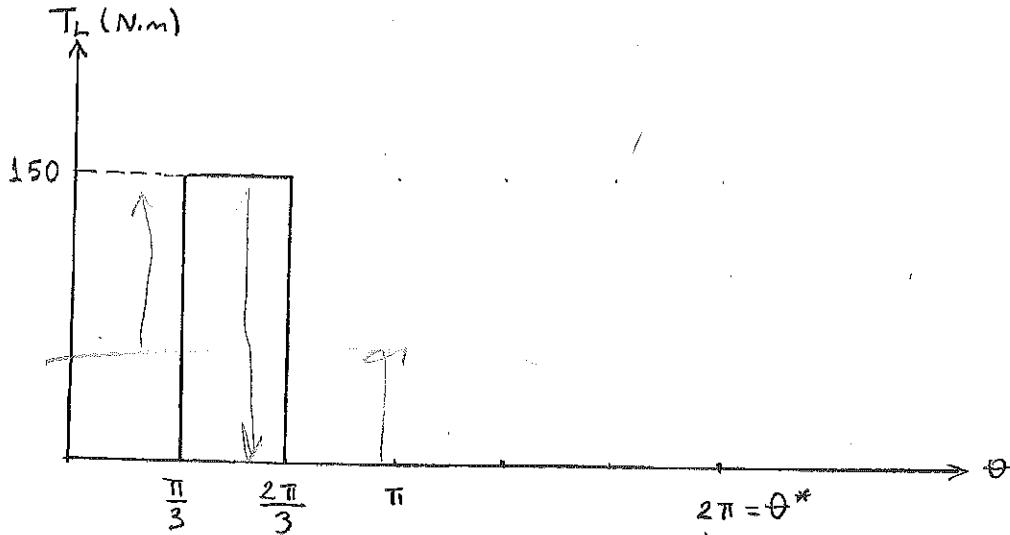
$$\Rightarrow E = -E_2 = 9425 \text{ J}$$

$$\delta = \frac{E}{I_v \cdot (w_{ort})^2} = \frac{9425}{(500 \cdot 0,6^2) \cdot (250 \cdot \frac{\pi}{30})^2} = 0,0764 \Rightarrow \delta = \% 7,64$$

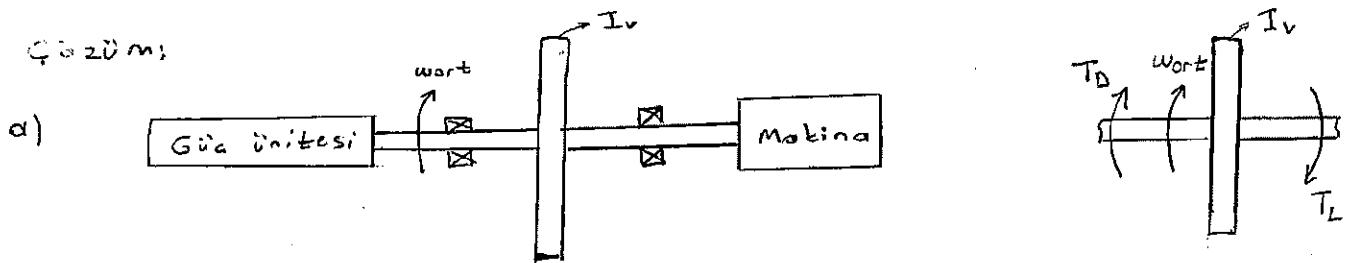
(15)

### Örnek:

Bir makina, yeri devrinde sabit bir  $T_0$  momenti ve kalan yeri devrinde sıfır moment üretken bir güç ünitesi tarafından çalıştırılmaktadır. Miliin ortalamalı açısal hızı  $1200 \text{ devir/dak}$ 'dır. Makinanın moment gereksinimi aşağıdaki grafikte verilmistir. Makinanın moment gereksinimi makina milinin her bir devrinde tekrarlanmaktadır.



- Güç ünitesinin sağlanması gereken ortalamalı totalek momentini ve ortalamalı gücünü bulunuz. Maksimum hız dalgalarının  $\pm 1$  devir/dak olmasından, güç ünitesi miline bağlanması gereken volanın kütle etkileşim momentini  $I_V$ , hesaplayınız.
- Volando depolanan maksimum enerji nedir ve 1 devirde bu enerjinin ne kadarı kullanılmışmaktadır.
- Dışlı oranı  $\frac{2}{1}$  olan bir dışlı kutusu kullanıldığında, çıkış milii hızı  $1200 \text{ devir/dak}$  olan bir güç ünitesinin ortalamalı gücü hesaplayınız. Maksimum hız dalgalarının  $\pm 1$  devir/dak. olması için, güç ünitesi miline takılması gereken volanın kütle etkileşim momentini hesaplayınız.



$$w_{ort} = 1200 \frac{\text{devir}}{\text{sok}}$$

Makina milinde gıva ünitesinin sağlamaası gereken ortalamalı torkik momenti:

$$(T_{Dort})_{\text{makina mil}} = \frac{1}{\theta^*} \int_0^{\theta^*} T_L(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left( 150 \cdot \frac{\pi}{3} \right) = 25 \text{ N.m}$$

$\theta^*$   
0  
 $T_L(\theta)$  - itinda  
bölüm olom

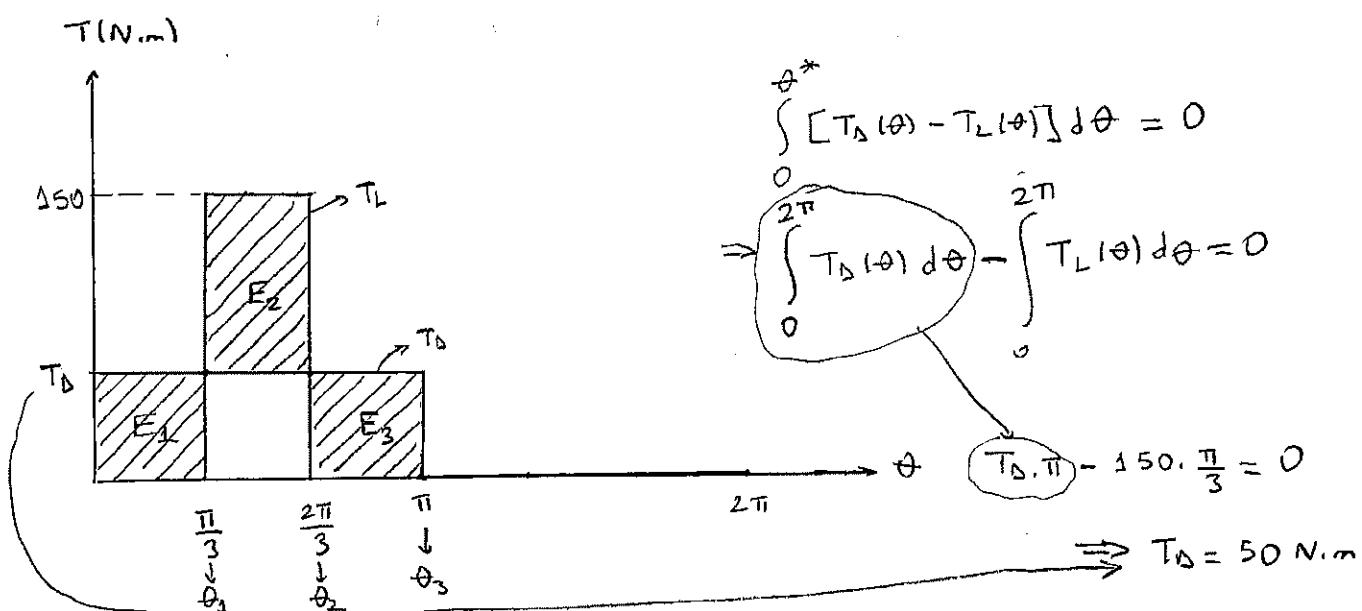
Diski kütüsü kalkanılmadığı için:

$$(T_{Dort})_{\text{gıva ünitesi mil}} = (T_{Dort})_{\text{makina mil}}$$

$$(w_{ort})_{\text{gıva ünitesi mil}} = (w_{ort})_{\text{makina mil}}$$

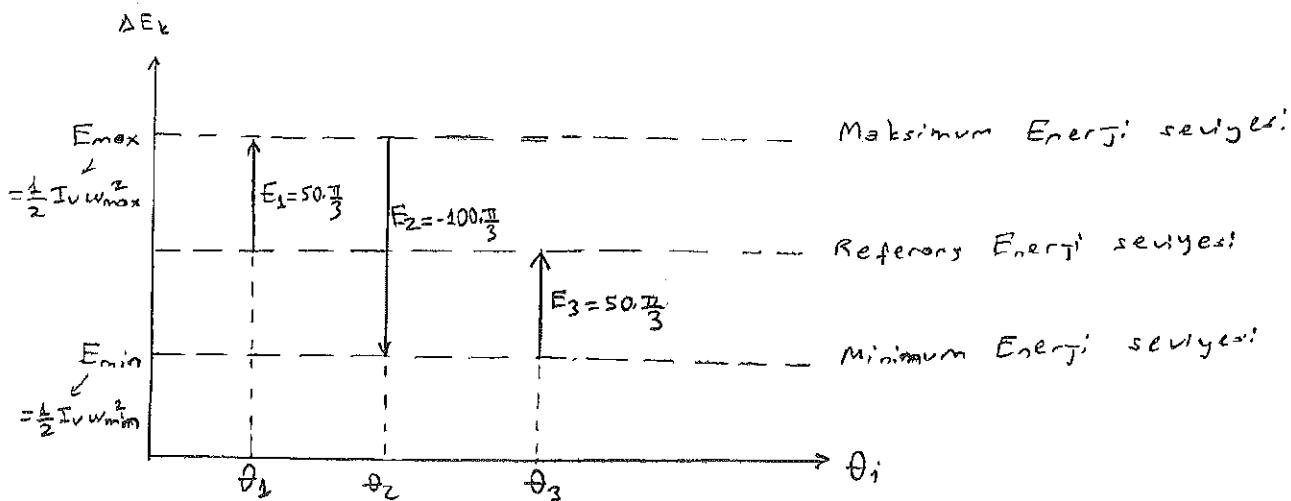
$$P_{ort} = T_{Dort} \cdot w_{ort} = 25 \text{ N.m} \left( 1200 \cdot \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 3141,6 \text{ W}$$

$$\approx 3,14 \text{ kW}$$



$$E_1: +, E_2: -, E_3: +, E_1 = 50 \cdot \frac{\pi}{3}, E_2 = -100 \cdot \frac{\pi}{3}, E_3 = 50 \cdot \frac{\pi}{3}$$

## Energy; cubuk diyagramı:



$$E = -E_2 = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104,72 \text{ Nm (J)}$$

$$I_v = \frac{E}{w_{\text{ort}}^2 \cdot s} \quad , \quad s = \frac{\Delta w}{w_{\text{ort}}} = \frac{2 \text{ devir}}{1200 \text{ devir}} = \frac{1}{600}$$

$$\Rightarrow I_v = \frac{104,72}{(1200, \frac{\pi}{30})^2 \cdot \frac{1}{600}} = 3,98 \text{ kp.m}^2$$

b)  $E_{\text{max}} = \frac{1}{2} I_v w_{\text{max}}^2$

$$s = \frac{\Delta w}{w_{\text{ort}}} \quad , \quad \Delta w = w_{\text{max}} - w_{\text{min}} \quad , \quad w_{\text{ort}} = \frac{w_{\text{max}} + w_{\text{min}}}{2} \Rightarrow w_{\text{min}} = 2w_{\text{ort}} - w_{\text{max}}$$

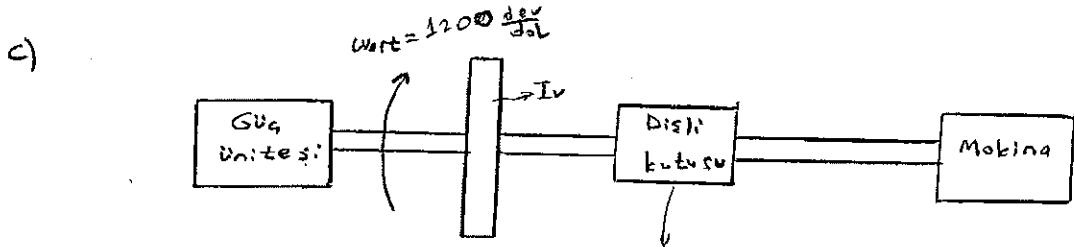
$$\Rightarrow s = \frac{w_{\text{max}} - (2w_{\text{ort}} - w_{\text{max}})}{w_{\text{ort}}} \Rightarrow w_{\text{max}} = \left(1 + \frac{s}{2}\right) w_{\text{ort}}$$

$$\Rightarrow w_{\text{max}} = 1200 \frac{\text{dev}}{\text{Jok}} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{600}}{2}\right) = 1201 \frac{\text{devir}}{\text{Jok}}$$

$$\Rightarrow E_{\text{max}} = \frac{1}{2} (3,98) \cdot (1201, \frac{\pi}{30})^2 = 31477,2 \text{ J}$$

1 devirde külənlərin enerji =  $E = -E_2 = 104,72 \text{ Nm}$

$$\% \Delta E = \frac{104,72}{31477,2} \times 100 = \% 0,33$$



$$\text{Diski} = \frac{2}{I} \quad \therefore \text{yani borsal hiz yarige dusuryor} \\ \text{torku 2 kat artiriyor}$$

Buna göre gaz ünitesi mili 2 i devirde dəndəpünde makina mili 4 devir dəne

$$(W_{\text{ort}})_{\text{makina}} = \frac{1}{2} (W_{\text{ort}})_{\text{gaz ünitesi}}$$

$$(T_{\Delta \text{ort}})_{\text{makina}} = 2 \cdot (T_{\Delta \text{ort}})_{\text{gaz ünitesi}}$$

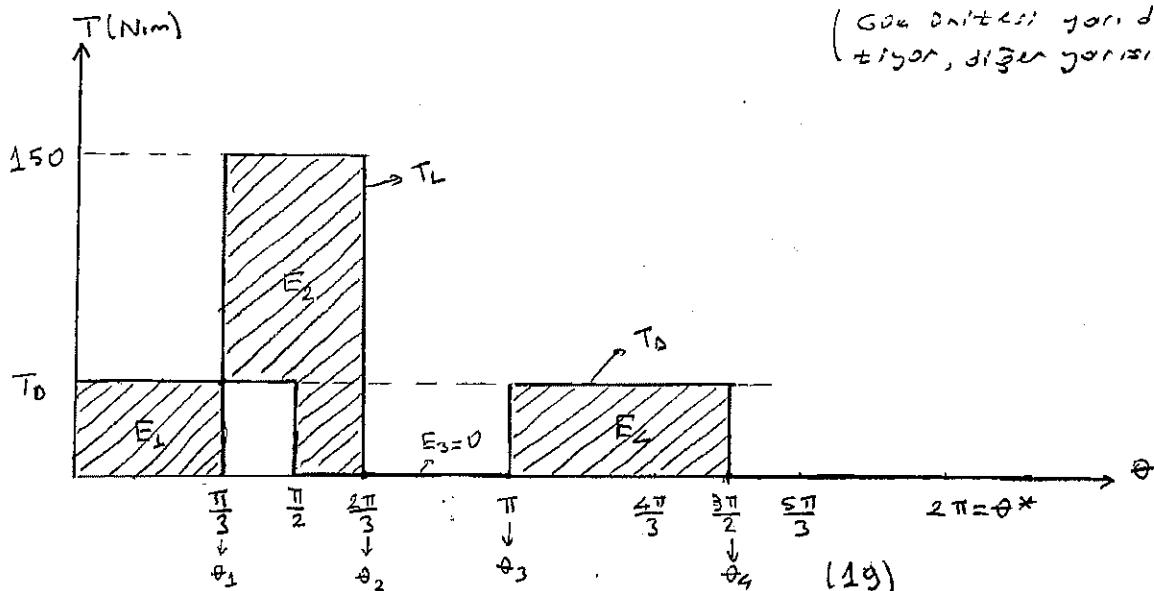
$$(T_{\Delta \text{ort}})_{\text{makina}} = \frac{1}{\theta^*} \int_0^{\theta^*} T_L(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} (150 \cdot \frac{\pi}{3}) = 25 \text{ N.m}$$

$$(W_{\text{ort}})_{\text{makina}} = \frac{1}{2} \cdot 1200 \frac{\text{devir}}{\text{dək}} = 600 \frac{\text{devir}}{\text{dək}}$$

$$P_{\text{ort}} = (T_{\Delta \text{ort}})_{\text{makina}} \cdot (W_{\text{ort}})_{\text{makina}} = (T_{\Delta \text{ort}})_{\text{gaz ünitesi}} \cdot (W_{\text{ort}})_{\text{gaz ünitesi}} \\ = 25 \cdot (600 \cdot \frac{\pi}{30}) = \frac{25}{2} \cdot (1200 \cdot \frac{\pi}{30})$$

$$\Rightarrow P_{\text{ort}} = 1570,8 \text{ W} \approx 1,57 \text{ kW}$$

Makina miliindeki tork eğrisini çiziyorsak: ( Makina mili 4 devir dəndəpində )  
 gaz ünitesi mili 2 " dənəsər  
 ( Gaz ünitesi yaridərində tork artıq, diğər yarisında da etməyər )



$$\int_0^{2\pi} [T_D(\theta) - T_L(\theta)] d\theta = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} T_D(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} T_L(\theta) d\theta = 0$$

$$(T_D \cdot \frac{\pi}{2} + T_L \cdot \frac{\pi}{2}) - 150 \cdot \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\Rightarrow T_D = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

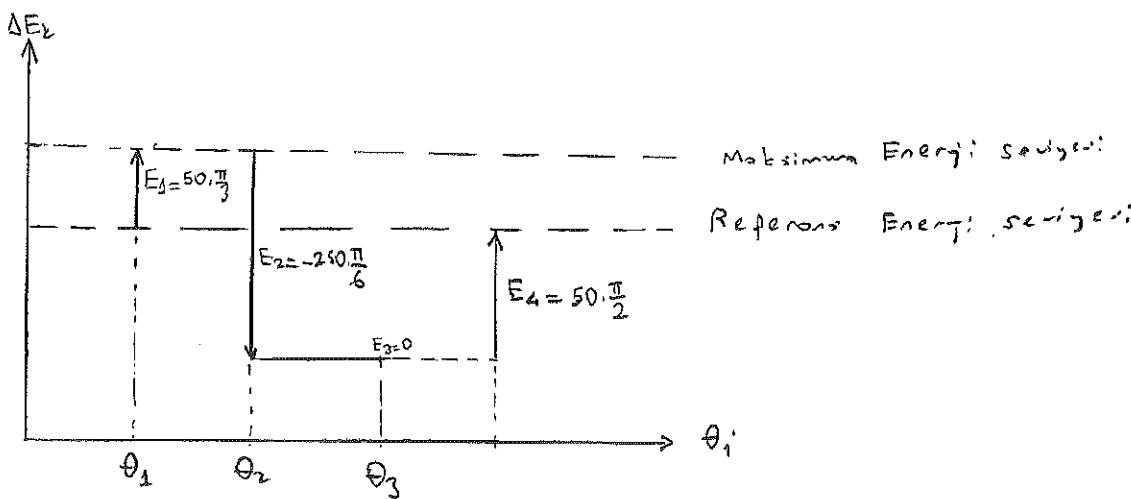
$$E_1 = 50 \cdot \frac{\pi}{3} \text{ J}$$

$$E_2 = - \left[ 100 \cdot \frac{\pi}{3} + 50 \cdot \frac{\pi}{6} \right] = -250 \cdot \frac{\pi}{6} \text{ J}$$

$$E_3 = 0$$

$$E_4 = 50 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Energie Subukt Diagramm



$$\omega_{max} = \omega_1 \Rightarrow \theta_{max} = \theta_4 = \frac{\pi}{3}, \quad \omega_{min} = \underset{\text{arcsinus}}{\theta_2 \text{ bis } \theta_3} \Rightarrow \theta_{min} = \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$$

$$E = -E_2 = E_3 + E_4 = 50 \cdot \frac{\pi}{3} + 50 \cdot \frac{\pi}{2} = 130,9 \text{ J}$$

$$I_V = \frac{E}{(U_{Brt})_{\text{gekennzeichnet}}^2} = \frac{130,9}{(1200 \cdot \frac{\pi}{30})^2 \cdot \frac{1}{600}} = 4,97 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(20)

**MAK 360 MAKİNE DİNAMİĞİ**  
**2008-2009 BAHR DÖNEMİ FINAL SINAVI**

**Öğretim Üyesi:** Yrd. Doç.Dr. Yasin YILMAZ  
**Süre:** 110 dakika

01.06.2009

1-) Bir pres makinasında, makine milinin bir tam dönüşünde iki delme ve bir parça çıkarma işlemleri gerçekleştirilmektedir. Bir delme işlemi 0,1 saniyede, parça çıkarma işlemi ise 0,2 saniyede gerçekleşmektedir. Makina delme işlemi sırasında 1000 Nm, parça çıkarma işlemi sırasında ise 500 Nm sabit torka ihtiyaç duymaktadır. İşlemlerin sırası aşağıda verilmiştir:

Birinci delme işlemi :  $\pi/3 \leq \theta_{makina\_mili} \leq 2\pi/3$

İkinci delme işlemi :  $\pi \leq \theta_{makina\_mili} \leq 4\pi/3$

Parça çıkarma işlemi :  $\pi \leq \theta_{makina\_mili} \leq 5\pi/3$

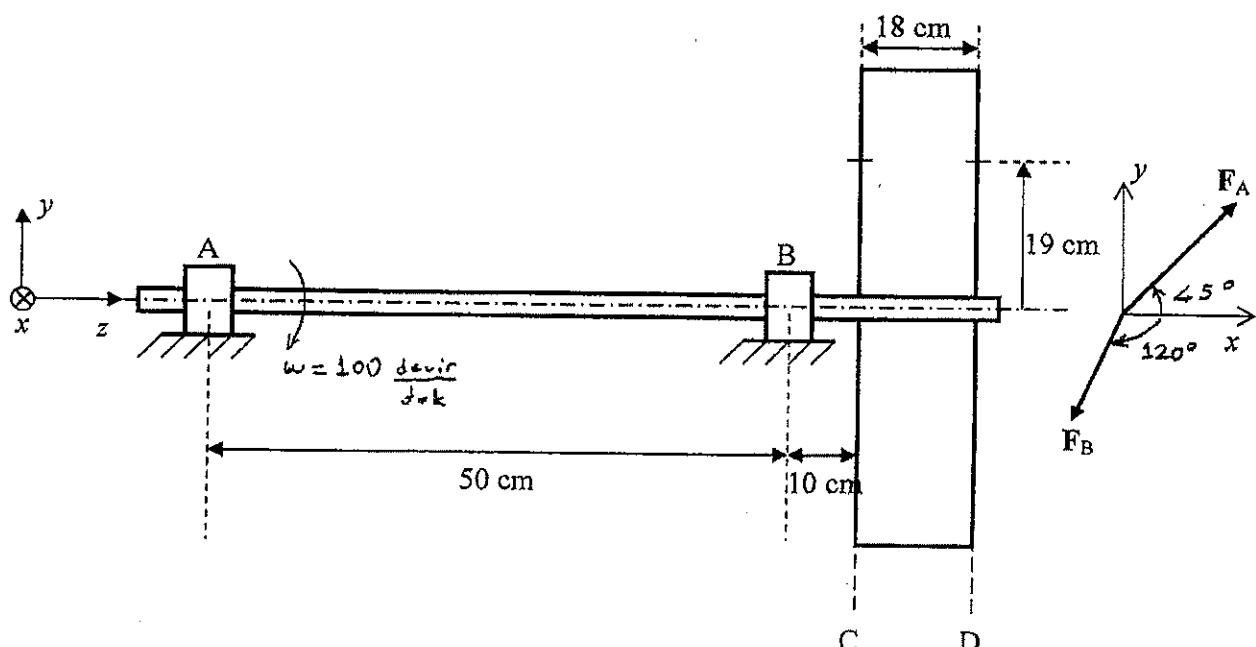
Motor mili 1500 devir/dakika ortalama açısal hızda dönmektedir. Makina milinde istenilen maksimum açısal hız dalgalanması  $\pm 1$  devir/dak' dır.

- Motorun sağlaması gereken ortalama tahrik momentini ve motorun ortalama gücünü hesaplayınız.
- Maksimum ve minimum açısal hızların gerçekleştiği  $\theta_{makina\_mili}$  değerlerini bulunuz.
- Makina miline takılması gereken volanın kütle atalet momentini hesaplayınız.
- Motor miline takılması gereken volanın kütle atalet momentini hesaplayınız.

2-) Bir dengelenme makinasına bir teker aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bağlanmıştır. Mil 100 devir/dakika sabit açısal hızda döndürüldüğünde A ve B yataklarındaki kuvvetler ölçülmüş ve aşağıdaki değerler okunmuştur. Yatak kuvvetleri şekilde x-y düzleminde gösterilmiştir.

$$F_A = 2,2 \text{ N} \angle 45^\circ, \quad F_B = 1,2 \text{ N} \angle -120^\circ$$

Tekerin dinamik olarak dengelenmesi için C ve D düzlemlerine, dönme ekseninden 19 cm mesafede takılması gereken kütleleri ve açısal pozisyonlarını bulunuz.

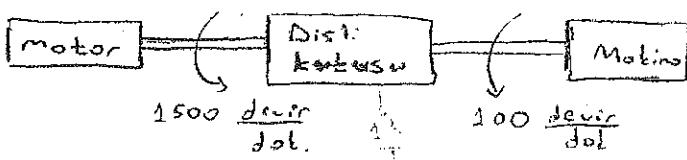


# MAKİNA DINAMİĞİ FINAL SINAVI ÇÖZÜMLERİ

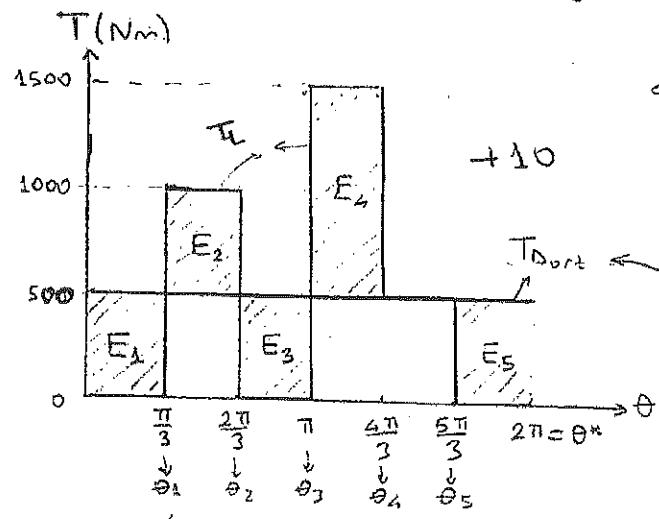
1-) Bir delme işlemi: 0,4 saniyede geraceklesmetedir ve bu işlem süresinde motorin mili  $\frac{\pi}{3}$  radyan dönmüştür. Dölyazısı:

$$(W_{ort})_{motor \text{ mili}} = \frac{\pi/3 \text{ radyan}}{0,4 \text{ s}} = 10,472 \frac{\text{radyan}}{\text{s}} = 100 \frac{\text{devir}}{\text{dak}}$$

olarak bulunur.  $(W_{ort})_{motor \text{ mili}} = 1500 \frac{\text{devir}}{\text{dak}}$  olarak verilmistir.



Motördeki tork gereklimi su şekildededir.



$$a) (T_{Dort})_{motor \text{ mili}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_L(\theta) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( 1000 \cdot \frac{\pi}{3} + 1500 \cdot \frac{\pi}{3} + 500 \cdot \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(T_{Dort})_{motor \text{ mili}} = 500 \text{ N.m} \quad +5 \\ \Rightarrow (T_{Dort})_{motor} = \frac{500}{15} \text{ N.m}$$

$$P_{ort} = (T_{Dort})_{motor \text{ mili}} \cdot (W_{ort})_{motor \text{ mili}} = (T_{Dort})_{motor} \cdot (W_{ort})_{motor}$$

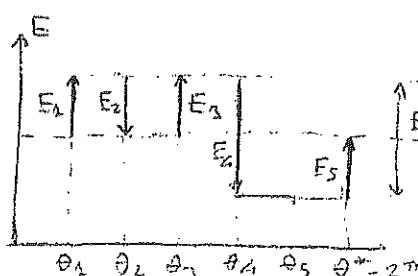
$$\Rightarrow P_{ort} = 500 \text{ N.m} \cdot (100 \cdot \frac{\pi}{30}) \frac{\text{radyan}}{\text{s}} = 5236 \text{ W} \quad +5$$

$$b) E_4 = 500 \cdot \frac{\pi}{3} = E_3 = E_5$$

$$E_2 = -500 \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$E_1 = -1000 \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$[E_1 - E_4] = 1000 \cdot \frac{\pi}{3} = 1047 \text{ J}$$



$$\text{Max } w_{max} \text{ da ve } \theta_{3,4} \text{ da geraceklesmesi} \\ \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} \text{ s } \pi \quad +5$$

$w_{min} \text{ da } \theta_4 \text{ da } \theta_5 \text{ da geraceklesmesi}$

$$\Rightarrow \theta_{min} = \frac{4\pi}{3} \text{ da en } \frac{5\pi}{3} \text{ e} \quad +5$$

$$c) I_v = \frac{E}{(W_{ort})_{motor \text{ mili}}^2 \cdot \delta} = \frac{1047}{(1500 \cdot \frac{\pi}{30})^2 \cdot \frac{2}{100}} = [477,4 \text{ kg.m}^2] \quad +5$$

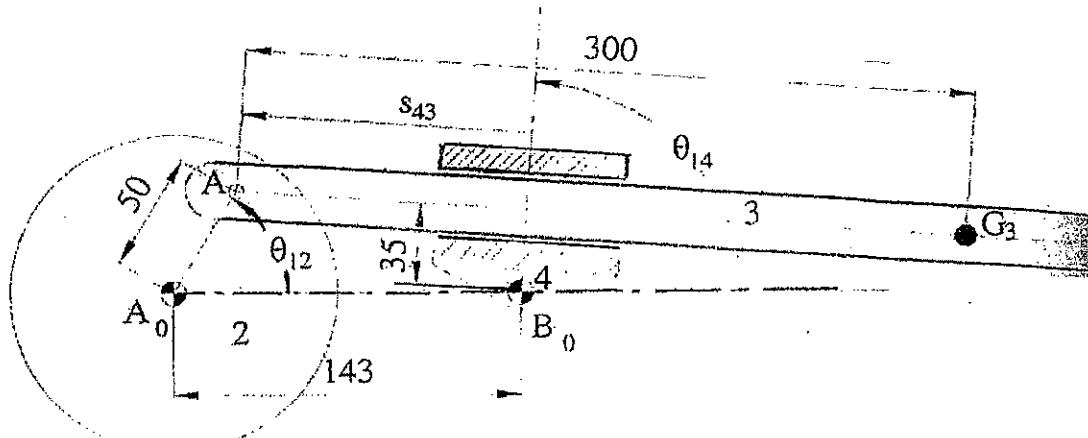
$$d) I_v = \frac{E}{(W_{ort})_{motor \text{ mili}}^2 \cdot \delta} = \frac{1047}{(100 \cdot \frac{\pi}{30})^2 \cdot \frac{2}{100}} = [2,1 \text{ kg.m}^2] \quad +5$$

**MAK 360 MAKİNE DİNAMİĞİ**  
**2009-2010 YAZ DÖNEMİ FINAL SINAVI**

**Öğretim Üyesi:** Yrd. Doç.Dr. Yasin YILMAZ  
**Süre:** 110 dakika

13.08.2010

**1-)** Şekilde gösterilen mekanizmanın hareket, hız ve ivme analizi yapılmış ve  $\theta_{12} = 50^\circ$ ,  $\dot{\theta}_{12} = 10 \hat{k}$  rad/s ve  $\ddot{\theta}_{12} = 0$  iken;  $\theta_{14} = 88.302^\circ$ ,  $\dot{\theta}_{14} = -2.77 \hat{k}$  rad/s,  $\ddot{\theta}_{14} = 56.85 \hat{k}$  rad/s<sup>2</sup>,  $s_{43} = 111.95$  mm,  $\dot{s}_{43} = 489.27$  mm/s ve  $\ddot{s}_{43} = 1967.09$  mm/s<sup>2</sup> olarak hesaplanmıştır. Uzuv boyutları,  $|A_0 A| = a_2 = 50$  mm,  $|A_0 B_0| = a_1 = 143$  mm,  $|AG_3| = b_3 = 300$  mm'dir. 3 uzvu 5 kg ağırlıkta olup ağırlık merkezine göre atalet momenti  $0,02 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 'dir. Diğer uzuvların kütleleri ihmal edilebilir. 2 uzunun bu sabit açısal hızda hareketine devam etmesini sağlamak için bu uzva uygulanması gereken giriş momentini şekilde gösterilen konum için hesaplayınız. Mafsal kuvvetlerini belirleyiniz. (50 puan)



**2-)** Bir makineye motor tarafından sağlanan tork değeri  $T_D(\theta) = 250 + 80 \sin 2\theta$  (Nm)' dir. Makinenin moment gereksinimi ise  $T_L(\theta) = 250 + 50 \sin \theta$  (Nm) olarak verilmiştir ( $\theta$ : makine giriş kolu açısından). Makine giriş mili **ortalama** 500 devir/dakika açısal hızla dönmektedir. Makine giriş mili üzerinde kütlesi 100 kg ve atalet yarıçapı 200 mm olan bir volan bulunmaktadır.

- a) Makine milinin maksimum ve minimum açısal hızlarını bulunuz. (15 puan)
- b) Hız kararsızlık katsayısını belirleyiniz. (10 puan)
- c) Motorun ortalama gücünü hesaplayınız. (5 puan)

$$2)- T_D(\theta) = 250 + 80 \cdot \sin 2\theta \text{ N.m}$$

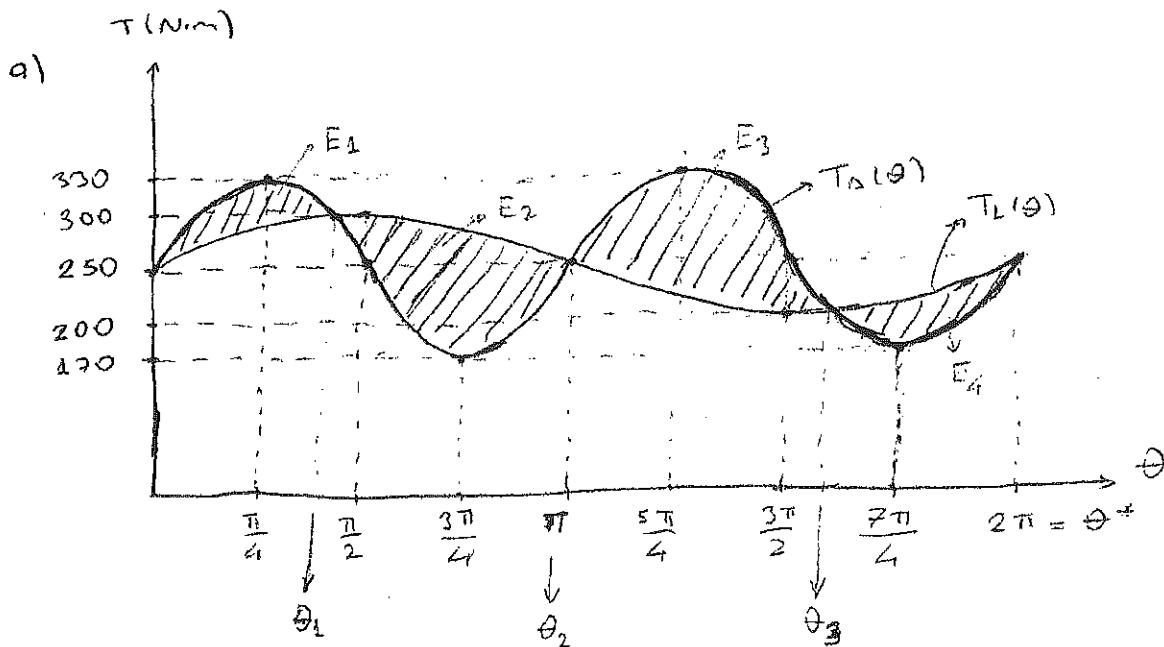
$$\omega_{0,r} = 500 \text{ deg/rad/s}$$

$$T_L(\theta) = 250 + 50 \cdot \sin \theta \text{ N.m}$$

$$m_{volom} = 100 \text{ kg}, k_{Gvolom} = 0,2$$

a)  $w_{max} = ?$ ,  $w_{min} = ?$

b)  $\delta = ?$ ,  $\rightarrow P_{motor} = ?$



$\times \theta_2$  ve  $\theta_3$ 'i bulmak icin:

$$\begin{aligned} T_D(\theta) = T_L(\theta) &\Rightarrow 80 \cdot \sin 2\theta = 50 \cdot \sin \theta \\ &\Rightarrow 160 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = 50 \cdot \sin \theta \Rightarrow \cos \theta = 0,3125 \\ &\Rightarrow \theta_1 = 71,73^\circ, \quad \theta_3 = 288,21^\circ (+5^\circ \text{ faz}) \end{aligned}$$

$$E_1 = \int_0^{71,73^\circ} (80 \sin 2\theta - 50 \sin \theta) d\theta = [-40 \cos 2\theta + 50 \cos \theta]_0^{71,73^\circ} = (47,8125 - 10) = 37,8125$$

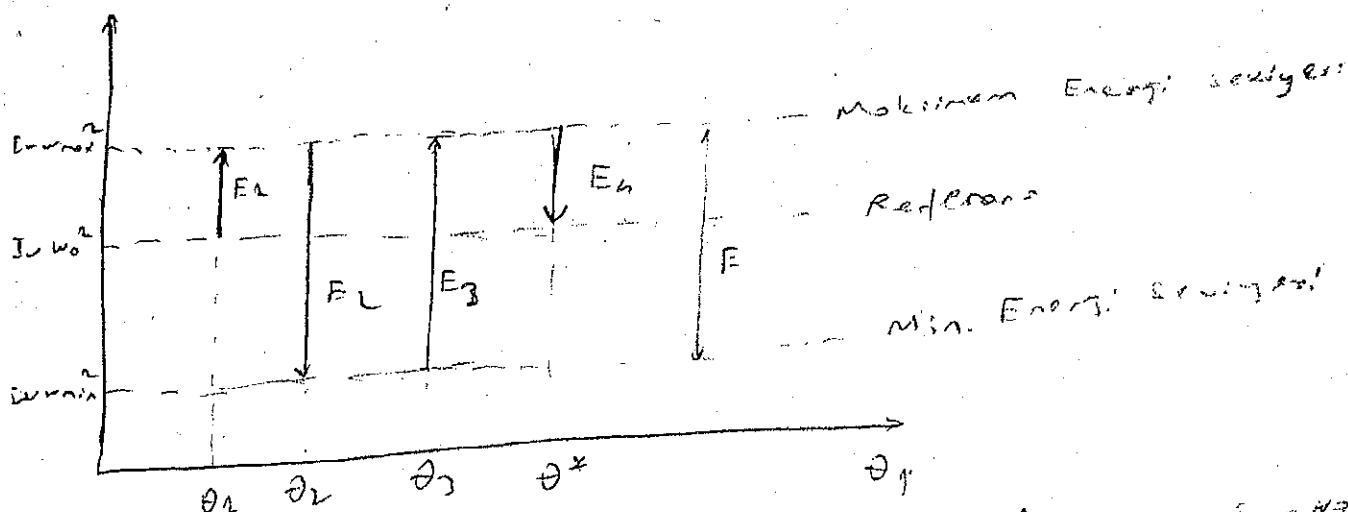
$$E_2 = \int_{71,73^\circ}^{180^\circ} ( ) d\theta = [ ]_{71,73^\circ}^{180^\circ} = (-90 - 47,8125) = -137,8125$$

$$E_3 = \int_{180^\circ}^{288,21^\circ} ( ) d\theta = [ ]_{180^\circ}^{288,21^\circ} = (42,8125 - 30) = 137,8125$$

$$E_4 = \int_{288,21^\circ}^{360^\circ} ( ) d\theta = [ ]_{288,21^\circ}^{360^\circ} = (10 - 47,8125) = -37,8125$$

## Energie-Eckwinkel-Diagramm

Kinett Energie



$$E = E_3 = -E_2 = 137,8125 \text{ J} = \text{Iv. Werte } \Delta w \quad (+ 5 \text{ p. 20})$$

$$\text{Iv. } m \cdot k_G^2 = 100 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2 = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_{\text{ort}} = 500 \times \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad/s}}{\text{s}} = 52,36 \frac{\text{rad/s}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow 137,8125 = 4 \cdot 52,36 \cdot \Delta w \Rightarrow \Delta w = 0,658 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}$$

$$\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}} = 104,72 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (+ 2)$$

$$\omega_{\text{ort}} = \frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2} \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{max}} = 52,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 503,15 \frac{\text{deg}}{\text{s}} \quad (+ 2)$$

$$(1) \approx (2) \text{ für}$$

$$\omega_{\text{min}} = 52,36 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 496,85 \frac{\text{deg}}{\text{s}} \quad (+ 2)$$

$$b) \delta = \frac{E}{\text{Iv. Werte}} = \frac{137,8125}{4 \cdot (52,36)^2} = 0,012567 = \approx 1,2567 \quad (+ 5 \text{ p. 20})$$

$$c) P_{\text{ort}} = T_{\text{ort}, \text{Wert}} = 250 \cdot (52,36) = 13090 \text{ W} \quad (= 13,09 \text{ kW}) \quad (+ 5 \text{ p. 20})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_L(\theta) d\theta = 250 \text{ Nm}$$