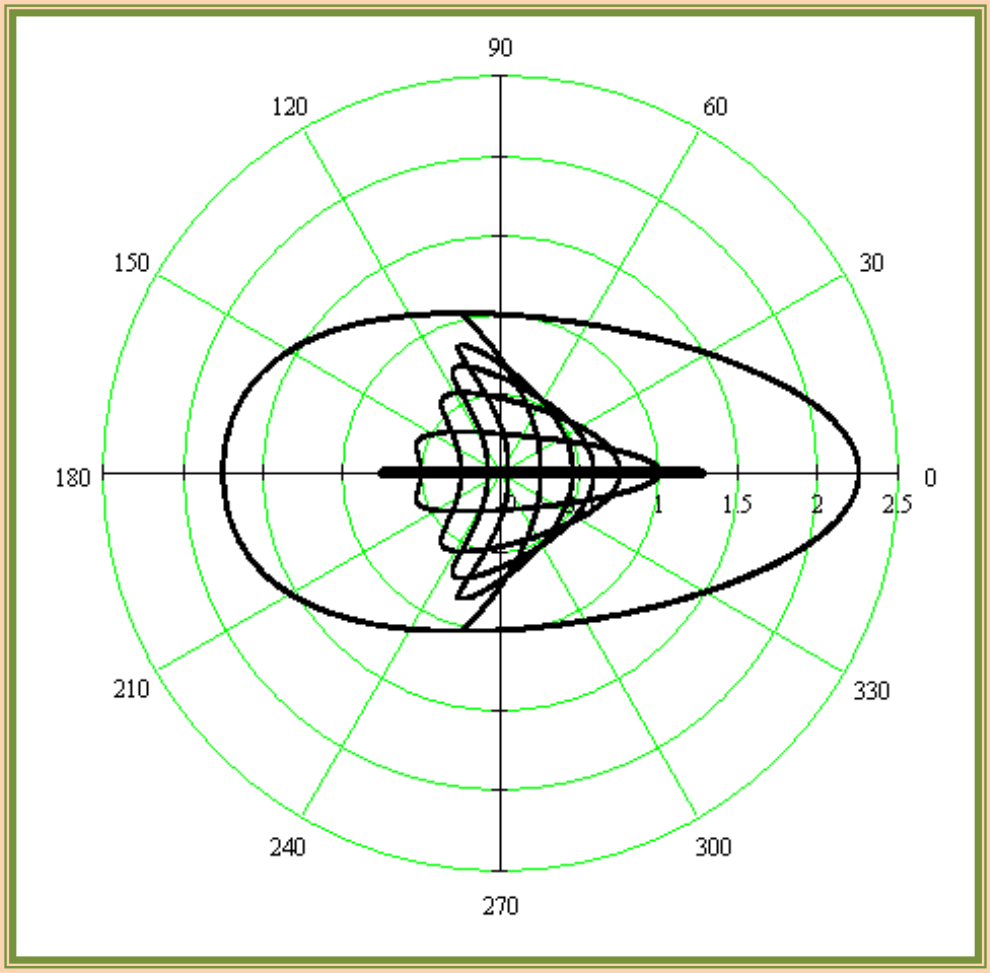
MAKİNA TEORİSİ II

MAKİNA DİNAMİĞİ

DERS NOTLARI



Prof. Dr. Özgür TURHAN

İTÜ Makina Fakültesi

Ocak 2006

MAKİNA DİNAMİĞİ

İÇİNDEKİLER Sayfa

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAM VE İLKELER 4
2.1 Kuvvetler 4
2.1.1 Kuvvet Yasaları 4
2.1.2 Kuvvetlerin Sınıflandırılması 7
2.1.2.1 Evrensel Kuvvetler-Özel Kuvvetler 7
2.1.2.2 Korunumlu Kuvvetler-Korunumsuz Kuvvetler 7
2.1.2.3 Gerçek Kuvvetler-Kurgusal Kuvvetler 8
2.1.2.4 İç Kuvvetler-Dış Kuvvetler 10
2.1.2.5 Verilmiş Kuvvetler-Kısıt Kuvvetleri 11
2.2 Rijid Cisimlerde Kütle ve Kütle Dağılımı 11
2.2.1 Rijid Cismin Kütlesi 11
2.2.2 Rijid Cismin Kütle Merkezi 12
2.2.3 Rijid Cismin Eylemsizlik Tansörü 12
2.2.4 Rijid Cismin Bir Eşdeğer Maddesel Noktalar Sistemine İndirgenmesi 16
2.2.4.1 En Genel Hal 16
2.2.4.2 Düzlemsel Hareket Yapan Düzlemsel Cisimler Hali 17
2.3 Rijid Cisimlerin Vektörel Mekaniğinin Esasları 22
2.3.1 Rijid Cismin Kütle Merkezinin Hareketi 22
2.3.2 Rijid Cismin Dönme Hareketi 22
2.3.2.1 Denklemlerin Bir Asal Eksen Takımında Yazılması Hali 23
2.3.2.2 Cismin Doğrultusu Sabit Bir Eksen Çevresinde Dönmesi Hali 24
2.3.3 Rijid Cismin Statik Dengesi 24
2.3.4 Rijid Cismin Kinetik Enerjisi 25
2.4 Analitik Mekaniğin Esasları 26
2.4.1 Serbestlik Derecesi. Genelleştirilmiş Kordinatlar.Kısıtlar 26
2.4.1.1 Temel Kavramlar 26
2.4.1.2 Kısıt Türleri. Sistemlerin Sınıflandırılması 28
2.4.2 Virtüel Yer Değiştirme.Virtüel İş. Kısıt Kuvvetleri 32
2.4.2.1 Virtüel Yer Değiştirme 32
2.4.2.2 Virtüel İş 33
2.4.2.3 Kısıt Kuvvetleri 33
2.4.3 Virtüel İşler İlkesi 36
2.4.4 D'Alembert İlkesi 41
2.4.5 Hareketin Lagrange Denklemleri 42
2.4.5.1 Genel 42
2.4.5.2 Holonomik Sistemlerde Lagrange Denklemleri 45

3. TEK SERBESTLİK DERECELİ DÜZLEMSEL MAKİNALARIN STATİK DENGESİ 50
3.1 Genel 50
3.2 Virtüel İşler İlkesinin Makinalara Uygulanması 50
3.2.1 Düzlemsel Hareket Yapan Bir Rijid Cisme Etkiyen Kuvvetler Sisteminin Virtüel İşler Toplamı 50
3.2.2 Makinaların Dengesi 52
3.2.3 Genelleştirilmiş Kuvvet 55
3.2.4 Mekanik Kazanç. Mekaniğin Altın Kuralı 55

4. TEK SERBESTLİK DERECELİ DÜZLEMSEL MAKİNALARIN HAREKET DENKLEMLERİ 66
4.1 Genel 66
4.2 Makinaların Genelleştirilmiş Eylemsizliği 66
4.3 Hareket Denklemi 68
4.4 Makinalara Etkiyen İşletme Kuvvetleri 76
4.4.1 Genel 76
4.4.2 Çalıştırma Kuvvetleri. Motorlar 76
4.4.2.1 İçten Yanmalı Motorlar 77
4.4.2.2 Elektrik Motorları 84
4.4.3 İş Kuvvetleri 88
4.5 Makina Hareketinin Evreleri 92
4.5.1 Genel 92
4.5.2 Bazı Örnek Makinaların Çalışma Evreleri 93

5. HAREKET DENKLEMİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ. MAKİNA DİNAMİĞİNİN ANA PROBLEMLERİ 102
5.1 Genel 102
5.2 Makina Dinamiğinin Düz Problemi. Hareket Denkleminin Sayısal Çözümü 102
5.2.1 Problemin Tanıtılması 102
5.2.2 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözümü İçin Runge - Kutta Yöntemi 103
5.2.3 Makina Hareket Denkleminin Sayısal Çözümü 104
5.3 Makina Dinamiğinin Ters Problemi. Çalıştırma Kuvvetinin Hesabı 107

6. MAKİNA HAREKETİNDE HIZ DALGALANMALARI VE GİDERME YÖNTEMLERİ 109
6.1 Hız Dalgalanmaları. Dalgalanma Katsayısı 109
6.2 Hız Dalgalanmalarını Giderme Yöntemleri 110
6.2.1 Genel Değerlendirmeler 110
6.2.2 $M(\varphi,\varpi)$ ile $\Im(\varphi)$ Arasında Uyum Sağlanması 112
6.2.3 Milin Eylemsizlik Momentinin Arttırılması. Eylemsizlik Çarkı 114
6.2.3.1 Genel Bilgiler 114
6.2.3.2 Eylemsizlik Çarkı Hesabı 116

7. MAKİNALARDA KUVVET ÇÖZÜMLEMESİ 124
7.1 Genel Belirlemeler 124
7.2 Kuvvet Çözümlemesi Problemi ve Çözümü 124

8. SARSMA KUVVETLERİ. MAKİNALARDA KÜTLE DENGELEMESİ 136
8.1 Genel 136
8.2 Krank - Biyel Esaslı Makinalarda Kütle Dengelemesi 139
8.2.1 Sarsma Kuvvetinin Tamamen Yok Edilmesi 140
8.2.2 Sarsma Momentinin Yok Edilmesi 141
8.2.3 Sarsma Kuvvetinin Kısmen Yok Edilmesi 142
8.3 Çok Silindirli İçten Yanmalı Motorlarda Sarsma Kuvvetlerinin Dengesi 147
8.3.1 Genel Bilgiler 147
8.3.2 Sıra Motorların Dengesi 147

9. RİJİD ROTORLARDA KÜTLE DENGELEMESİ 155
9.1 Esaslar 155
9.2 Rotorların Dengelenmesi 159
9.2.1 Statik Dengeleme 159
9.2.2 Dinamik Dengeleme 160
9.2.2.1 Rotorun İki Dengesizliğe İndirgenmesi 160
9.2.2.2 İki Düzlemde Dinamik Dengeleme 162

KAYNAKLAR 169

1 GİRİŞ

Makinalar, bir güç kaynağından aldıkları gücü öngörülmüş bir düzen uyarınca kuvvet ve hareket şeklinde iletip bir direncin üstesinden gelerek, belirli bir iş yapacak biçimde şekillendirilip bir araya getirilmiş direngen cisim topluluklarıdır.

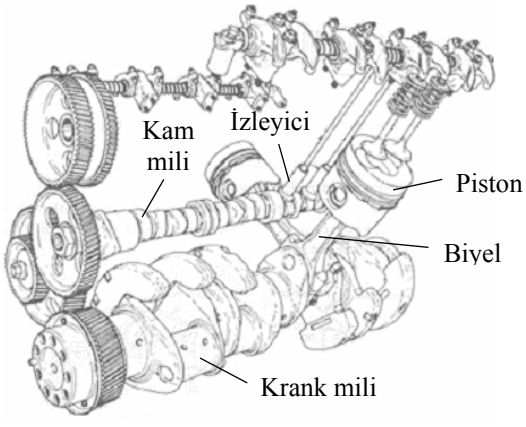
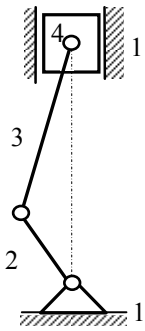
Dikkat edilirse, makinaların bu tanımı mekanizmalarınkiyle yakından ilişkilidir. Çünkü *mekanizmalar* da, *öngörülmüş bir düzen uyarınca hareket iletecek biçimde şekillendirilip bir araya getirilmiş direngen cisim toplulukları* olarak tanımlanırlar.

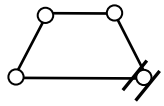
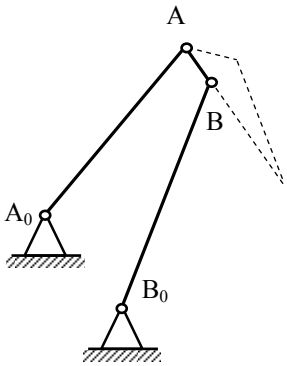
Buradan makinaların, hareketin yanı sıra kuvvet de ileten ve bunları belirli bir iş yapmakta kullanan mekanizmalardan başka bir şey olmadıkları anlaşılmaktadır. Gerçekten de hareket-kuvvet-eylemsizlik ilişkilerini, yani kinetiğini incelemek istediğimizde makina diye adlandırdığımız bir mekanik düzen, eylemsizlik ve kuvvetleri bir yana bırakıp salt hareket iletim sistematiğini, yani kinematiğini incelemek istediğimizde bize bir mekanizma (ya da mekanizmalar topluluğu) olarak görünür ve öyle adlandırılır. Sık karşılaşılan bazı makinaları, yapılarındaki ana mekanizmalar ve bu mekanizmalara ait kinematik zincirlerle birlikte gösteren Şekil 1.1, makinalarla mekanizmaların burada sözü edilen ilişkisi hakkında bir fikir vermektedir.

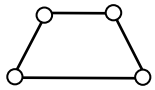
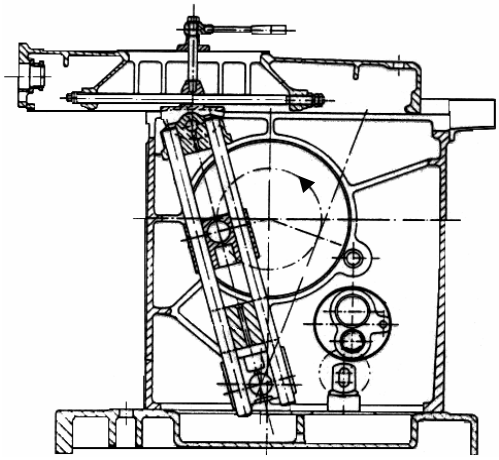
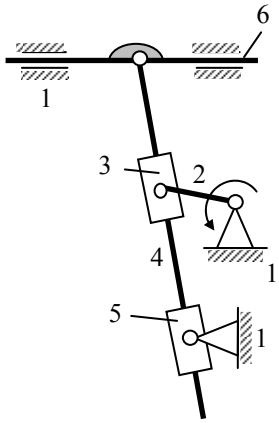
Şüphesiz, bir makinanın kinematiğini kinetiğinden bağımsız olarak ele almanın, yani hareket iletim sistematiğini kuvvetleri dikkate almaksızın incelemenin bir anlamı olabilmesi için, bu sistematiğin, kuvvetler ne olursa olsun hep aynı kalacağından emin olunması gereklidir. Bu ise, ancak, kinematik bakımdan önem taşıyan boyutları kuvvet etkisiyle değişmeyen uzuvlardan oluşan mekanizmalar için olanaklıdır. İşte, yukarıdaki makina ve mekanizma tanımlarındaki *direngen cisim* kavramı bu özelliği güvence altına almaya yöneliktir ve gerçek makina uzuvlarında az ya da çok ama muhakkak var olan, kuvvet etkisi altında şekil ve boyut değiştirme özelliğini, kinematik boyutlar özelinde yok sayan bir soyutlama oluşturmaktadır. Yalnızca bazı boyutları değil, hiç bir boyutu kuvvet etkisiyle değişmeyen cisimlerin *rijid cisim* diye adlandırıldığı anımsanırsa, direngen cisim kavramının rijid cisim kavramını da içine alan bir kapsamı olduğu anlaşılır. Rijid cisimlerin yanı sıra, uzamasız kayış, kablo ve zincirler, sıkıştırılamaz akışkanlar vb. de direngen cisim kapsamına girerler.

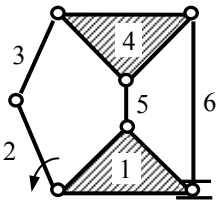
Makinaların mekaniği konusundaki incelemeler, geleneksel olarak, direngen cisim soyutlamasının genel çerçevesi içerisinde gerçekleştirilir.

Bu soyutlamanın geçerlilik sınırları içerisinde –ki büyük kuvvetlere, yüksek hızlara ve narin yapılara doğru gidildikçe bu sınırlara yaklaşılır- makinaların kinematiğini onların kinetiğinden ayrı olarak incelemek uygundur ve bu ders çerçevesinde bu, *Mekanizmaların Kinematiği* başlığı altında zaten yapılmış bulunmaktadır.

<table>
<tr><th colspan="2">MAKİNA</th><th>MEKANİZMA</th><th>KİNEMATİK ZİNCİR</th></tr>
<tr><td>İÇTEN YANMALI MOTOR</td><td> 
</td><td> 

Krank-Biyel Mekanizması</td><td> 
4 Uzuvlu KZ</td></tr>
<tr><td>KUĞU VİNÇ</td><td> </td><td> 

Üç Çubuk Mekanizması</td><td> 
4 Uzuvlu KZ</td></tr>
<tr><td>VARGEL TEZGAHI</td><td>  </td><td> 

Çabuk Dönüş Mekanizması</td><td> 

Stephenson Zinciri</td></tr>
</table>

Şekil 1.1 Bazı Makinalar ve Yapılarındaki Ana Mekanizmalar

Aynı sınırlar içerisinde, makinaların kinetiği konusundaki incelemeler de, geniş ölçüde, birbiriyle bağlantılı olarak hareket eden rijid cisim topluluklarının kinetiğinin incelenmesine dönüşür. Bu ders çerçevesinde yapılacak olan da budur. Bu amaçla, ilkin, kinetiğin temel girdileri olan kinematik, kuvvet ve eylemsizlik konularından, daha önce incelenmiş bulunulan kinematik dışındakiler ele alınacak ve kuvvet ve eylemsizlik kavramları, rijid cisimlere ilişkin yönlerine ağırlık verilerek gözden geçirilecektir. Daha sonra da dinamiğin, makina dinamiği incelemelerine esas oluşturan bazı temel ilkeleri tanıtılacak, makinaların dinamik davranışlarının bunlar yardımıyla nasıl inceleneceği görülüp, bu alanın bazı önemli problemleri ele alınacaktır.

Direngen cisim soyutlamasının geçerliliğini yitirdiği durumlarda makinaların dinamik davranışlarında uzuvların elastiklik özellikleri ön plana çıkar ve makinanın gerçek hareketi, direngen uzuv kabulüne dayanılarak öngörülen nominal hareket civarında bir titreşim hareketi görünümünü alır. Bu durumda incelemenin, titreşim mekaniğinin esasları çerçevesinde yürütülmesi gerekir. Bu dersin son bölümünde, *Mekanik Titreşimler* başlığı altında, bu alanın temel kavramları da gözden geçirilecek, ancak, modern teknolojinin daha büyük kuvvetleri daha yüksek hızlarda, daha narin yapılarla iletme genel hedefi ışığında artan önemine karşın, *Elastik Uzuvlu Makinaların Dinamiği* genel konusuna, bu dersin çerçevesini aştığı için girilmeyecektir.

2 TEMEL KAVRAM VE İLKELER

Bu bölümde mekaniğin, makina mekaniği incelemelerinde önem taşıyan kimi kavram ve ilkeleri gözden geçirilecektir. Bu çerçevede ilkin kuvvetler ve rijid cisimlerin eylemsizlik özellikleri hakkında bazı temel bilgiler anımsatılacak ardından da makina mekaniği incelemelerinde kullanılacak bazı mekanik ilkeleri tanıtılacaktır.

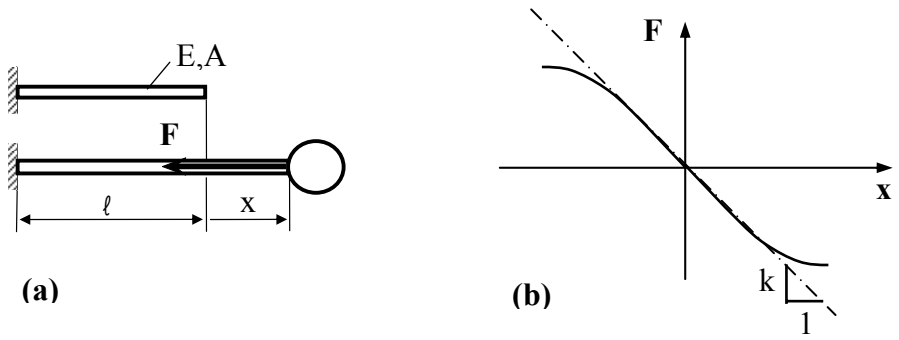
2.1 KUVVETLER

Kuvvet kavramı mekaniğin en önemli girdilerinden biridir. Bu nedenle bütün mekanik incelemeleri ve bu arada makina mekaniği incelemeleri, ön koşul olarak sağlam bir kuvvet bilgisi zemini gerektirir. Biz de burada bu zeminin oluşturucu öğelerini gözden geçireceğiz.

2.1.1 KUVVET YASALARI

Kuvvetleri, onları doğuran nedenlerle ilişkilendiren yasalara kuvvet yasası adı verilir. Bazı kuvvet yasaları birer doğa yasası niteliğindedir ve evrensel geçerlilikleri vardır. Bunlara *temel kuvvet yasaları* adı verilir. Klasik mekanikte yalnızca iki adet temel kuvvet yasası bilinmektedir. Bunlar, Newton'un *Evrensel Kütle Çekim Yasası* ve Lorentz'in *Elektromanyetik Kuvvet Yasası* dır. Temel kuvvet yasalarının yanısıra, geçerlilikleri evrensel olmayıp bazı özel varsayım ve kısıtlara tabi olan, yaklaşık ya da ampirik bir çok kuvvet yasası daha vardır. Bunlara da *özel kuvvet yasaları* adı verilir.

Makina mühendisliğinde önem taşıyan özel kuvvet yasalarından biri *Hooke*[1] *Yasası* dır. Bu yasa, elastik cisimlerde kuvvet-şekil değiştirme ilişkisini konu alır ve gerçek durum bu olmamakla birlikte (Bkz. Şekil 2.1.1-a,b) bu ilişkinin doğrusal olduğunu varsayar. Böylece elastik bir cismin, kendisini x kadar şekil değiştirmeye zorlayan bir cisme uygulayacağı geri getirme kuvveti için



Şekil 2.1.1 Hooke Yasası

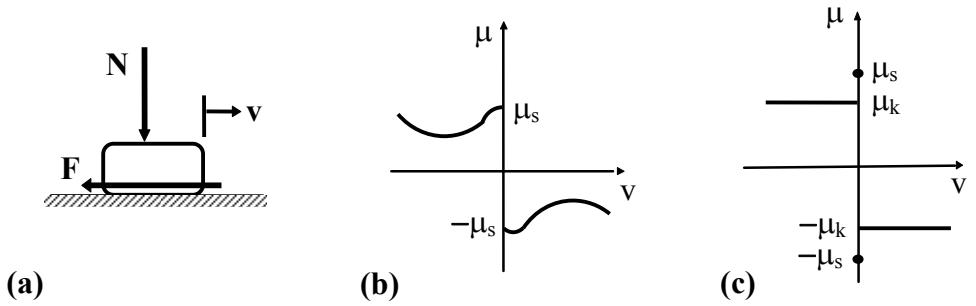
[1] Robert Hooke (1635-1703). İngiliz bilim adamı. Bilim dünyasında yukarıdaki yasasının yanısıra Newton'la girdiği polemiklerle bilinir.

$$\mathbf{F}(x) = -kx\mathbf{i} \qquad (2.1.1)$$

ifadesine gelinir[1]. Buradaki k katsayısı, ki *yay katsayısı* adıyla anılır, sözkonusu elastik cismin yapıldığı malzemeye, onun geometrisine ve şekil değiştirme tarzına bağlı bir sabittir. Örneğin, Şekil 2.1.1-a daki gibi çekmeye zorlanan prizmatik çubuklarda, E malzemenin Young modülünü, A kesit alanını, ℓ ise çubuğun boyunu göstermek üzere $k=EA/\ell$ dir. Şekil 2.1.1-b den hemen anlaşılacağı gibi Hooke Yasası'nın geçerliliği, şekil değiştirmelerin küçük olduğu hallerle sınırlıdır. Hooke yasası, konuma bağlı bir kuvvet tanımlamaktadır.

Bir başka önemli özel kuvvet yasası da *Coulomb*[2] *Yasası* dır. Coulomb Yasası, cisimlerin kuru yüzeyler üzerinden birbiriyle sürtünmesi sırasında bunlara etkiyecek sürtünme kuvvetinin, bu olayı etkileyen parametrelerle ilişkilendirilmesini konu alır (Şekil 2.1.2-a). Ancak öyle çok sayıda parametre bu olay üzerinde etkilidir ki, bütün parametreleri hesaba katan bir formülasyon olanaklı görünmemektedir. Bu yüzden, olayı etkileyen önemli parametrelerden biri olan, iki yüzeyi birbirine bastıran N normal kuvvetinin etkisiyle diğer parametrelerin etkisini birbirinden ayırıp, diğer parametrelerin toplam etkisini, deneysel olarak belirlenecek bir μ parametresinin bünyesinde toplamak düşünülebilir. Böyle yapıldığında sürtünme kuvveti için $F = \mu N$ şeklinde bir formülasyona gelinir ise de buradaki μ nün, diğer bütün parametreler aynı kalsa bile, sürtünen cisimlerin v bağıl hızıyla ciddi biçimde değiştiği gözlenir. Bu değişimin özelliklerini yansıtan tipik bir μ-v diyagramı Şekil 2.1.2-b de verilmiştir. Bu diyagramdan μ nün v ile, küçük hızlar bölgesindeki en büyük mutlak değerini v=0 iken alacak ve her zaman v ile ters işaretli olacak biçimde değiştiği görülmektedir. μ nün v=0 daki değerine *statik sürtünme katsayısı* adı verilir ve μ_s ile gösterilir. Coulomb, $v\neq 0$ bölgesinde μ nün mutlak değerinin v ye bağımlılığını göz ardı edip yalnızca işaret bağımlılığını dikkate alan bir model önermiştir. Bu modelde μ nün mutlak değerinin, gerçek durumun ortalamasını temsil eden ve *kinetik sürtünme katsayısı* adını alan bir μ_k değerinde sabit olduğu varsayılır (Şekil 2.1.2-c). Hız ile işaret bağı da dikkate alındığında Coulomb Yasasının sürtünme kuvvetini, hıza bağlı olarak

$$\begin{aligned} F(v) &= \mu_s N && ;\ v=0 \text{ iken} \\ \mathbf{F}(\mathbf{v}) &= -\mu_k N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} && ;\ \mathbf{v}\neq 0 \text{ iken} \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$



Şekil 2.1.2 Coulomb Yasası

[1] Burada ve izleyen bölümlerde koyu basım harfler vektör ve matrisleri göstermekte kullanılacaktır.
[2] Charles Augustin de Coulomb (1736-1806). Fransız mekanik ve fizikçisi. Yukarıdaki sürtünme yasasının yanı sıra, yine kendi adını taşıyan elektrostatik çekim yasası ile bilinir.

şeklinde ifade edeceği anlaşılır. Bu yasanın hem ampirik hem yaklaşık olduğu ve geçerliliğinin, deneysel olarak belirlenen μ katsayısının belirlendiği deney koşullarıyla sınırlı olacağı ortadadır

Bir başka özel kuvvet yasası da viskoz bir akışkan içerisinde **v** hızıyla ilerleyen R yarıçaplı küresel bir cismin karşılaşacağı akışkan direnç kuvvetinin sistem parametreleriyle ilişkilendirilmesini konu alan *Stokes*[1] *Yasası* dır (Şekil 2.1.3). Bu yasaya göre sözkonusu kuvvet, akışkanın sıkıştırılamaz olduğu, Reynolds (Re) ve Strouhal (St) sayılarının küçük olduğu kabulleri altında, yaklaşık olarak

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -6\mu\pi R\mathbf{v} \qquad (2.1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir (Şuhubi, 1993). Deneyler, Stokes Yasasının $Re = \frac{R\rho v}{\mu} \leq 0.5$ olması halinde kesine çok yakın sonuç verdiğini fakat daha büyük Re değerlerinde geçerliliğini hızla yitirdiğini göstermektedir. Burada μ [kg/ms] akışkanın mutlak viskozitesini, ρ [kg/m^3] ise yoğunluğunu göstermektedir.

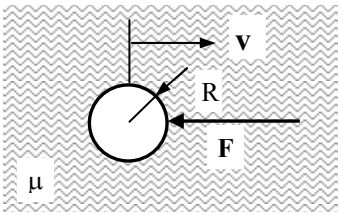
Burada son bir özel kuvvet yasası örneği olarak, viskoz (μ) bir akışkanla yağlanmış olarak sabit ve düz bir zemin üzerinde **v** hızıyla ilerleyen, ℓ boyundaki düzlemsel tabanlı bir cismin karşılaşacağı direnç kuvvetinin sistem parametreleriyle ilişkilendirilmesini konu alan (Şekil 2.1.4) ve akışkanın sıkıştırılamaz olduğu ve $h_1/h_2 > 1$ olduğu kabulleri altında bu kuvvet için

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -2\left(\frac{2\log k}{k-1} - \frac{3}{k+1}\right)\frac{\ell\mu}{h_2}\mathbf{v} \qquad ;\ k = \frac{h_1}{h_2} \qquad (2.1.4)$$

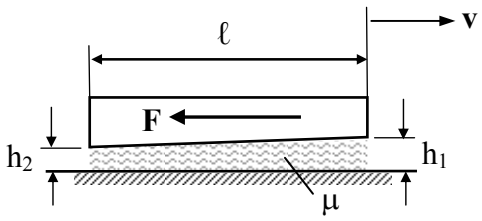
ifadesini veren *Reynolds*[2] *Yasası* nı analım (Şuhubi, 1993).

Stokes ve Reynolds yasaları, bir ortak özellik olarak, viskoz akışkanlarla temas halinde bulunan cisimlerin, belli koşulları sağlayan hareketleri sırasında hızlarıyla orantılı bir direnç kuvvetiyle karşılaşacaklarını ortaya koymaktadır. Buradan genelleştirmeyle, r duruma göre değişik ifadeler alabilecek bir *viskoz sürtünme katsayısı* (ya da *viskoz sönüm katsayısı*) olmak üzere

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -r.\mathbf{v} \qquad (2.1.5)$$



Şekil 2.1.3 Stokes Yasası



Şekil 2.1.4 Reynolds Yasası

[1] George Gabriel Stokes (1819-1903). İrlandalı matematik ve fizikçi.
[2] Osborne Reynolds (1842-1912). İngiliz mühendisi.

şeklinde hıza lineer bağlı genel bir *viskoz sürtünme kuvveti* (ya da *viskoz sönüm kuvveti*) ifadesine ulaşmak mümkündür. Bu, sık kullanılan bir genelleme oluşturur.

Özel kuvvet yasalarına ilişkin örnekler listesi istenildiği kadar uzatılabilir ise de, bizim amacımız bakımından buna gerek bulunmamaktadır. Çünkü makina dinamiği incelemelerinde en çok karşılaşılacak kuvvet yasaları burada anılmış olanlardır.

2.1.2 KUVVETLERİN SINIFLANDIRILMASI

Kuvvetler çeşitli ölçütler bakımından çeşitli sınıflandırmalara tabi tutulurlar. Biz de bu bölümde, bu sınıflandırmalardan bizim incelemelerimiz bakımından önem taşıyan bir kaçını gözden geçireceğiz.

2.1.2.1 Evrensel Kuvvetler – Özel Kuvvetler

Kuvvetler, bir evrensel kuvvet yasasından mı yoksa bir özel kuvvet yasasından mı türediklerine bağlı olarak evrensel kuvvetler ve özel kuvvetler olarak ikiye ayrılırlar. Bu ayrım önemlidir, çünkü evrensel kuvvet yasalarının hiç bir sınırlamaya tabi olmayan geçerliliklerine karşılık özel kuvvet yasalarının geçerlilikleri, dayandıkları kabul ve yaklaşıklıkların belirlediği bir çerçeveyle sınırlıdır. Bu, bir özel kuvvet yasasını kullanacak kişiye, onun geçerlilik sınırlarını iyice tanıma ve onu bu sınırlar dışında kullanmama sorumluluğunu yükler.

2.1.2.2 Korunumlu Kuvvetler – Korunumsuz Kuvvetler

Etkidiği sistemlerde *enerjinin korunumu* ilkesinin geçerliliğini bozmayan kuvvetlere korunumlu kuvvetler, bu ilkenin geçerliliğini bozan kuvvetlere ise korunumsuz kuvvetler denir.

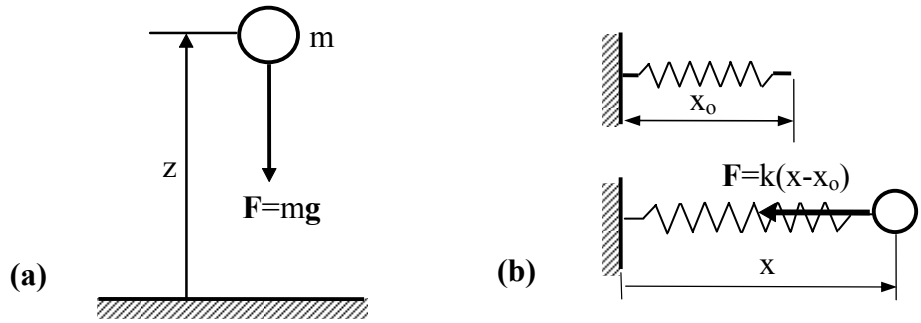
Korunumlu kuvvetler, sadece konumun fonksiyonu olan kuvvetler arasından, kendilerine ilişkin kuvvet yasalarının, örneğin kartezyen koordinatlarda,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) \qquad (2.1.6)$$

şeklinde, skaler bir V(x,y,z) fonksiyonunun gradiyenti olarak ifade edilebildiği ya da başka bir deyişle, kendileri için (2.1.6) eşitliğini sağlayan bir V(x,y,z) fonksiyonunun bulunabildiği kuvvetlerdir. Buradaki V(x,y,z) fonksiyonuna *potansiyel enerji fonksiyonu* adı verilir.

Korunumlu kuvvetlere, en sık karşılaşılan iki örnek olarak, ağırlık kuvveti ile (2.1.1) deki Hooke Yasasına uyan elastik kuvvetler verilebilir. Bunlardan ağırlık kuvvetine ait potansiyel enerji ve kuvvet ifadeleri, C keyfi bir sabiti, z ekseni ise düşey doğrultuyu göstermek üzere, sırasıyla

$$V(x,y,z) = mgz + C \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = -mg\mathbf{k} \qquad (2.1.7)$$



Şekil 2.1.5 Korunumlu Kuvvetler. (a) Ağırlık Kuvveti, (b) Elastik Kuvvet

şeklinde (Şekil 2.1.5-a), Hooke Yasasına uyan elastik kuvvetlere ait ifadeler ise, x şekil değiştirme doğrultusunu, x_o şekil değiştirmeden önceki (gerilmesiz) konumu göstermek üzere (Şekil 2.1.5-b),

$$V(x,y,z) = \tfrac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = -k(x - x_0)\mathbf{i} \tag{2.1.8}$$

şeklindedir.

2.1.2.3 Gerçek Kuvvetler – Kurgusal Kuvvetler

Bilindiği gibi, *Newton*[1]*'un ikinci hareket yasası*, m sabit kütlesine sahip bir maddesel noktanın **a** ivmesi ile üzerine etkiyen **F** kuvveti arasında

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a} \tag{2.1.9}$$

ilişkisini kurmaktadır. Ancak, yine bilindiği gibi, (2.1.9) eşitliğinin bu haliyle geçerli olabilmesi için buradaki **a** nın mutlak ivme olması, yani hareketsiz ya da düzgün doğrusal hareket halindeki bir eksen takımına göre –ki böyle eksen takımlarına *Galile*[2] *eksen takımı* ya da *eylemsizlik eksen takımı* adı verilir- ivme olması zorunludur. Eğer kendisi de bir eylemsizlik eksen takımına göre $\mathbf{a}_B$ ivmeli bir B temel noktasına, $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızına ve $\boldsymbol{\alpha}$ açısal ivmesine sahip olacak biçimde hareket eden bir eksen takımı söz konusu ise ve m maddesel noktası bu eksen takımına göre $\mathbf{v}_b$ bağıl hızı ve $\mathbf{a}_b$ bağıl ivmesiyle hareket ediyorsa (Şekil 2.1.6) m nin mutlak ivmesi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_b + \mathbf{a}_b \tag{2.1.10}$$

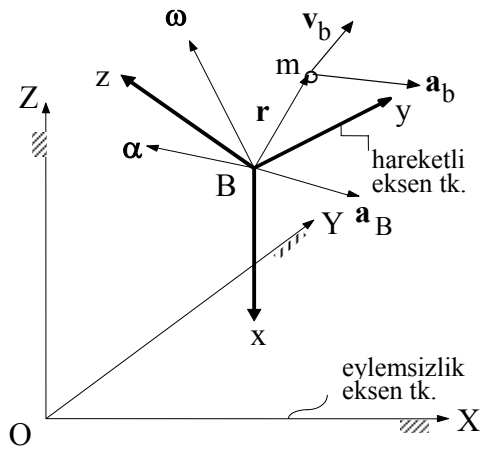
olacağından, (2.1.9) eşitliğinin

$$\mathbf{F} = m\left[\mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_b + \mathbf{a}_b\right] \tag{2.1.11}$$

---

[1] Sir Isaac Newton (1642-1727). Büyük ingiliz matematikçi, fizikçi, gökbilimci ve düşünürü. Kısaca *Principia* (İlkeler) adıyla anılan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri, 1687) adlı yapıtının insan zihninin ulaştığı doruklardan birini oluşturduğu kabul edilir.

[2] Galileo Galilei (1564-1642). İtalyan matematik, fizik ve gökbilimcisi. Modern deneysel bilimin kurucusu. Kısaca *İki Yeni Bilim* adıyla anılan *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze Attenenti Alla Meccanica* (Mekaniğe İlişkin İki Yeni Bilim Hakkında Konuşmalar ve Matematiksel Kanıtlar, 1638) adlı yapıtının Dinamik biliminin kuruluşunu ilan ettiği kabul edilir. Bir makina elemanı olarak yayı da ilk o tasarlamıştır.



Şekil 2.1.6 Bağıl Hareket Yapan Maddesel Nokta

şeklini alması gerekir. Durum böyle olduğu halde, ifadenin, hareketli eksen takımından gözlenen $\mathbf{a}_b$ bağıl ivmesi için (2.1.9) görünümünü korumasında israr edilirse

$$\mathbf{F}_e = -m\left[\mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_b\right] \tag{2.1.12}$$

olmak üzere

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e = m\mathbf{a}_b \tag{2.1.13}$$

yazılması, yani maddesel noktaya **F** *gerçek kuvvet* inin yanısıra, olayın bir eylemsizlik eksen takımında ifade edilmiyor olmasından kaynaklanacak hatayı düzeltmek üzere (2.1.12) deki gibi tanımlanan bir $\mathbf{F}_e$ *kurgusal kuvvet* inin de etkidiğinin düşünülmesi gerekir. Bu kurgusal $\mathbf{F}_e$ kuvvetine *eylemsizlik kuvveti* adı verilir. Eylemsizlik kuvvetinin yapısındaki

$$\mathbf{F}_m = -m\left[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\right] \tag{2.1.14}$$

terimi *merkezkaç kuvvet*,

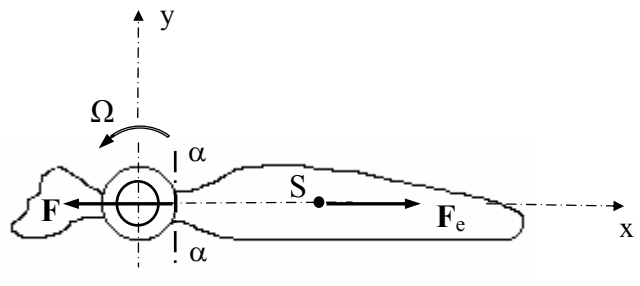
$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_b \tag{2.1.15}$$

terimi ise *Coriolis*[1] *kuvveti* olarak bilinir.

Özel olarak, hareketli eksen takımına göre durağan halde olan bir cismin söz konusu olması ($\mathbf{v}_b$=0, $\mathbf{a}_b$=0) halinde (2.1.13) bağıntısı

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \tag{2.1.16}$$

[1] Gustave Gaspard Coriolis (1792-1843). Fransız mühendisi. Hareketli bir eksen takımına göre hareket eden bir maddesel noktanın ivmesinin, bağıl ivme ($\mathbf{a}_b$), sürüklenme ivmesi ($\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$) ve "Coriolis" ivmesi ($\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_b$) şeklinde üç bileşenden oluştuğunu belirten ve kendi adını taşıyan teorem ile tanınır. O zamanlar *vis viva* adıyla bilinen kinetik enerjinin başına ½ çarpanının eklenmesi de onun fikridir.



Şekil 2.1.7 Eylemsizlik Kuvvetlerinin Etkisi

görünümünü alır. Bu bağıntı, hareketli eksen takımındaki statik denge koşulu olarak yorumlanabilir. Böylece, her cismin, kendisiyle birlikte hareket ettiği varsayılan hayali bir eksen takımı içerisinde, gerçek kuvvetlerle kurgusal eylemsizlik kuvvetlerinin ortak etkisi altında statik denge halinde olacağı kavrayışına gelinir. Bu kavrayışa eşlik eden eylemsizlik kuvveti ifadesi, **a** mutlak ivmeyi göstermek üzere

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{F} = -m\mathbf{a} \tag{2.1.17}$$

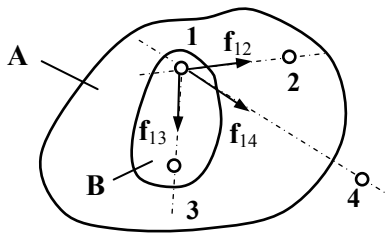
şeklindedir. Kendisine göre bağıl hareketin incelendiği bir eksen takımına özel vurgu yapılmadığı sürece eylemsizlik kuvveti denildiğinde (2.1.17) deki kuvvet anlaşılır.

Şekil 2.1.7 de görülen ve kendine bağlı xy eksen takımı içerisinde, bağlı olduğu göbeğin $\alpha-\alpha$ kesidine uyguladığı **F** kuvvetiyle, kütle merkezine etkiyen $\mathbf{F}_e$ eylemsizlik (merkezkaç) kuvvetinin etkisi altında dengedeymiş gibi görünen pala örneğinde olduğu gibi, eylemsizlik kuvvetleri gerçek kuvvetlermiş gibi duyumsanır ve onlar gibi etkili olurlar.

2.1.2.4 İç Kuvvetler– Dış Kuvvetler

Göz önüne alınan bir mekanik sistemin sınırları içinde kalan öğelerin birbirlerine uyguladıkları etkileşim kuvvetleri bu sistem için *iç kuvvet*, bu sınırlar dışındaki öğelerin içindekilere uyguladıkları kuvvetler ise bu sistem için *dış kuvvet* olarak adlandırılır.

Kolayca anlaşılabileceği gibi, bir tek maddesel noktadan oluşan bir mekanik sisteme etkiyen bütün kuvvetler dış kuvvettir. İç kuvvet kavramı en az iki maddesel noktadan oluşan mekanik sistemler için söz konusu olur. Yine kolayca anlaşılacağı gibi iç kuvvet-dış kuvvet ayrımı kuvvetlerin doğalarıyla değil, seçilen sistem sınırlarıyla ilgilidir. Örneğin Şekil 2.1.8 deki 2 parçacığının 1 parçacığına uyguladığı $\mathbf{f}_{12}$ kuvveti A sistemi için iç, B sistemi için dış kuvvet iken $\mathbf{f}_{13}$ kuvveti hem A hem B için iç, $\mathbf{f}_{14}$ kuvveti ise her iki sistem için de dış kuvvettir. İç kuvvet – dış kuvvet ayrımı Newton mekaniğinde büyük öneme sahiptir.

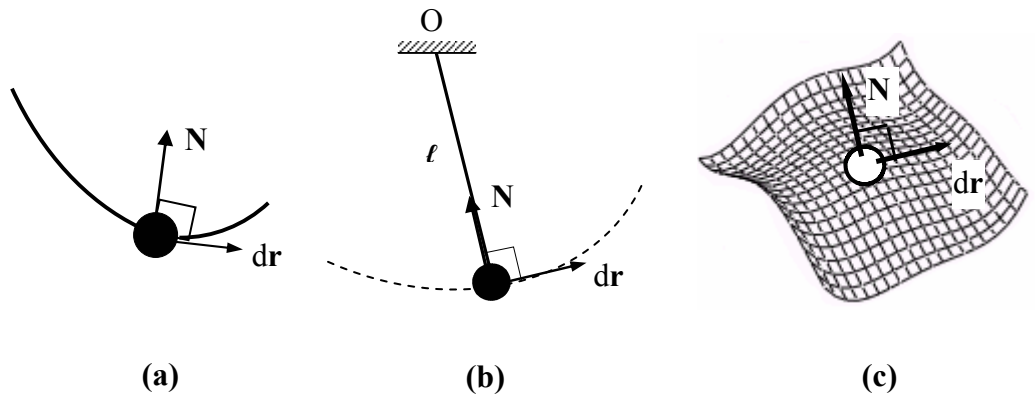


Şekil 2.1.8 İç Kuvvet - Dış Kuvvet

2.1.2.5 Verilmiş Kuvvetler – Kısıt Kuvvetleri

Kimi sistemler, hareketlerini kısıtlayan engellerin bulunduğu ortamlarda hareket etmek zorundadır. Örneğin, Şekil 2.1.9-a daki boncuğun, üzerine geçirildiği tele dik doğrultudaki hareketleri, Şekil 2.1.9-b deki düzlemsel sarkaçta m maddesel noktasının O merkezli, ℓ yarıçaplı çembere dik doğrultudaki hareketleri, Şekil 2.1.9-c deki bilyanın, üzerinde yuvarlandığı yüzeye dik doğrultudaki hareketleri kısıtlanmış, bunlara teğet hareketler ise serbest bırakılmıştır. Bu kısıtlamaları fiilen sağlayan ise, hep, ortamdaki engelin hareket eden cisme, olası bütün hareketlere dik doğrultuda uyguladığı bir **N** temas kuvvetidir. Bu tip kuvvetlere *kısıt kuvveti* adı verilir. Bir dinamik probleminde kısıtların kendileri veri olmakla birlikte kısıt kuvvetleri değildir. Bunlar ancak dinamik probleminin çözülmesiyle, problemin bir çıktısı olarak hesaplanabilir. Kısıt kuvvetlerinin dışında kalan ve dinamik probleminin girdisi olan kuvvetlere *verilmiş kuvvetler* denir.

Verilmiş kuvvet–kısıt kuvveti ayrımı analitik mekanikte büyük öneme sahiptir.



Şekil 2.1.9 Kısıtlı Hareketler ve Kısıt Kuvvetleri

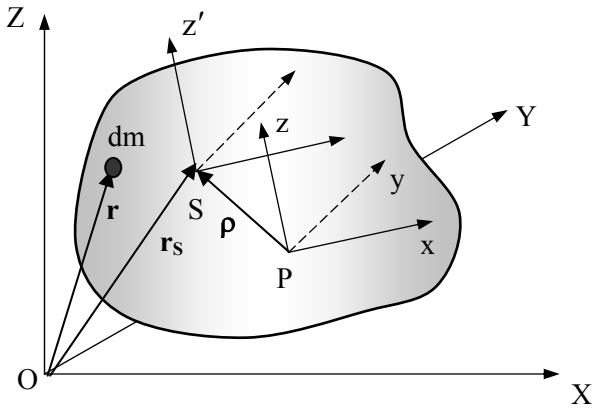
2.2 RİJİD CİSİMLERDE KÜTLE VE KÜTLE DAĞILIMI

2.2.1 RİJİD CİSMİN KÜTLESİ

Bir rijid cisim, V hacmi boyunca (bu hacmi oluşturan dV hacim elemanının kütlesi dm olacak biçimde) dağılmış dm kütle elemanlarının oluşturduğu bir bütündür. Her hacim elemanında, elemanter kütlenin elemanter hacme oranına yoğunluk adı verilir:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{2.2.1}$$

Yoğunluk cisim içerisinde noktadan noktaya değişebilir $\left(\rho = \rho(x, y, z)\right)$. Bu durumda cismin *heterojen* bir cisim olduğu söylenir. Özel olarak yoğunluğun cisim boyunca sabit olması halinde ise *homojen* bir cisimden söz edilir. (2.2.1) den, integraller rijid cismin uzamı boyunca alınmak üzere



Şekil 2.2.1 Rijid Cisimde Kütle Dağılımı

$$m = \int dm = \int \rho dV \tag{2.2.2}$$

şeklinde hesaplanan m skaleri *rijid cismin kütlesi* adını alır. Homojen bir cisim söz konusu olduğunda ρ sabit olacağından, (2.2.2) integre edilerek bulunan

$$m = \rho V \tag{2.2.3}$$

eşitliği geçerli olur.

Maddesel noktalardan farklı olarak, rijid cisimlerin eylemsizlik özelliklerinin tanımlanabilmesi için m kütlelerinin verilmesi yeterli değildir. Bunun yanısıra, kütlenin cisim içerisindeki dağılımına ilişkin bazı bilgilerin de verilmesi gerekir. Bu bilgilerin dinamik bakımdan eksiksiz bir biçimde tanımlanabilmesi için ise iki yeni kavrama; kütle merkezi ve eylemsizlik tansörü kavramlarına gereksinim vardır.

2.2.2 RİJİD CİSMİN KÜTLE MERKEZİ

Rijid cismin, yer vektörü (integraller cismin uzamı boyunca alınmak üzere)

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{m}\int \mathbf{r} dm \tag{2.2.4}$$

şeklinde tanımlanan S noktasına *rijid cismin kütle merkezi* adı verilir (Şekil 2.2.1). Bu vektörel denklem yerine, istenirse, kütle merkezinin koordinatlarını veren

$$x_S = \frac{1}{m}\int x dm, \quad y_S = \frac{1}{m}\int y dm, \quad z_S = \frac{1}{m}\int z dm \tag{2.2.5}$$

skaler bağıntıları da yazılabilir.

2.2.3 RİJİD CİSMİN EYLEMSİZLİK TANSÖRÜ

Tansörler, n boyutlu uzayda n^m adet sayı yardımıyla tanımlanan (n^m adet bileşene sahip olan) ve bileşenleri koordinat dönüşümlerinde kendine özgü dönüşüm yasalarına tabi

olan matematiksel çokluklardır. Burada n tansörün boyutunu, m ise tansörün mertebesini gösterir. Özel olarak skalerler sıfırıncı, vektörler ise birinci mertebeden tansörlerdir. Buna göre skalerlerin, uzayın boyutundan bağımsız olarak $n^0=1$ adet bileşene, vektörlerin ise n boyutlu uzayda $n^1=n$ adet bileşene sahip olması gerekir ki bunun böyle olduğu zaten bilinmektedir.

Rijid cisimlerin kütle dağılımının kinetik bakımdan önem taşıyan özelliklerine ilişkin bilgiler, *eylemsizlik tansörü* adı verilen, -rijid cisim üç boyutlu uzayda tanımlı olduğu için- üç boyutlu (n=3), ikinci mertebeden (m=2) bir $\tilde{\mathbf{I}}$ tansörü yardımıyla tasvir edilir. Eylemsizlik tansörünün sahip olacağı anlaşılan $3^2=9$ adet bileşen, *eylemsizlik tansörünün bileşenler matrisi* adı verilen 3x3 lük bir matris şeklinde gösterilir. Bu matrisin genel görünüşü

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

şeklindedir. Bir tansör asla bileşenler matrisinden ibaret olmamakla birlikte, bizim amacımız bakımından burada bileşenler matrisiyle ilgili bazı bilgileri anımsatmak yeterli olacaktır. Bileşenler matrisinin ana köşegeni üzerindeki üç bileşen *eylemsizlik momenti* adını alır ve integraller cismin uzamı boyunca alınmak üzere

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm, \quad Iyy = \int (x^2 + z^2)dm, \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm \tag{2.2.7}$$

şeklinde tanımlanırlar (Şekil 2.2.1). Köşegen dışı bileşenler ise *eylemsizlik çarpımı* diye adlandırılırlar ve tanımları

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xydm, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int xzdm, \quad I_{yz} = I_{zx} = \int xzdm \tag{2.2.8}$$

şeklindedir. İstenirse bu tanımlar, topluca, $\alpha,\beta,\gamma=x,y,z;\ \alpha \neq \beta \neq \gamma$ gösterilimiyle

$$\begin{aligned} I_{\alpha\alpha} &= \int (\beta^2 + \gamma^2)dm, \\ I_{\alpha\beta} &= I_{\beta\alpha} = \int \alpha\beta dm \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu tanımlardan hemen anlaşılacağı gibi eylemsizlik tansörü bileşenler matrisi bakışımlı (simetrik) bir matristir.

Burada, yeri gelmişken, *eylemsizlik yarıçapı* kavramından da söz etmeden geçmeyelim.

$$i_{\alpha\alpha} = \sqrt{\frac{I_{\alpha\alpha}}{m}} \rightarrow I_{\alpha\alpha} = mi_{\alpha\alpha}^2 \tag{2.2.10}$$

şeklinde tanımlanan büyüklüğe rijid cismin α eksenine göre eylemsizlik yarıçapı adı verilir. Kütlesi bilinen bir rijid cismin $I_{\alpha\alpha}$ eylemsizlik momentinin verilmesi gerektiğinde çoğu kez bunun yerine $i_{\alpha\alpha}$ eylemsizlik yarıçapının verilmesi yoluna gidilir.

Eylemsizlik tansörünün bileşenleri, kullanılan eksen takımına göre değişir. Bu nedenle zaman zaman, bir eksen takımındaki bileşenleri bilinen eylemsizlik tansörünün bir başka eksen takımındaki bileşenlerinin hesaplanması problemiyle karşı karşıya kalınır. Bu *koordinat dönüşümü* problemlerinde, genellikle, birbirine göre ötelenmiş eksen takımları arasındaki dönüşümlerle birbirine göre dönmüş eksen takımları arasındaki dönüşümler ayrı ayrı ele alınır. Biz burada birbirine göre ötelenmiş eksen takımları arasındaki dönüşümlere ilişkin bir sonucu anımsatmakla yetinelim.

Bir rijid cismin S kütle merkezini başlangıç alan bir Sx´y´z´ dikgen eksen takımındaki $I^S_{\alpha\alpha}$ eylemsizlik momentleri ve $I^S_{\alpha\beta}$ eylemsizlik çarpımları bilinirken, keyfi bir P noktasını başlangıç alan ancak eksenleri Sx´y´z´ nünkilere paralel olan bir Pxyz eksen takımındaki $I^P_{\alpha\alpha}$ eylemsizlik momentleri ve $I^P_{\alpha\beta}$ eylemsizlik çarpımları, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{PS} = \rho_x\mathbf{i} + \rho_y\mathbf{j} + \rho_z\mathbf{k}$ olmak üzere (Şekil 2.2.1)

$$I^P_{\alpha\alpha} = I^S_{\alpha\alpha} + m(\rho^2_\beta + \rho^2_\gamma) = I^S_{\alpha\alpha} + m\delta^2_\alpha \tag{2.2.11}$$

ve

$$I^P_{\alpha\beta} = I^S_{\alpha\beta} + m\rho_\alpha\rho_\beta \tag{2.2.12}$$

şeklinde hesaplanır. Bu bağıntılar *Huygens*[1]*-Steiner Formülleri* adıyla bilinir. Kolayca anlaşılacağı gibi (2.1.11) bağıntısındaki $\delta_\alpha = \sqrt{\rho^2_\beta + \rho^2_\gamma}$ iki eksen takımının α eksenleri arasındaki dik uzaklığı göstermektedir.

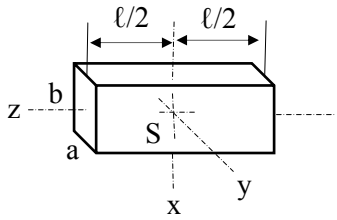
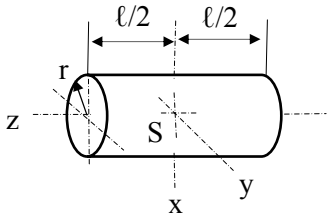
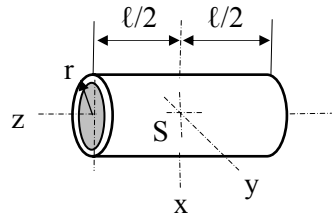
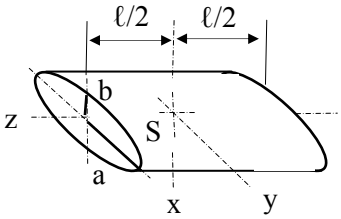
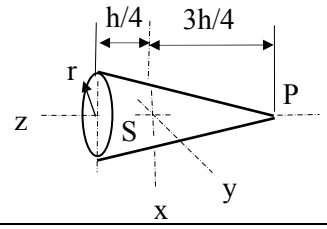
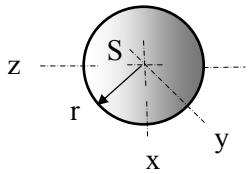
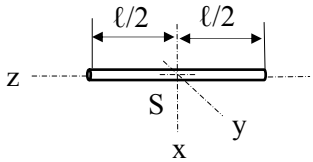
Eylemsizlik tansörü bileşenler matrisinin her eksen takımında farklı bir görünüm alması gerçeği, bu matrisin özellikle yalın bir görünüm alacağı özel eksen takımlarının bulunup bulunmayacağı sorusunu gündeme getirir. Bu matrisin alabileceği en yalın görünüm bir köşegen matris görünümüdür. Her rijid cisim ve her keyfi başlangıç noktası seçimi için bileşenler matrisinin köşegen görünüm almasına yol açan en az bir eksen takımı vardır. Bu eksen takımlarına *asal eylemsizlik eksen takımları*, bunların eksenlerine *asal eylemsizlik eksenleri* (Eğer bir $\alpha-\alpha$ ekseni $I_{\alpha\beta}=I_{\alpha\gamma}=0$ olmasına yol açıyorsa bu bir asal eksendir.), bu eksenlerin doğrultularına ise *asal doğrultular* adı verilir. Bir asal eksen takımında ifade edildiğinde eylemsizlik tansörü bileşenler matrisinin tüm köşegen dışı elemanları (eylemsizlik çarpımları) sıfır olur, geriye kalan üç köşegen eleman ise *asal eylemsizlik momentleri* adını alır. Bu durumda matris

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & Iz \end{bmatrix} \tag{2.2.13}$$

görünümündedir. Bu görünümün sağlayacağı hesap kolaylıklarından yararlanmak üzere, genellikle, asal eylemsizlik eksen takımlarında çalışmak yeğlenir.

[1] Christiaan Huygens (1629-1695). Hollandalı matematik, fizik ve gökbilimcisi. Matematikte olasılık hesabı ve logaritma kuramının kuruluşuna katkılarıyla; mekanikte eylemsizlik momenti, merkezkaç kuvvet kavramlarını yaratması, cisim sarkaçlar kuramı ve çarpışma kuramını kurmasıyla; optikte ışığın dalga kuramını ortaya atmasıyla bilinir.

Tablo 2.1 Geometrik Şekilli Bazı Homojen Cisimlerin Eylemsizlik Momentleri

Cisim	Şekil	Eylemsizlik Momentleri
Dikdörtgenler Prizması		$I_x^S = \frac{1}{12}m(a^2 + \ell^2)$ $I_y^S = \frac{1}{12}m(b^2 + \ell^2)$ $I_z^S = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Dairesel Silindir		$I_x^S = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_z^S = \frac{1}{2}mr^2$
Dairesel Boru		$I_x^S = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_z^S = mr^2$
Eliptik Silindir		$I_x^S = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_y^S = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_z^S = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$
Dairesel Dik Koni		$I_x^S = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$ $I_z^S = \frac{3}{10}mr^2$
Küre		$I_x^S = \frac{2}{5}mr^2$
İnce Çubuk		$I_x^S \cong \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_z^S \cong 0$

Verilmiş bir rijid cismin asal eksenlerinin ve asal eylemsizlik momentlerinin belirlenmesi problemi genelde uğraştırıcı bir problem olmakla birlikte, kimi bakışım özelliklerine sahip homojen cisimler söz konusu olduğunda asal eksenleri bir bakışta belirlemek de mümkündür. Bunun için (2.2.8) tanımlarından çıkan, ancak çıkartılışını burada vermeyeceğimiz şu kuralların akılda tutulması yeterlidir: *Eğer bir Pxyz eksen takımının Pxy, Pxz ve Pyz düzlemlerinden bir tanesi cismin bir bakışım düzlemi ise bu düzleme dik eksen bir asal eylemsizlik eksenidir; yok eğer bu düzlemlerden en az iki tanesi cismin birer bakışım düzlemi ise Pxyz eksen takımı bütünüyle bir asal eksen takımıdır*.

Tablo 2.1 de, geometrik şekilli bazı homojen cisimlerin, S kütle merkezini başlangıç alan bir asal eksen takımındaki asal eylemsizlik momentleri verilmiştir.

2.2.4 RİJİD CİSMİN BİR EŞDEĞER MADDESEL NOKTALAR SİSTEMİNE İNDİRGENMESİ

Bir rijid cismin eylemsizlik özelliklerini tanımlamak için kütlesini, kütle merkezini ve eylemsizlik tansörünü vermek yeterlidir. Bu, kütlesi, kütle merkezi ve eylemsizlik tansörü birbirinin aynı olan iki rijid cismin dinamik bakımdan birbiriyle özdeş olacağını söylemekle eş anlamlıdır. Makina dinamiği incelemelerinde bazen bundan yararlanarak bir rijid cismin yerine, birbirine hayali, kütlesiz fakat rijid bağlarla bağlı (rijid bir bütün oluşturan) bir dizi maddesel noktanın oluşturduğu bir sistemin geçirilmesi yoluna gidilir. Buna, rijid cismin bir eşdeğer maddesel noktalar sistemine indirgenmesi denir. Bu uygulama, özellikle, söz konusu maddesel noktaların istenilen, uygun yerlere yerleştirilebilmesi halinde yarar sağlar.

2.2.4.1 En Genel Hal

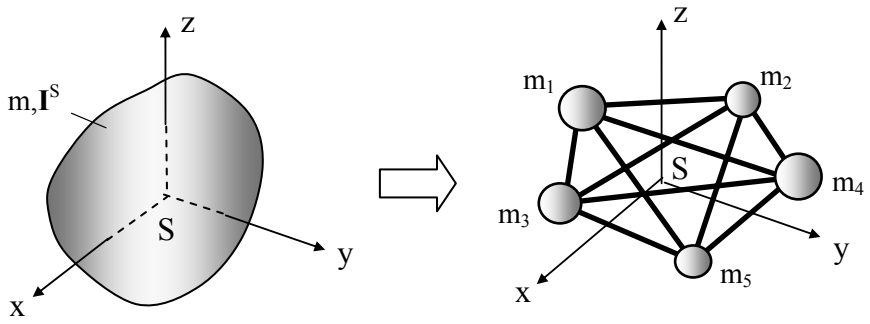
Şimdi böyle bir indirgemenin, en genel halde nasıl yapılacağını görmek üzere Şekil 2.2.2 deki rijid cismin n adet maddesel noktadan oluşan sisteme indirgenmesi problemini ele alınsın ve, genelliği bozmayan bir seçimle, cismin bilinen S kütle merkezini başlangıç alan bir asal Sxyz eksen takımında çalışılsın. Cismin kütlesi m, Sxyz deki asal eylemsizlik momentleri ise I^S_x, I^S_y ve I^S_z olsun. S başlangıç alındığına göre $x_S=y_S=z_S=0$, bir asal eksen takımında çalışıldığına göre de $I^S_{xy}=I^S_{xz}=I^S_{yz}=0$ olacağına ve maddesel noktalar sisteminde kütle, kütle merkezi ve eylemsizlik moment ve çarpımı hesaplarının (2.2.2), (2.2.5), (2.2.7) ve (2.2.8) bağıntılarında integraller yerine toplamlar koyarak gerçekleştirilebileceğine dikkat ederek, eşdeğerlik koşulları olarak

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m \tag{2.2.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = 0 \tag{2.2.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) = I_x^S\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2) = I_y^S\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_z^S \tag{2.2.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = I_{xy}^S = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = I_{xz}^S = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = I_{yz}^S = 0 \tag{2.2.17}$$

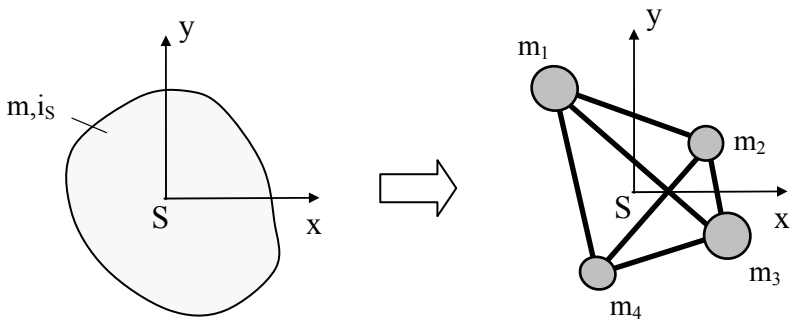


Şekil 2.2.2 Maddesel Noktalar Sistemine İndirgeme (Genel)

yazılabilir. (2.2.14-17) denklemleri, problemin m_i, x_i, y_i, z_i ; i=1,2,…,n şeklindeki 4n adet bilinmeyeni için 10 denklemlik bir takım oluşturmaktadır. Buradan, bir çözüm bulunabilmesi için $4n \geq 10 \rightarrow n \geq 3$ olması gerektiği anlaşılır. Burada ayrıntısına girmeyeceğimiz daha derin bir inceleme, bulunan çözümün fiziksel anlam taşıyabilmesi için $n \geq 4$ olması gerektiğini ortaya koyar. Bunun anlamı, en genel halde, bir rijid cismin en az 4 maddesel nokta içeren bir maddesel noktalar sistemine indirgenebileceğidir. Böyle bir indirgemede bilinmeyenlerden s=4n-10 tanesine keyfi değerler verilebilir, geri kalan 10 tanesi ise yukarıdaki denklem takımından sayısal bir yöntemle hesaplanır.

2.2.4.2 Düzlemsel Hareket Yapan Düzlemsel Cisimler Hali

Yukarıda en genel haliyle tanıtılan maddesel noktalar sistemine indirgeme problemi, *düzlemsel hareket yapan düzlemsel cisimler* özel halinde çok daha yalın bir görünüm alır. Hareketli makina uzuvları çoğunlukla bu çerçeveye girdiğinden burada bu özel halin ayrıca ele alınması yerinde olacaktır. Ancak ilkin düzlemsel hareket yapan düzlemsel cisim kavramına açıklık getirelim: Eğer bir rijid cisim, bütün noktalarının yörüngeleri birbirine paralel düzlemler içinde kalacak biçimde hareket ediyorsa bu cismin *düzlemsel hareket* yaptığı söylenir. Eğer düzlemsel hareket yapan bir rijid cismin hareket düzlemi, kütle merkezinden geçen bir asal eylemsizlik eksenine dikse, cismin bir *düzlemsel cisim* olduğu söylenir. Düzlemsel hareket yapan düzlemsel bir rijid cismin bütününün dikkate alınması gerekmez. Kütle merkezini içine alan, hareket düzlemine paralel kesiti – ki buna *ana levha* adı verilir- cismi temsil için yeterlidir.



Şekil 2.2.3 Maddesel Noktalar Sistemine İndirgeme
(Düzlemsel Hareket Yapan Düzlemsel Cisim)

Düzlemsel hareket yapan bir düzlemsel cisim, hepsi ana levha düzlemi içerisinde yer alan bir dizi maddesel noktadan oluşan bir maddesel noktalar sistemine indirgenebilir (Şekil 2.2.3). Sxy düzlemi ana levha düzlemi olarak alınırsa, bu durumda $z_i=0$; i=1,2,…,n olacağından (2.2.15) bağıntılarının üçüncüsü ve (2.2.17) bağıntılarının ikinci ve üçüncüsü kendiliğinden sağlanır ve problemden düşer. Ayrıca (Bölüm 2.3.2.2 de görüleceği gibi) Sxy düzlemi içerisindeki bir düzlemsel harekette I^S_x, I^S_y ve I^S_{xy} nin içerdiği bilgiler belirleyici olmaktan çıkar. Bu yüzden bunlara ilişkin (2.2.16) bağıntılarının bir ve ikincisi ile (2.2.17) bağıntılarının ilki de problemden düşer. Böylece bu durumda (2.2.14-17) bağıntılarından geriye

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m \tag{2.2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0 \tag{2.2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_z^S = m i_S^2 \tag{2.2.20}$$

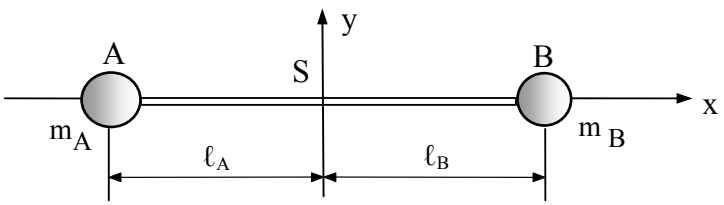
kalır. (2.2.18-20) denklemlerinin temsil ettiği indirgeme problemi, m_i, x_i, y_i ; i=1,2,…,n şeklindeki 3n adet bilinmeyene karşılık 4 denklem içermektedir. Buna göre, bir çözüm bulunabilmesi için $3n \geq 4 \rightarrow n \geq 2$ olmalıdır. Bunun anlamı, düzlemsel hareket yapan düzlemsel cisimlerin, hepsi ana levha içerisinde yer almak kaydıyla, en az iki maddesel noktadan oluşan bir maddesel noktalar sistemine indirgenebileceğidir. Böyle bir indirgemede bilinmeyenlerden s=3n-4 tanesine keyfi değerler verilebilir, geri kalan 4 tanesi ise yukarıdaki denklem takımından hesaplanır. Aşağıda buna iki örnek verilecektir.

İki Maddesel Noktaya İndirgeme: İndirgeme noktaları A ve B olsun (Şekil 2.2.4). Bu durumda problemin bilinmeyenleri m_A, x_A, y_A, m_B, x_B ve y_B olacaktır. n=2 olduğundan bu bilinmeyenlerden s=3x2-4=2 tanesine keyfi değerler verilebilir. Bu keyfilik maddesel noktalardan birinin (A nın) konumunu seçmek için kullanılarak $x_A=-\ell_A$, $y_A=0$ alınabilir. Bu yapılırsa (2.2.18-20) denklemleri

$$m_A + m_B = m \tag{2.2.21}$$

$$-m_A \ell_A + m_B x_B = 0\,, \quad m_B y_B = 0 \tag{2.2.22}$$

$$m_A \ell_A^2 + m_B (x_B^2 + y_B^2) = m i_S^2 \tag{2.2.23}$$



Şekil 2.2.4 İki Maddesel Noktaya İndirgeme

şeklini alır. Bu denklemlerin m_A, m_B, x_B ve y_B için çözülmesiyle

$$y_B = 0 \tag{2.2.24}$$

$$x_B = \ell_B = \frac{i_S^2}{\ell_A} \tag{2.2.25}$$

$$m_A = \frac{\ell_B}{\ell_A + \ell_B} m = \frac{\ell_B}{\ell} m \tag{2.2.26}$$

$$m_B = \frac{\ell_A}{\ell_A + \ell_B} m = \frac{\ell_A}{\ell} m \tag{2.2.27}$$

hesaplanır. Buna göre, düzlemsel hareket yapan düzlemsel bir rijid cismin, ana levha içerisine, cismin kütle merkezinden geçen bir doğru üzerine her biri kütle merkezinin bir yanında kalacak biçimde yerleştirilecek iki maddesel noktadan oluşan bir maddesel noktalar sistemine indirgenebileceği anlaşılmaktadır. Bu indirgemede noktalardan birinin konumu keyfi seçilirse diğerinin konumu ve indirgeme kütleleri (2.2.25-27) deki gibi hesaplanır.

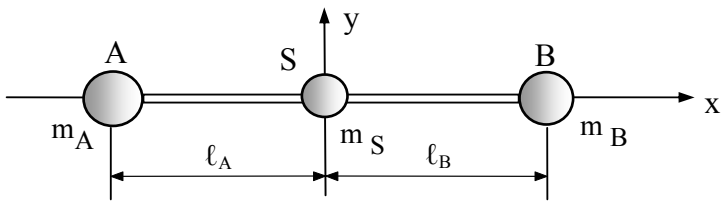
Üç Maddesel Noktaya İndirgeme: İndirgeme noktaları A, B ve cismin kütle merkezi S olsun (Şekil 2.2.5). Problemin m_A, x_A, y_A, m_B, x_B , y_B , m_S, x_S, y_S şeklindeki bilinmeyenlerinden s=3x3-4=5 tanesi keyfi olarak seçilebilir. İndirgeme noktalarından birinin S olarak seçilmesiyle zaten x_S=0 ve y_S=0 şeklinde iki keyfi seçim yapılmış durumdadır. Buna ek olarak x_A=-ℓ_A, y_A=0, x_B=ℓ_B seçimlerini yapalım. Böylece B nin ordinatı dışında her üç noktanın konumunun da seçilmiş olduğuna dikkat çektikten sonra bu değerlerle (2.2.18-20) denklemlerine dönülürse,

$$m_A + m_B + m_S = m \tag{2.2.28}$$

$$-m_A \ell_A + m_B \ell_B = 0 \ , \quad m_B y_B = 0 \tag{2.2.29}$$

$$m_A \ell_A^2 + m_B(\ell_B^2 + y_B^2) = m i_S^2 \tag{2.2.30}$$

elde edilir. Bu denklemlerin geriye kalan y_B, m_A, m_B , m_S bilinmeyenleri için çözülmesiyle de



Şekil 2.2.5 Üç Maddesel Noktaya İndirgeme (Özel Hal)

$$y_B = 0 \tag{2.2.31}$$

$$m_A = \frac{i_S^2}{\ell_A(\ell_A+\ell_B)}m = \frac{i_S^2}{\ell_A \cdot \ell}m \tag{2.2.32}$$

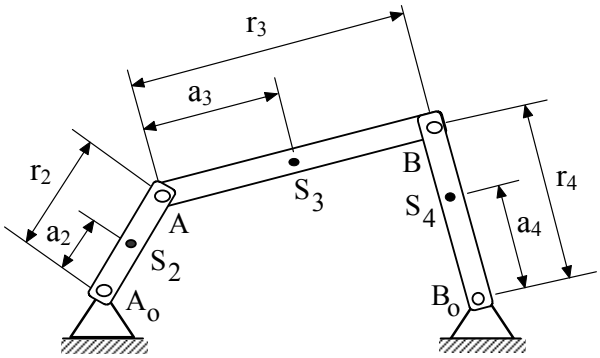
$$m_B = \frac{i_S^2}{\ell_B(\ell_A+\ell_B)}m = \frac{i_S^2}{\ell_B \cdot \ell}m \tag{2.2.33}$$

$$m_S = \left(1 - \frac{i_S^2}{\ell_A \ell_B}\right)m \tag{2.2.34}$$

bulunur. Buradan, düzlemsel hareket yapan bir düzlemsel rijid cismin, ana levha içerisine, biri kütle merkezine, diğer ikisi ise buradan geçen bir doğru üzerine, kütle merkezinin iki yanında istenilen konumlara yerleştirilecek üç maddesel noktadan oluşan bir sisteme indirgenebileceği anlaşılmaktadır. Bu, makina dinamiği hesaplarında sık sık başvurulan çok elverişli bir indirgeme oluşturur.

Burada ele alınanın çok özel bir üç maddesel noktaya indirgeme problemi olduğunu, noktalardan birinin cismin S kütle merkezi olarak seçilmemesi halinde problemin daha genel bir hal alacağını not edelim fakat bu genel halin, biraz daha karışık olan incelemesini bir araştırma konusu olarak bırakalım.

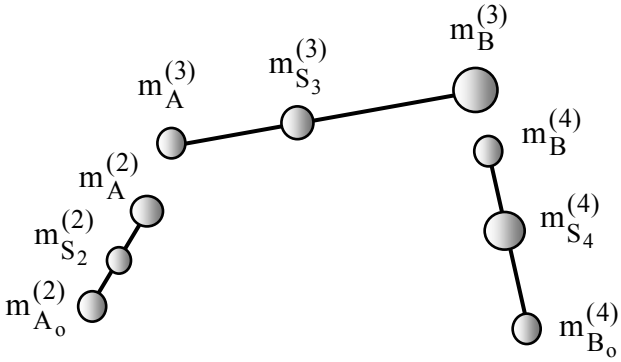
Örnek Problem 2.2.1



Şekil Pr. 2.2.1-1

Şekil Pr.2.2.1-1 deki üç çubuk mekanizmasında r_2=50 mm, r_3=200 mm, r_4=150 mm, a_2=25 mm, a_3=100 mm, a_4=50 mm, m_2=0.1 kg, m_3=0.5 kg, m_4=0.3 kg, i_{S2}=20 mm, i_{S3}=80 mm, i_{S4}=50 mm verildiğine göre, mekanizmayı dinamik eşdeğer olarak S_2, A, S_3, B, S_4 noktalarına yerleştirilecek maddesel noktalara indirgeyiniz.

Çözüm:



Şekil Pr. 2.2.1-2

İlkin uzuvlar teker teker ele alınarak (2.2.32-34) bağıntıları uyarınca üçer maddesel noktaya indirgensin (Şek. Pr.2.2.1-2). Bu amaçla 2 numaralı uzuv ele alınırsa

$$m_{A_0}^{(2)} = \frac{i_{S_2}^2}{a_2 \cdot r_2} \cdot m_2 = \frac{20^2}{25 \cdot 50} \cdot 0.1 = 0.032\text{kg}$$

$$m_A^{(2)} = \frac{i_{S_2}^2}{(r_2 - a_2) \cdot r_2} \cdot m_2 = \frac{20^2}{25 \cdot 50} \cdot 0.1 = 0.032\text{kg}$$

$$m_{S_2}^{(2)} = m_2 - \left(m_{A_0}^{(2)} + m_B^{(2)}\right) = 0.1 - 2 \cdot 0.032 = 0.036\text{kg}$$

elde edilir. Benzer hesapların 3 ve 4 numaralı uzuvlar için yinelenmesiyle de

$$m_A^{(3)} = 0.16\text{kg} \ , \ m_B^{(3)} = 0.16\text{kg} \ , \ m_{S_3}^{(3)} = 0.18\text{kg}$$

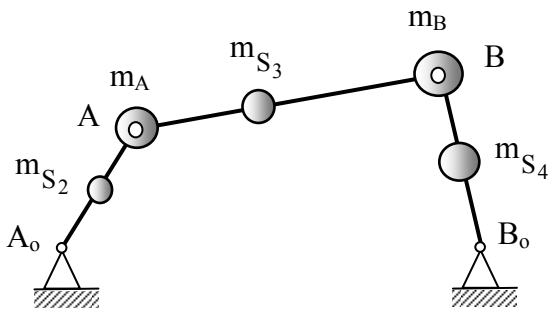
$$m_B^{(4)} = 0.05\text{kg} \ , \ m_{B_0}^{(4)} = 0.10\text{kg} \ , \ m_{S_4}^{(4)} = 0.15\text{kg}$$

bulunur. Buradan mekanizmanın bütününe geçmek üzere aynı noktaya farklı uzuvlardan gelen kütleler toplanır ve hareketsiz A_o ve B_o noktalarına gelen kütleler, dinamik bakımdan etkisiz olduklarından bir yana bırakılırsa

$$m_{S_2} = m_{S_2}^{(2)} = 0.036\text{kg} \ ,$$
$$m_A = m_A^{(2)} + m_A^{(3)} = 0.192\text{kg} \ ,$$
$$m_{S_3} = m_{S_3}^{(3)} = 0.180\text{kg} \ ,$$
$$m_B = m_B^{(3)} + m_B^{(4)} = 0.210\text{kg} \ ,$$
$$m_{S_4} = m_{S_4}^{(4)} = 0.150\text{kg}$$

elde edilir. Buna göre mekanizma, dinamik bakımdan, üç kütlesiz çubuğun taşıdığı 5 maddesel nokta olarak modellenebilir (Şek. Pr.2.2.1-3).

Ancak, A ve B mafsallarında uzuv eylemsizliklerinin birbirine karışmış olduğu bu modelin, bu mafsallardaki tepki kuvvetlerinin hesaplanması özel amacına yönelik problemlerde kullanılamayacağının belirtilmesi gerekir.



Şekil Pr. 2.2.1-3

2.3 RİJİD CİSİMLERİN VEKTÖREL MEKANİĞİNİN ESASLARI

Bu bölümde, rijid cisimlerin vektörel mekaniğinin, makina dinamiği incelemelerinde yararlı olacak bazı temel ilkeleri gözden geçirilecektir. Bilindiği gibi rijid cisimlerin hareketi, biri kütle merkezinin hareketi diğeri ise dönme hareketi olmak üzere iki kısımda incelenir. Aşağıda ilkin bu konudaki anımsatmalara yer verilecektir.

2.3.1 RİJİD CİSMİN KÜTLE MERKEZİNİN HAREKETİ

Maddesel noktalar için ifade edilmiş olan *Newton'un İkinci Hareket Yasası* nın rijid cisimlere uygulanmasıyla,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_S \tag{2.3.1}$$

cismin (mutlak) *çizgisel momentumu* (ya da *hareket miktarı*), **F** ise cisme etkiyen dış kuvvetlerin bileşkesi olmak üzere

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}_S \tag{2.3.2}$$

ifadesine gelinir. Burada $\mathbf{v}_S$ ve $\mathbf{a}_S$ cismin kütle merkezinin mutlak (Bir eylemsizlik eksen takımına göre) hız ve ivmesini göstermektedir. Buna göre, bir rijid cismin S kütle merkezinin, cisme etkiyen tüm dış kuvvetlerin toplam etkisi altında bulunan ve cismin toplam kütlesine sahip olan bir maddesel nokta gibi hareket edeceği anlaşılır. Bu gerçek bazen *Kütle Merkezinin Hareketi Teoremi* adı altında ifade edilir.

Arzu edilirse (2.3.2) vektörel denklemi yerine,

$$F_x = m\ddot{x}_S \ , \quad F_y = m\ddot{y}_S \ , \quad F_z = m\ddot{z}_S \tag{2.3.3}$$

skaler denklemleri de yazılabilir.

2.3.2 RİJİD CİSMİN DÖNME HAREKETİ

Rijid cismin dönme hareketi, *P noktası cismin ya (varsa) hareketsiz bir noktası, ya da S kütle merkezi olmak kaydıyla*,

$$\mathbf{H}^P = \mathbf{I}^P\boldsymbol{\omega} \tag{2.3.4}$$

cismin *P'ye göre (mutlak) açısal momentumu* (ya da *hareket miktarının P'ye göre momenti*), $\mathbf{M}^P$ ise cisme etkiyen tüm dış kuvvetlerin P'ye göre momentleri toplamı olmak üzere

$$\mathbf{M}^P = \frac{d\mathbf{H}^P}{dt} = \mathbf{I}^P\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}^P\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^P\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{H}^P \tag{2.3.5}$$

denklemi uyarınca cereyan eder. Bu gerçek genellikle *Hareket Miktarının Momenti Teoremi* adı altında ifade edilir. Burada $\mathbf{I}^P$, cismin eylemsizlik tansörünün P'yi başlangıç alan, cisme bağlı (onunla birlikte hareket eden) bir Pxyz eksen takımındaki bileşenler matrisi, $\boldsymbol{\omega}$ ve $\boldsymbol{\alpha}$ ise cismin (dolayısıyla da anılan eksen takımının) mutlak açısal hız ve ivme vektörlerinin yine bu eksen takımındaki ifadeleri olup, (2.3.5) eşitliğindeki türevin alınmasında, hareketli eksen takımında ifade edilmiş vektörlerin zamana göre mutlak türevlerini hesaplamakta kullanılan $\left(\frac{d}{dt}\right)_{mutlak} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{bağıl} + \boldsymbol{\omega}\times$ operatöründen yararlanılmıştır.

İstenirse, (2.3.5) vektörel denklemi yerine, burada $\mathbf{M}^P = M_x^P\mathbf{i} + M_y^P\mathbf{j} + M_z^P\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_x\mathbf{i} + \alpha_y\mathbf{j} + \alpha_z\mathbf{k}$ eşitlikleri ve $\mathbf{I}^P$ nin (2.2.6) daki ifadesi yerine konulup hesap yapılarak elde edilen

$$
\begin{aligned}
M_x^P &= I_{xx}^P\alpha_x + I_{xy}^P(\omega_x\omega_y - \alpha_y) - I_{xz}^P(\omega_x\omega_y + \alpha_z) \\
&\quad - I_{yy}^P\omega_y\omega_z - I_{yz}^P(\omega_y^2 - \omega_z^2) + I_{zz}^P\omega_y\omega_z \\
M_y^P &= I_{yy}^P\alpha_y - I_{xy}^P(\omega_y\omega_z + \alpha_x) + I_{yz}^P(\omega_x\omega_y - \alpha_z) \\
&\quad + I_{xx}^P\omega_x\omega_z + I_{xz}^P(\omega_x^2 - \omega_z^2) - I_{zz}^P\omega_x\omega_z \qquad (2.3.6) \\
M_z^P &= I_{zz}^P\alpha_z + I_{xz}^P(\omega_y\omega_z - \alpha_x) - I_{yz}^P(\omega_x\omega_z + \alpha_y) \\
&\quad - I_{xx}^P\omega_x\omega_y - I_{xy}^P(\omega_x^2 - \omega_y^2) + I_{yy}^P\omega_x\omega_y
\end{aligned}
$$

skaler denklemleri de yazılabilir. Bu denklemler, rijid cismin dönme hareketini yöneten en genel denklemlerdir. İki özel halde bu denklemlerin alacağı görünüm dikkat çekicidir:

2.3.2.1 Denklemlerin Bir Asal Eksen Takımında Yazılması Hali

(2.3.6) denklemlerinin ifade edildiği Pxyz eksen takımının cismin, P noktasını başlangıç alan bir asal eksen takımı olarak seçilmesi halinde, bu durumda $I_{xy}^P = I_{xz}^P = I_{yz}^P = 0$ olacağından denklemler basitleşir ve

$$
\begin{aligned}
M_x^P &= I_x^P\alpha_x - (I_y^P - I_z^P)\omega_y\omega_z \\
M_y^P &= I_y^P\alpha_y - (I_z^P - I_x^P)\omega_z\omega_x \qquad (2.3.7) \\
M_z^P &= I_z^P\alpha_z - (I_x^P - I_y^P)\omega_x\omega_y
\end{aligned}
$$

görünümünü alır. Asal eksen takımlarında çalışmanın yararlarını gözler önüne seren ve kendilerini ortaya koyan bilim adamının adıyla *Euler*[1] *Denklemleri* diye adlandırılan bu denklemler, rijid cisimlerin en genel dönme hareketini yöneten denklemlerin alabileceği en yalın görünümü temsil ederler.

2.3.2.2 Cismin Doğrultusu Sabit Bir Eksen Çevresinde Dönmesi Hali

Rijid cismin, doğrultusu sabit bir eksen çevresinde dönmesi özel halinde, bu doğrultu olarak genelliği bozmayan bir kabulle Pxyz eksen takımının örneğin Pz ekseninin doğrultusu alınırsa, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ olacağından $\omega_x = \omega_y = \alpha_x = \alpha_y = 0$ olur ve (2.3.6) denklemleri

$$
\begin{aligned}
M_x^P &= -I_{xz}^P\alpha_z + I_{yz}^P\omega_z^2 \\
M_y^P &= -I_{yz}^P\alpha_z - I_{xz}^P\omega_z^2 \\
M_z^P &= I_{zz}^P\alpha_z
\end{aligned}
\tag{2.3.8}
$$

görünümünü alır. (Cismin hareketinin xy düzlemi içerisinde bir düzlemsel hareket olmasıyla çelişmeyen yegane dönme olan bu dönmede I_{xx}^P, I_{yy}^P ve I_{xy}^P nin etkin olmadığına ve bunun Bölüm 2.2.4.2 deki belirlememizle uyumlu olduğuna dikkat ediniz.)

(2.3.8) denklemleri şu dikkat çekici özelliği ortaya koymaktadır: Eğer bir rijid cisim, asal olmayan bir Pz ekseni çevresinde döndürülürse $I_{xz}^P \neq 0$ ve $I_{yz}^P \neq 0$ olacağından $M_x^P \neq 0$ ve $M_y^P \neq 0$ olur. Bunun anlamı, bu durumda cismin Pz dönme ekseninin doğrultusunu koruyabilmek için, cisme Px ve Py eksenleri çevresinde momentler uygulanması gerekeceğidir. Tersine eğer cisim asal bir Pz ekseni çevresinde döndürülürse, bu durumda $I_{xz}^P = I_{yz}^P = 0$ olacağından $M_x^P = M_y^P = 0$ olur. Bunun anlamı ise, asal bir dönme ekseninin doğrultusunun kendiliğinden korunacağıdır. Bu belirlemeler, Makina Dinamiğinin en önemli problemlerinden biri olan *rotorların dinamik dengesi* konusunun kuramsal temelini oluşturur. Bu konu ileride ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

2.3.3 RİJİD CİSMİN STATİK DENGESİ

(2.3.3) ile (2.3.6), (2.3.7) veya (2.3.8) denklemleri, birlikte, uzayda 6 serbestlik derecesine sahip olduğu bilinen rijid cisim hareketinin 6 hareket denklemini oluşturur. Bu denklemler bazen topluca *Newton-Euler Denklemleri* adıyla anılır. Bu denklemlerde bütün hız ve ivmeler yerine sıfır konulduğunda, harekete yol açmayacak kuvvet ve momentler için (Artık bütün cisim hareketsiz olduğundan P keyfi bir nokta olmak üzere)

[1] Leonhard Euler (1707-1783). İsviçre'li büyük matematik ve mekanikçi. Gauss ve Riemann'la birlikte modern matematiğin en büyük üç simasından biri. Newton'un attığı temel üzerinde klasik mekaniğin başlıca mimarı. Bilimsel yazılarının 100 büyük cildi aşacak miktardaki hacmiyle, edebiyat dahil tüm alanların ve tüm zamanların en üretken yazarı.

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0$$
$$M_x^P = 0, \quad M_y^P = 0, \quad M_z^P = 0 \tag{2.3.9}$$

denklemleri elde edilir ki bilindiği gibi bunlar rijid cismin statik denge denklemleridir.

Makinalar gibi rijid cisim topluluklarının hareketleri (ya da statiği) Newton-Euler denklemleri yardımıyla incelenmek istenirse, *ayırma ilkesi* uyarınca, önce her bir rijid cismi sistemden ayırarak ele alıp bunların hareket (ya da denge) denklemlerini ayrı ayrı yazmak, sonra da bu denklemleri birleştirerek sistemin hareket denklemlerine ulaşmak gerekir. Bütüne parçalardan ulaşılmasını gerektirdiği için bu yaklaşım bazen *sentetik mekanik* adıyla anılır. Bu, bütünden yola çıkarak parçalara ulaşan ve Bölüm 2.4 te ana hatlarını gözden geçireceğimiz *analitik mekanik* ile keskin bir karşıtlık oluşturur.

2.3.4 RİJİD CİSMİN KİNETİK ENERJİSİ

Mekaniğin enerji esaslı yaklaşımlarında, rijid cisimlerin kinetik enerjilerinin ifade edilmesi gerekli olur. Bu nedenle, rijid cisimler mekaniği konusunu kapatmadan, rijid cisimlerde kinetik enerji hesabı konusuna da kısaca değinmek yerinde olacaktır.

Cisme ait sabit bir O noktasının bulunduğu özel hareketlerde kinetik enerji özel olarak, (T üst indisi evriği göstermek üzere)

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}^O \boldsymbol{\omega} \tag{2.3.10}$$

şeklinde hesaplanabilir ise de, böyle bir nokta bulunsun ya da bulunmasın geçerli olan genel kinetik enerji ifadesi, S kütle merkezini esas alan

$$T = \tfrac{1}{2} m v_S^2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}^S \boldsymbol{\omega} \tag{2.3.11}$$

ifadesidir. Bu ifadedeki ilk terim *öteleme kinetik enerjisi*, ikinci terim ise *dönme kinetik enerjisi* diye adlandırılır. Bu ifadenin ortaya koyduğu gerçek; yani rijid cismin toplam kinetik enerjisinin, cismin m toplam kütlesine sahip olan ve S kütle merkeziyle birlikte hareket eden bir maddesel noktanın kinetik enerjisiyle, cismin, kütle merkezi çevresindeki dönmesine ait kinetik enerjinin toplamına eşit olduğu gerçeği, *König*[1] *Teoremi* adıyla anılır.

İstenirse (2.3.11) eşitliği, sağ tarafındaki işlemler gerçekleştirilerek

$$T = \tfrac{1}{2} m v_S^2 + \tfrac{1}{2}\left[I_{xx}^S \omega_x^2 + I_{yy}^S \omega_y^2 + I_{zz}^S \omega_z^2 - 2\left(I_{xy}^S \omega_x \omega_y + I_{xz}^S \omega_x \omega_z + I_{yz}^S \omega_y \omega_z\right)\right] \tag{2.3.12}$$

[1] Samuel König (1712-1757). Alman matematikçi ve düşünürü.

şeklinde de yazılabilir. Sxyz eksen takımının bir asal eksen takımı olarak seçilmesiyle (2.3.12) yerine

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\left(I_x^S\omega_x^2 + I_y^S\omega_y^2 + I_z^S\omega_z^2\right) \tag{2.3.13}$$

ifadesine, cismin, doğrultusu sabit bir eksen (z ekseni diyelim) çevresinde dönmesi özel halinde ise, iyi bilinen

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I_{zz}^S\omega_z^2 \tag{2.3.14}$$

ifadesine gelinir.

(2.3.11) ifadesi için (2.3.12-14) eşitliklerinde verilen açılımların benzerleri (2.3.10) ifadesi için de verilebilir ise de burada buna hiç girişmeyelim ve bu açılımların (2.3.12-14) ten benzetme yoluyla kolayca yazılabileceğini belirtmekle yetinelim.

2.4 ANALİTİK MEKANİĞİN ESASLARI

Bu bölümde mekaniğin, özellikle makinalar gibi çok cisimli sistemlerin incelenmesinde büyük önem taşıyan ve analitik mekanik diye adlandırılan dalının temel kavram ve ilkeleri gözden geçirilecektir.

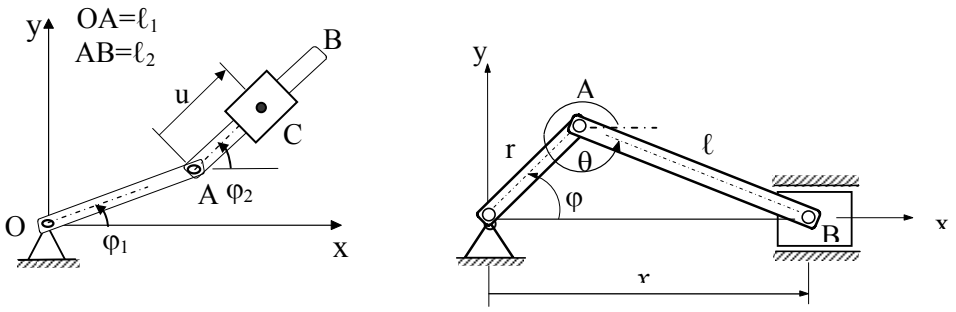
2.4.1 SERBESTLİK DERECESİ . GENELLEŞTİRİLMİŞ KOORDİNATLAR . KISITLAR

2.4.1.1 Temel Kavramlar

Bir mekanik sistemin konumunu eksiksiz olarak tanımlayabilmek için verilmesi gereken birbirinden bağımsız parametre sayısına bu mekanik sistemin serbestlik derecesi denir. Konumu tanımlamakta kullanılan parametreler koordinat adını alır.

Maddesel noktaların konumlarının tanımlanmasında, dikgen (ya da Descartes[1]'ın adına atfen Kartezyen) koordinatlar, silindirik koordinatlar, küresel koordinatlar gibi önceden tanımlanmış üçlü koordinat takımlarından yararlanılır. Ancak, incelenen mekanik sistem maddesel noktalardan ibaret olmadığında, bu koordinat takımları kullanışlı olmaktan çıkar. Örneğin, Şekil 2.4.1-a daki sistem göz önüne alınsın ve bu sistemin konumu, A, B ve C noktalarının x_A, y_A, x_B, y_B, x_C ve y_C kartezyen koordinatları verilerek tanımlanmak istensin. Bu 6 parametre sistemin konumunu (diğer tüm sistem noktalarının koordinatlarının bunlar cinsinden belirlenebilir olması anlamında) eksiksiz olarak tanımlamakla birlikte, bunun için gerekenden fazla oldukları ortadadır. Bunu görmek için sistemin yapısından ötürü bu parametrelerin kendi aralarında

[1] René Descartes (1596-1650). Büyük fransız matematikçi ve feylesofu. Matematikte Analitik Geometriyi kurdu, optikte kırılma ve yansıma yasalarını ortaya koydu. Felsefede, *Discours de la Méthode* (Yöntem Üzerine Söyleşi, 1637) adlı yapıtında ortaya koyduğu *yöntemsel kuşkuculuk* ile ve kuşku duyulamayacak bir temel doğru ararken ulaştığı *cogito ergo sum* (düşünüyorum öyleyse varım) hükmü ile tanınır.



(a) **(b)**

Şekil 2.4.1 Genelleştirilmiş Koordinatlar

$$f_1(x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C) = x_A^2 + y_A^2 - \ell_1^2 = 0$$

$$f_2(x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - \ell_2^2 = 0 \qquad (2.4.1)$$

$$f_3(x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C) = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A} - \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = 0$$

denklemlerini sağlamak zorunda olduklarına dikkat etmek yeterlidir. Koordinatları birbirine bağlayan bu tür denklemlere *kısıt denklemi* adı verilir. Verilen 6 koordinatın sağlaması gereken 3 kısıt denklemi bulunduğuna göre koordinatlardan yalnızca 6-3=3 tanesi diğerlerinden bağımsız değerler alabilir. Bu üç koordinat örneğin x_A, x_B ve x_C olarak seçilirse, geri kalan üçü kısıt denklemlerinden hesaplanabilir. Buradan, ele alınan sistemin serbestlik derecesinin f=3 olduğu sonucu çıkar. (Esasen bu sonuca, n toplam uzuv sayısını, e_1 ise adi eleman çifti sayısını göstermek üzere düzlemsel mekanizmaların serbestlik derecesini veren $f=3(n-1)-2e_1-e_2$ Grübler-Kutzbach formülünde n=4, $e_1=3$ ve $e_2=0$ yerine konularak da ulaşılabilirdi.) Geldiğimiz noktada, bu sistemin konumunu tanımlamakta x_A, x_B ve x_C kartezyen koordinatlarının kullanılabileceği anlaşılmış olmakla birlikte, sistemin herhangi bir noktasının koordinatlarının, ya da sistemdeki cisimlerin açısal konumlarının bunlar cinsinden hesabının ne kadar külfetli bir iş olacağı şöyle bir düşünülürse bunun pek de uygun bir seçim olmayacağı kendiliğinden anlaşılır.

Pekiyi, bu sistemin konumunu tanımlamakta bundan daha uygun bir parametre üçlüsü bulunamaz mıydı? Eğer kendimizi bilinen koordinat sistemleriyle sınırlamadan düşünürsek bunun pekala olanaklı olduğunu görmekte gecikmeyiz. Örneğin φ_1, φ_2 ve u parametre üçlüsü bu iş için çok daha uygundur çünkü sistemin tüm noktalarının koordinatları bunlar cinsinden kolayca belirlenebilir. Buna bir örnek olmak üzere C noktasının koordinatlarının

$$x_C = \ell_1 \cos\varphi_1 + u\cos\varphi_2, \quad y_C = \ell_1 \sin\varphi_1 + u\sin\varphi_2 \qquad (2.4.2)$$

şeklinde yazılacağını belirtmekle yetinelim. Bir sistemin konumunu tanımlamak üzere, sistemin yapısına uygun olarak seçilen bu tür parametrelere *genelleştirilmiş koordinatlar* (ya da *Lagrange koordinatları*) adı verilir.

Şekil 2.4.1-b deki mekanizmanın konumunu tanımlamakta kullanılan φ, θ ve x koordinatlarının da birer genelleştirilmiş koordinat olduğu ve bunlar arasında, çevrim kapama denklemlerinin yazılmasıyla elde edilen

$$f_1(\varphi,\theta,x) = -x + r\cos\varphi + \ell\cos\theta = 0$$
$$f_2(\varphi,\theta,x) = r\sin\varphi + \ell\sin\theta = 0 \qquad (2.4.3)$$

kısıt denklemlerinin bulunduğu bilinmektedir. 3 koordinata karşılık 2 kısıt denklemi bulunduğuna göre 3-2=1 serbestlik dereceli bir sistem söz konusudur. Buna göre verilen genelleştirilmiş koordinatlardan biri konumu tanımlamaya yeterlidir. Bu iş için φ seçilmiş olsun. Bu durumda φ ye *esas genelleştirilmiş koordinat*, kısıt denklemleri yardımıyla onun cinsinden hesaplanabilecek olan θ ve x e ise *ikincil genelleştirilmiş koordinat* adı verilir.

Şimdi, yukarıdaki örneklerin incelenmesinden ortaya çıkan fikirleri toparlayalım: Her mekanik sistemin konumunu tanımlamakta, bu sistemin yapısına uygun ve yalnızca bu sisteme özgü koordinatlar tanımlanabilir. Bunlara genelleştirilmiş koordinatlar adı verilir. (Genelleştirilmiş koordinatların zamana göre türevleri de *genelleştirilmiş hızlar* adıyla anılır.) Bir sistemin konumunu tanımlamakta kullanılan genelleştirilmiş koordinatların sağlamak zorunda oldukları denklemlere kısıt denklemi ya da kısaca kısıt adı verilir. Eğer bir sistemde

$$q_i \;;\; i=1,2,\ldots,n \qquad (2.4.4)$$

şeklinde n tane genelleştirilmiş koordinat tanımlanmış ve bunlar arasında

$$f_j(q_1,q_2,\ldots,q_n)=0 \;;\; j=1,2,\ldots,k \qquad (2.4.5)$$

şeklinde birbirinden bağımsız k adet kısıt bulunduğu belirlenmişse bu sistemin serbestlik derecesi

$$f=n-k \qquad (2.4.6)$$

dir. Genelleştirilmiş koordinatlardan keyfi biçimde seçilip öne çıkartılacak f tanesi esas genelleştirilmiş koordinat, geri kalan k tanesi ise ikincil genelleştirilmiş koordinat olarak adlandırılır.

2.4.1.2 Kısıt Türleri. Sistemlerin Sınıflandırılması

Yukarıda verilen kısıt örnekleri ve onları topluca temsil eden (2.4.5) kısıt denklemi zamandan bağımsız ve holonomik kısıtlar denilen özel bir kısıt türüne ilişkindir. Oysa mekanik sistemlerde bunun dışında kalan kısıt türlerine de rastlanır. Analitik mekanikte taşıdıkları önem yüzünden burada kısaca kısıt türleri üzerinde durulması yerinde olacaktır.

Bazen kısıt denklemleri genelleştirilmiş koordinatları ve/veya genelleştirilmiş hızları içermekle birlikte (yukarıdaki örneklerde de olduğu gibi) t zamanını açık olarak içermeyen fonksiyonlar şeklinde olur:

$$f(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (2.4.7)$$

Bu tür kısıtlara *zamandan bağımsız (skleronomik) kısıt* adı verilir. Bütün kısıtları zamandan bağımsız olan sistemlere de *skleronomik sistem* denir.

Bazen de kısıt denklemleri genelleştirilmiş koordinatlar ve/veya genelleştirilmiş hızların yanısıra zamanı da açık olarak içeren fonksiyonlar şeklindedir:

$$f(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n; t) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial t} \neq 0 \qquad (2.4.8)$$

Bu tür kısıtlara ise *zamana bağlı (reonomik) kısıt* denir. Kısıtlarından en az biri zamana bağlı olan sistemlere de *reonomik sistem* adı verilir. Örneğin Şekil 2.4.2-a daki sabit Ω açısal hızıyla çözülen r yarıçaplı makaradan asılı sarkaçta, esas genelleştirilmiş koordinat olarak φ, bir ikincil genelleştirilmiş koordinat olarak da y_P seçilmiş olsun. Sistemin incelenmesinden, bu durumda

$$f(\varphi, y_P; t) = y_P - r\cos\varphi - \left[\ell_0 + r(\varphi + \Omega t)\right]\sin\varphi = 0 \qquad (2.4.9)$$

şeklinde, t zamanını açıkça içeren bir kısıt denkleminin, yani zamana bağlı bir kısıtın söz konusu olduğu görülür. Makinalarda daha çok zamandan bağımsız kısıtlar söz konusu olur.

Öte yandan, yukarıda da belirtildiği gibi, kısıt denklemlerinin genelleştirilmiş koordinatlar yerine/yanısıra genelleştirilmiş hızları içerdiği durumlarla da karşılaşılır. Örneğin Şekil 2.4.2-b deki, bir düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanan r yarıçaplı silindir için, öteleme miktarı x ile dönme miktarı φ genelleştirilmiş koordinatlar olarak seçilmiş olsun. Kayma olmaması için silindirin düzleme dokunduğu P noktasının hızının sıfır olması, yani bu noktanın anlık dönme merkezi olması gerekir. Bu ise $\dot{x}$ ve $\dot{\varphi}$ genelleştirilmiş hızları arasında

$$f(\dot{x}, \dot{\varphi}) = \dot{x} - r\dot{\varphi} = 0 \qquad (2.4.10)$$

kısıtının bulunmasını gerektirir. Ancak bu kısıt denkleminin sol tarafı zamana göre bir tam türev oluşturduğu için kolayca integre edilerek,

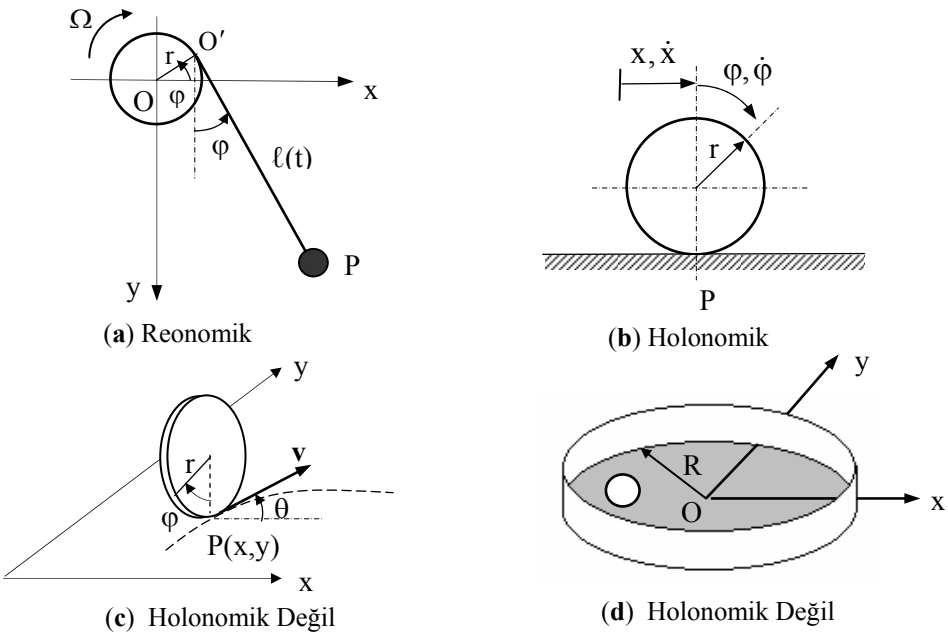
$$f(x, \varphi) = x - r\varphi + C = 0 \qquad (2.4.11)$$

şekline getirilebilir.

Bünyesinde genelleştirilmiş koordinatları ve, yerine göre, t zamanını barındırıp genelleştirilmiş hızları barındırmayan, ya da bunları barındırsa da (2.4.11) deki gibi integre edilerek yalnızca genelleştirilmiş koordinatları barındırır hale getirilebilen kısıtlara *holonomik kısıt*, bütün kısıtları holonomik olan sistemlere de *holonomik sistem* adı verilir. Holonomik bir kısıt denkleminin genel görünüşü

$$f(q_1, q_2, ..., q_n; t) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = 0 \,;\; i=1,2,\ldots n \qquad (2.4.12)$$

şeklindedir.



Şekil 2.4.2 Kısıt Tipleri

Bir kısıtı holonomik yapan, birbirine bağladığı koordinatlardan birini diğerleri (ve t) cinsinden çekmeyi olanaklı kılan yapıda olmasıdır. Bunun yapılabilmesi ise hem kısıtın hem de söz konusu koordinatın problemden düşürülebilmesi demektir. Buradan, holonomik sistemlerde konumun tanımlanmasında kullanılacak koordinat sayısının, bunun kasten istenilmediği durumlar dışında her zaman, sistemin serbestlik derecesine eşit kılınabileceği anlaşılır. Bu yapıldığında, sistemin herhangi bir noktasının **r** yer vektörü, f sistemin serbestlik derecesini göstermek üzere

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(q_1,q_2, \dots ,q_f; t) \qquad (2.4.13)$$

şeklinde, f adet birbirinden bağımsız genelleştirilmiş koordinat cinsinden ifade edilebilir.

Denklemleri (2.4.12) biçiminde olmayan ve bu biçime getirilemeyen kısıtlara *holonomik olmayan kısıt*, kısıtlarından en az biri holonomik olmayan sistemlere de *holonomik olmayan sistem* denir.

Holonomik olmayan kısıtlar çok değişik şekillerde olabilir. Bu olası şekillerin tümünü burada irdelemek ne olanaklı ne de gereklidir. Ancak, bir fikir vermek bakımından, sık karşılaşılan iki şeklin kısaca gözden geçirilmesi yararlı olabilir.

Bazen, genelleştirilmiş hızları içeren ve integre edilerek yalnız genelleştirilmiş koordinatları içerir hale getirilemeyen kısıtlarla karşılaşılabilir. Örneğin Şekil 2.4.2-c deki, kaymadan ve yana yatmadan yuvarlanan bozuk paranın hareketinde, paranın zeminle temas noktasının x ve y koordinatları, yuvarlanma yörüngesinin θ eğimi ve yuvarlanma miktarı φ genelleştirilmiş koordinatlar olarak seçilmiş olsun. Bu koordinatlar arasında, genelleştirilmiş hızları da içeren

$$f_1(\dot{x},\dot{y},\dot{\varphi},\theta) = \dot{x} - r\dot{\varphi}\cos\theta = 0$$
$$f_2(\dot{x},\dot{y},\dot{\varphi},\theta) = \dot{y} - r\dot{\varphi}\sin\theta = 0 \qquad (2.4.14)$$

kısıt denklemleri söz konusudur ve birer tam türev niteliği taşımadıklarından bunların integre edilerek x, y, φ, θ koordinatlarını içerir hale getirilmesi olanaksızdır. Sistem holonomik olmayan bir sistemdir. 4 koordinat ve bunlar arasında iki kısıt bulunduğuna göre sistemin serbestlik derecesi f=4-2=2 olmakla birlikte, kısıt denklemleri iki koordinat verildiğinde diğer ikisinin hesaplanmasına olanak vermediğinden konum iki koordinatla tanımlanamaz.

Bu örneğin temsil ettiği ve genel görünüşü

$$f(q_1,q_2,...,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n;t) = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \neq 0\text{; en az bir i için} \qquad (2.4.15)$$

şeklinde olan holonomik olmayan kısıtlar, sistemin serbestlik derecesini azaltmakla birlikte, verilmesi gereken koordinat sayısını azaltmazlar[1].

Öte yandan bazı sistemlerde de eşitsizlikler şeklinde kısıtlara rastlanır. Örneğin Şekil 2.4.2-d deki R yarıçaplı tepsinin içerisinde yuvarlanan bilyanın x ve y koordinatları

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 \leq 0 \qquad (2.4.16)$$

kısıtına tabidir. Bu da holonomik olmayan bir kısıttır. Bu kısıtın, bilyanın tepsi çeperine çarpmasını gerektirmeyen hareketlerde [f(x,y)<0] ne serbestlik derecesini ne de verilmesi gereken koordinat sayısını azaltacağı ve yok hükmünde olacağı; bu çeperi terk edemediği [f(x,y)=0] hareketlerde ise her ikisini birden azaltan holonomik bir kısıt görünümü alacağı ortadadır. Bu yüzden bu örneğin temsil ettiği ve genel görünüşü

$$f(q_1,q_2,...,q_n;t) \leq 0 \qquad (2.4.17)$$

şeklinde olan holonomik olmayan kısıtlar, yukarıdakilerden apayrı kurallara tabidir.

Esasen (2.4.17) deki gibi eşitsizlikler şeklindeki kısıtlar engelledikleri bir hareketin tam tersini serbest bırakan ve bu yüzden *tek yanlı kısıt* diye adlandırılan kısıtlardır. Bunun tersi, yani engellediği her hareketin tam tersini de engelleyen kısıtlar ise eşitlikler şeklinde olup çift yanlı kısıt diye adlandırılırlar.

Biz burada holonomik olmayan kısıtlar konusunda daha fazla ayrıntıya girmeyelim. Çünkü makinaların hemen hemen tamamı holonomik sistemler oluşturduklarından bizim amacımız bakımından buna gerek yoktur.

[1] Aslında bu noktada serbestlik derecesi kavramı da yeniden sorgulanır ve alternatif serbestlik derecesi tanımlarına yönelinir ise de burada biz bu konunun ayrıntısına girmeyeceğiz.

2.4.2 VİRTÜEL YER DEĞİŞTİRME • VİRTÜEL İŞ • KISIT KUVVETLERİ

2.4.2.1 Virtüel Yer Değiştirme

Bir mekanik sistemde, genelleştirilmiş koordinatların sonsuz küçük ve sistemin tabi olduğu kısıtların verilmiş bir t anındaki durumlarıyla bağdaşmak kaydıyla keyfi değişimleri sonucu olarak ortaya çıkan yer değiştirmelere virtüel yer değiştirme denir.

Buradaki *virtüel* terimi, sisteme etkiyen kuvvet ve kısıtların da değişime uğrayabileceği bir dt zaman aralığında oluşacak *gerçek* sonsuz küçük yer değiştirmelerle ayrımı vurgulamaktadır. (Virtüel yer değiştirmede kısıtlar ilgilenilen t anındaki durumlarında donmuş kabul edilir.) Bu ayrımı gösterilime de yansıtmak üzere, herhangi bir q genelleştirilmiş koordinatındaki gerçek sonsuz küçük değişim dq ile gösterilirken virtüel değişim δq ile gösterilir. Tanımından gelen farklılıklar dışında, "δ" virtüel değişim operatörü "d" diferansiyel operatörüyle aynı hesap kurallarına tabidir.

Şimdi kendimizi, konumlarının tanımlanması için serbestlik derecelerine eşit sayıda koordinatın verilmesinin yeterli olduğunu bildiğimiz holonomik sistemlerin incelenmesiyle sınırlandıralım ve şu andan itibaren sistem denildiğinde aksi belirtilmedikçe hep holonomik sistemleri anlamayı kararlaştıralım.

Sistem f serbestlik dereceli ve reonomik iken herhangi bir noktasının yer vektörü (2.4.13) uyarınca

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(q_1,q_2, \dots ,q_f; t) \tag{2.4.18}$$

şeklinde f adet genelleştirilmiş koordinatın ve t nin fonksiyonu olacak, buna göre bu noktanın gerçek sonsuz küçük (diferansiyel) yer değiştirmesi

$$d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \tag{2.4.19}$$

şeklinde olacaktır. Buna karşılık aynı noktanın virtüel yer değiştirmesi, tanım gereği dt zaman aralığında oluşacak değişimlerden etkilenmeyeceğinden

$$\delta\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j \tag{2.4.20}$$

den ibaret olur. Buradan hemen anlaşılabileceği gibi *reonomik sistemlerde gerçek yer değiştirmelerle virtüel yer değiştirmeler her zaman birbirlerinden farklıdır.*

Öte yandan, f serbestlik dereceli skleronomik bir sistem göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(q_1,q_2, \dots ,q_f) \tag{2.4.21}$$

olacağından gerçek sonsuz küçük yer değiştirme bu kez

$$d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_j \tag{2.4.22}$$

şeklini almakla birlikte virtüel yer değiştirme yine (2.4.20) deki gibidir. Hemen görüleceği gibi iki ifade aynı görünümde olup aralarındaki tek ayrım dq_j lerden farklı olarak δq_j lerin tanım gereği keyfi oluşudur. Olası keyfi seçimlerden biri de $\delta q_j = dq_j$; j=1,2,…,f seçilmesidir. Buna göre *skleronomik sistemlerde gerçek sonsuz küçük yer değiştirme olası virtüel yer değiştirmelerden biridir*.

2.4.2.2 Virtüel İş

Bir mekanik sisteme etkiyen bir kuvvetin sistemin bir virtüel yer değiştirmesi sırasında yapacağı işe bu kuvvetin virtüel işi denir.

Sistemin gerçek sonsuz küçük bir yer değiştirmesi sırasında yapılacak dW gerçek diferansiyel işinden ayırt etmek üzere virtüel iş δW ile gösterilir. Kuvvet $\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}$ ile, uygulandığı sistem noktasının virtüel yer değiştirmesi $\delta\mathbf{r}=\delta x\mathbf{i}+\delta y\mathbf{j}+\delta z\mathbf{k}$ ile gösterilirse **F** kuvvetinin virtüel işi

$$\delta W=\mathbf{F}.\delta\mathbf{r} \tag{2.4.23}$$

veya

$$\delta W=F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z \tag{2.4.24}$$

ya da (2.4.20) deki hesap **r** vektörünün bileşenlerine uygulanarak

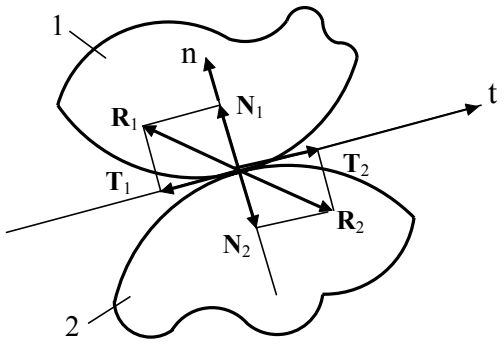
$$\delta W = F_x\left(\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial x}{\partial q_j}\delta q_j\right) + F_y\left(\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial y}{\partial q_j}\delta q_j\right) + F_z\left(\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial z}{\partial q_j}\delta q_j\right) \tag{2.4.25}$$

şeklinde ifade edilir.

2.4.2.3 Kısıt Kuvvetleri

İdeal kısıtlara sahip bir mekanik sistemin her virtüel yer değiştirmesinde kısıt kuvvetlerinin virtüel işleri toplamı sıfırdır.

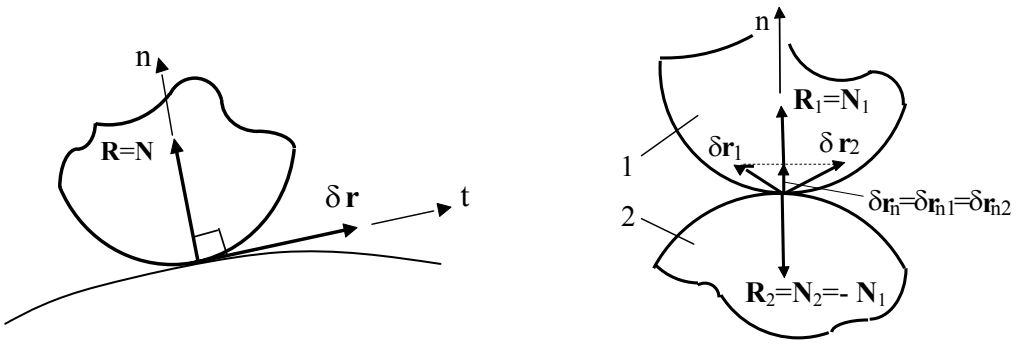
Önceki bölümlerin içeriğinden, bir mekanik sistemin genelleştirilmiş koordinatlarına sağlamaları gereken kimi koşullar dayatarak onların hareketini sınırlandıran engellere kısıt denildiğini biliyoruz. Kısıtları fiziksel olarak sağlayanın, sistem içerisindeki cisimlerin hareketlerini engelleyen yine sistem içi ya da sistem dışı cisimlerin varlığı olduğunu ve bunu sistem içi cisimlere *kısıt kuvveti* adı verilen tepki kuvvetleri uygulayarak sağladıklarını da biliyoruz. Bu bölümdeki amacımız, rijid cisimlerden oluşan sistemler özelinde, bu kuvvetlerin doğası üzerinde durmaktır.



Şekil 2.4.3 Temas Halinde İki Rijid Cisim

Rijid cisimler birbirlerinin hareketini dış yüzeyleri üzerinden temas ederek kısıtlarlar (Şekil 2.4.3). İki rijid cisim birbirinin içine geçemeyeceğinden böyle bir kısıt temas eden yüzeylerin ortak normali **n** doğrultusundaki bağıl hareketleri bütünüyle yasaklar. Bunu sağlamak üzere cisimlerin birbirlerine uyguladıkları **R** kısıt (etki-tepki) kuvvetlerinin bir **N** normal bileşeni her zaman vardır. Buna karşılık, kısıt, ortak teğet **t** doğrultusundaki bağıl hareketlere izin verebilir de vermeyebilir de. Bununla ilgili olarak iki aşırı durum ayırdedilir: Bunlardan ilkinde temas eden yüzeylerin, teğet doğrultudaki bağıl hareketlere hiç engel çıkartmadığı varsayılır. Bu durumda yüzeylerin *ideal parlak yüzey* olduğu söylenir. İdeal parlak yüzeyler üzerinden temas eden cisimlerde kısıt kuvvetlerinin teğet bileşeni yoktur ve kısıt kuvveti **N** normal kuvvetinden ibarettir: **R**=**N**. İkinci aşırı durumda temas eden yüzeylerin teğet doğrultudaki bağıl hareketleri de bütünüyle yasakladığı varsayılır. Bu durumda yüzeylerin *ideal pürüzlü yüzey* olduğu söylenir. İdeal pürüzlü yüzeyler üzerinden temas eden cisimlerde kısıt kuvvetlerinin **N** yanında bir de **T** teğet bileşeni vardır: **R**=**N**+**T**.

Şimdi ilkin ideal parlak yüzeyler (**R**=**N**) durumunu ele alalım. Sisteme ait cismin hareketini kısıtlayan cisim ya sistem dışı bir cisimdir ve bir dış kısıt kuvveti söz konusu olur ya da sisteme ait ikinci bir cisimdir ve bir iç kısıt kuvveti söz konusu olur. Sistem dışı cisim halinde bu cisim ister hareketli olsun (reonomik kısıt) ister hareketsiz (skleronomik kısıt) sisteme ait cismin, kısıt kuvvetinin etkidiği noktasının $\delta\mathbf{r}$ virtüel yer değiştirmesi ortak teğet doğrultusunda olup $\mathbf{N}\perp\delta\mathbf{r}$ olacağından $\delta W=\mathbf{N}.\delta\mathbf{r}=0$ olur (Şekil 2.4.4-a). *Buradan ideal parlak yüzeyler halinde bir dış kısıt kuvvetinin hiç bir zaman virtüel iş yapmayacağı anlaşılır.*



(a) Dış Kısıt Kuvveti

(b) İç Kısıt Kuvveti

Şekil 2.4.4 İdeal Parlak Yüzeyler

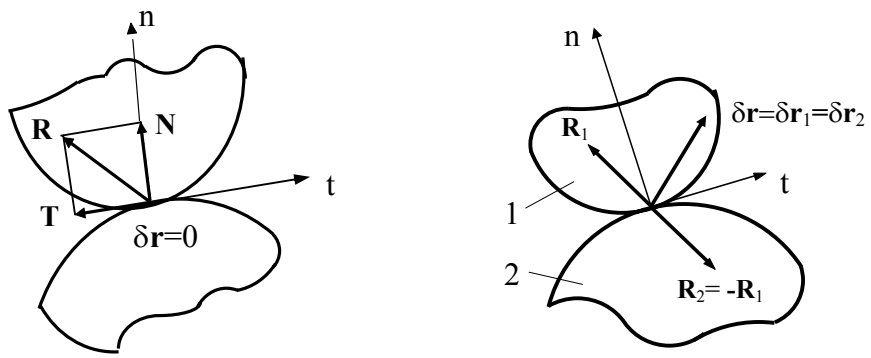
Bir iç kısıt kuvveti halinde ise (Şekil 2.4.4-b) sistem içi cisimlerin birbiriyle temas halinde bulunan noktalarının birbirine eşit ve ortak normal doğrultusunda bir $\delta\mathbf{r}_n = \delta\mathbf{r}_{n1} = \delta\mathbf{r}_{n2}$ virtüel yer değiştirme bileşenleri vardır. Bu nedenle virtüel yer değiştirme sırasında $\mathbf{R}_1=\mathbf{N}_1$ ve $\mathbf{R}_2=\mathbf{N}_2$ tepki kuvvetleri teker teker sıfırdan farklı birer $\delta W_1 = \mathbf{N}_1\delta\mathbf{r}_n \neq 0$ ve $\delta W_2 = \mathbf{N}_2\delta\mathbf{r}_n \neq 0$ virtüel işi yapmakla birlikte, Newton'un Üçüncü Hareket Yasası dolayısıyla $\mathbf{N}_2=-\mathbf{N}_1$ olacağından ikisinin virtüel işleri toplamı $\delta W= \delta W_1+ \delta W_2=0$ olur.

Buradan, ideal parlak yüzeyler halinde iç kısıt kuvvetlerinin virtüel işleri toplamının her zaman sıfır olacağı anlaşılır.

Şimdi de ideal pürüzlü yüzeyler (**R**=**N**+**T**) halini ele alalım. İdeal pürüzlü yüzeyler ne teğet ne normal doğrultudaki bağıl hareketlere izin verdiğinden sistem ister skleronomik ister reonomik olsun bir dış kısıt kuvvetinin uygulanma noktasının virtüel yer değiştirmesi sıfır olur: $\delta\mathbf{r}=0$. Bu durumda her zaman $\delta W=\mathbf{R}.\delta\mathbf{r}=0$ olacağından *ideal pürüzlü yüzeyler halinde dış kısıt kuvvetlerinin hiç bir zaman virtüel iş yapmayacakları anlaşılır*. Öte yandan, temas noktasının her türlü hareketi yasaklandığına göre, geriye ideal pürüzlü yüzeylerin izin verebileceği tek hareket tipi kalmaktadır: temas noktasının anlık dönme merkezini oluşturduğu hareketler. Bu tip hareketlere, bilindiği gibi, *kaymadan yuvarlanma hareketi* adı verilmektedir (Şekil 2.4.5-a). İç kısıt kuvvetlerine gelince, ideal pürüzlü yüzeyler iki cismin karşılıklı temas noktalarının bağıl hareketine izin vermediğine göre bu iki noktanın virtüel yer değiştirmesi birbirine eşit olmak durumundadır: $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}_1 = \delta\mathbf{r}_2$. Newton'un Üçüncü Hareket Yasasına göre de $\mathbf{R}_2=-\mathbf{R}_1$ olacağından, $\mathbf{R}_1$ ve $\mathbf{R}_2$ kısıt kuvvetlerinin yapacağı virtüel işler ayrı ayrı sıfırdan farklı olmakla birlikte bunların toplamı sıfır olur (Şekil 2.4.5-b). *Buna göre ideal pürüzlü yüzeyler halinde iç kısıt kuvvetlerinin virtüel işleri toplamının her zaman sıfır olacağı anlaşılır.*

Şimdi buraya kadar söylenilenler toparlanmak istenirse, ideal kısıt terimi ideal parlak ve ideal pürüzlü yüzeyleri kapsayan bir genelleme oluşturmak kaydıyla yukarıda, bölümün girişinde verilen hükme ulaşılır:

İdeal kısıtlara sahip bir mekanik sistemin her virtüel yer değiştirmesinde kısıt kuvvetlerinin virtüel işleri toplamı sıfırdır.



(a) Dış Kısıt Kuvveti **(b)** İç Kısıt Kuvveti

Şekil 2.4.5 İdeal Pürüzlü Yüzeyler

Burada şuna da işaret edelim ki yukarıda sözü edilen **R** kısıt kuvvetlerinin ve onların **N** ve **T** bileşenlerinin hiç biri dinamik probleminin verisi değildir. Bu kuvvetler hareket boyunca, hareketin temsil ettikleri kısıtları sağlaması için gereken şiddetleri alacak biçimde kendilerini uyarlarlar. Bu yüzden bu kuvvetler ancak dinamik probleminin çözülmesi sonunda belirlenebilirler.

İdeal olmayan kısıtlar (ne ideal parlak ne ideal pürüzlü yüzeyler) halinde ise, **R** kısıt kuvvetinin, şiddeti **N** normal bileşeninki cinsinden, Coulomb Yasası uyarınca $T=\mu_k N$ şeklinde belirli bir **T** teğetsel bileşeninin de doğacağı bilinmektedir: $\mathbf{R}=\mathbf{N}+\mathbf{T}=N(\mathbf{e}_n+\mu_k\mathbf{e}_t)$. İdeal pürüzlü yüzeyler halindekinden farklı olarak, temas halindeki noktaların bağıl hareket yapamaması kuralı şimdi geçersiz olduğundan, yukarıdaki muhakemeler de geçersiz olur ve ideal olmayan kısıtlar halinde kısıt kuvvetlerinin **T** bileşenleri hem teker teker hem de toplamda (negatif) virtüel iş yaparlar. Esasen Coulomb yasasına uyan T sürtünme kuvvetleri, bir kısıt kuvveti (N) cinsinden verilmiş bir kuvvet olarak ne tam olarak kısıt kuvvetleri sınıfına, ne de tam olarak verilmiş kuvvetler sınıfına girerler ve üçüncü bir sınıf oluştururlar. Bu kuvvetlerin mekanikte hesaba katılması her zaman sorunludur.

Tüm kısıtları ideal olan sistemlere *ideal sistem* adı verilir. Bu ders çerçevesinde ele alınacak sistemlerin, aksi belirtilmedikçe, ideal sistemler oldukları varsayılacaktır.

2.4.3 VİRTÜEL İŞLER İLKESİ

Virtüel işler ilkesi bir statik ilkesidir. Ama aynı zamanda dinamiğin çok önemli kimi ilkelerinin de çıkış noktasını oluşturur. İlkenin ilk izleri Archimedes[1]'e kadar uzanır. Ancak ilkeyi bütün genelliği içerisinde ilk ifade eden Johann Bernouilli[2], ona son ve mükemmel şeklini veren ise Lagrange[3] olmuştur.

Virtüel işler ilkesi şöyle ifade edilir:

İdeal bir mekanik sistemin dengede olmasının gerek ve yeter koşulu, üzerine etkiyen kuvvetlerin virtüel işleri toplamının, olası bütün virtüel yer değiştirmelerde sıfır olmasıdır.

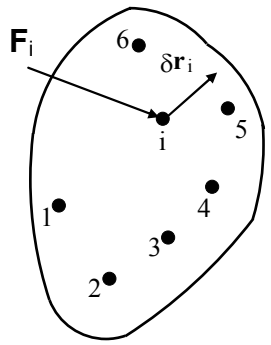
Mekanik sistem bir maddesel noktalar bütünü olarak görülür ve i inci maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet $\mathbf{F}_i$ ile, bu maddesel noktanını virtüel yer değiştirmesi ise $\delta\mathbf{r}_i$ ile gösterilirse (Şekil 2.4.6) ilke matematiksel olarak

$$\delta W = \sum_i \delta W_i = \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \qquad (2.4.26)$$

[1] Archimedes (İ.Ö. 287-212). Yunan bilgini. Kaldıraç Yasası ve Hidrostatik Kaldırma Kuvveti Yasasını ortaya koymasının yanısıra, sonsuz vida, palanga, dişli çark gibi bir çok mekanizmayı icat etmesiyle tanınır. Kaldıraç Yasası, Virtüel İşler İlkesinin ilk çekirdeğini oluşturur.

[2] Johann Bernouilli (1667-1748). Ağabeyi Jacob Bernouilli (1654-1705) ve oğlu Daniel Bernouilli (1700-1782) ile birlikte, İsviçre'nin bilim dünyasına armağan ettiği ünlü Bernouilli ailesini oluşturur.

[3] Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Büyük fransız matematik ve mekanikçisi. Matematikte Varyasyonlar Hesabının, mekanikte *Mécanique Analytique* (Analitik Mekanik, 1788) adlı yapıtıyla, potansiyel enerji, genelleştirilmiş koordinat kavramlarının ve hareketin Lagrange Denklemlerinin; kısaca Analitik Mekaniğin kurucusu.



Şekil 2.4.6 Maddesel Noktalar Sistemi

şeklinde ifade edilebilir. Ancak bu haliyle ilkenin ne şaşırtıcı bir yanı, ne de getirdiği bir yenilik vardır. Çünkü eğer sistem dengede olacaksa her bir maddesel noktası dengede olmalı, bunun için ise $\mathbf{F}_i$ lerin her biri teker teker sıfıra eşit olmalıdır. Bu ise doğrudan doğruya (2.4.26) eşitliğini yazdırır.

İlke asıl ilginç halini, ideal kısıtlara sahip sistemlere uygulandığında alır. Biz de bundan böyle kendimizi ideal kısıtlara sahip sistemlerin dengesinin incelenmesiyle sınırlandıralım ve $\mathbf{F}_i$ kuvvetleri içerisindeki verilmiş kuvvet ($\mathbf{F}_i^v$) ve kısıt kuvveti ($\mathbf{F}_i^k$) bileşenlerini ayırarak devam edelim:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^v + \mathbf{F}_i^k \tag{2.4.27}$$

(2.4.27) eşitliği (2.4.26) da yerine konulduğunda

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i^v \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^k \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2.4.28}$$

elde edilir. Oysa Bölüm 2.4.2.3 ün içeriğinden, ideal kısıtlar halinde, bir mekanik sisteme etkiyen bütün kısıt kuvvetlerinin virtüel işleri toplamının her virtüel yer değiştirmede sıfır olacağı, yani

$$\sum_i \mathbf{F}_i^k \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2.4.29}$$

olacağı bilinmektedir. Bunun anlamı ise ideal kısıtlara sahip sistemlerde bütün kısıt kuvvetlerinin statik denge probleminden düşmesidir. Böylece (2.4.28) yerine, yalnız verilmiş kuvvetleri içeren

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i^v \delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2.4.30}$$

statik denge koşuluna gelinir (Burada artık $\mathbf{F}_i^v$ lerin teker teker sıfıra eşit olmadığına dikkat ediniz.). Bu sonuç,

İdeal kısıtlara sahip bir mekanik sistemin dengede olmasının gerek ve yeter koşulu, üzerine etkiyen verilmiş kuvvetlerin virtüel işleri toplamının, olası bütün virtüel yer değiştirmelerde sıfır olmasıdır.

şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi de kendimizi holonomik sistemlerin incelenmesiyle sınırlandıralım ve f serbestlik dereceli olduğunu varsaydığımız sistemin konumunu, birbirinden bağımsız f adet $q_1, q_2, \ldots, q_f$ genelleştirilmiş koordinatıyla tanımladığımızı düşünelim. Bu durumda, (2.4.22) deki fikir uyarınca (2.4.30) eşitliği yerine (artık v üst indisi kaldırılarak)

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = 0 \tag{2.4.31}$$

ya da toplamların sırası değiştirilerek

$$\delta W = \sum_{j=1}^{f} \left(\sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \tag{2.4.32}$$

yazılabilir. Burada da

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{2.4.33}$$

veya, (2.4.26) ışığında, daha genel olarak

$$Q_j = \sum_i \frac{\partial W_i}{\partial q_j} \tag{2.4.34}$$

tanımlanırsa

$$\delta W = \sum_{j=1}^{f} Q_j \delta q_j = 0 \tag{2.4.35}$$

ifadesine gelinir. Bu noktada q_j lerin, dolayısıyla da δq_j lerin birbirinden bağımsız olduğu anımsanırsa (2.4.35) eşitliğinin sağlanabilmesi için ya δq_j lerin her biri teker teker sıfıra eşit olmalı (ki eşitlik olası bütün virtüel yer değiştirmelerde geçerli olmak durumunda bulunduğu için bu seçenek konu dışıdır) ya da δq_j lerden her birinin çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır.

Böylece ideal kısıtlara sahip holonomik sistemlerde statik dengenin gerek ve yeter koşulu olarak

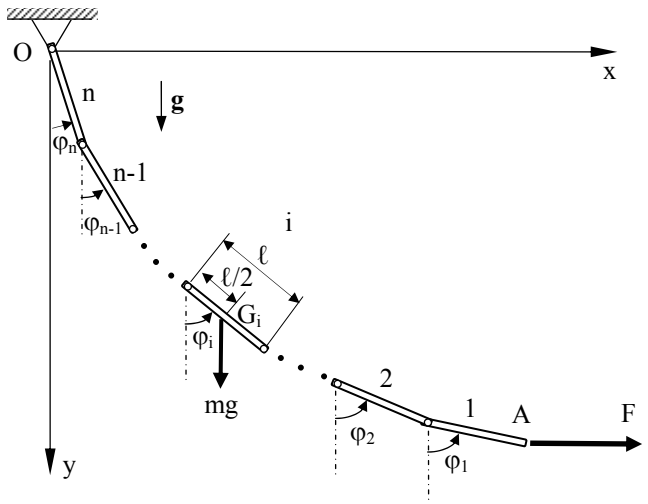
$$Q_j = 0 \quad ; \; j=1,2,\ldots,f \tag{2.4.36}$$

sonucuna ulaşılır. Buradaki Q_j ye q_j genelleştirilmiş koordinatına ilişkin genelleştirilmiş kuvvet adı verilir. Genelleştirilmiş kuvvet kavramı, genelleştirilmiş koordinatları esas alan analitik mekaniğin, kuvvetleri değişik koordinatlara etkiyecek bileşenlerine ayırma gereksinimine cevap vermekte, ve bu özelliğiyle kendi mantıksal kurgusuna uygun kuvvet kavramını oluşturmaktadır. Bu açıdan bakıldığında (2.4.36) denge koşulu da, kullanılan koordinat sistemine göre bütün kuvvet bileşenlerinin sıfıra eşit yazılmasından ibaret, beklenen bir sonuç olarak görünür.

(2.4.33) teki tanımlarından hemen görüleceği gibi Q_j genelleştirilmiş kuvvetleri her zaman kuvvet boyutunda değildir. q_j uzunluk boyutunda iken kuvvet boyutunda olan Q_j , q_j nin açı boyutunda olması halinde moment boyutunda olur. Böylece (2.4.35) deki $Q_j \delta q_j$ çarpımları her zaman enerji boyutunda kalır.

Virtüel işler ilkesi, özellikle çok sayıda ideal (ya da ideal kabul edilebilen) kısıt içeren mekanik sistemlerin, ki makinalar böyledir, statik incelemelerinde çok yararlı bir araç oluşturur.

Örnek Problem 2.4.1



Şekil Pr . 2.4.1

Sürtünmesiz olarak birbirine mafsallanmış, m kütlesine ve ℓ boyuna sahip n adet özdeş homojen çubuktan oluşan şekildeki zincir, bir ucu O noktasına asılı olarak diğer ucuna etkiyen yatay F kuvvetinin etkisinde dengede bulunmaktadır.

Bu dengede, k ıncı çubuğun düşeyle yapacağı φ_k açısını hesaplayınız.

Çözüm:

Mafsallarda sürtünme bulunmadığına göre sistem idealdir; kısıt kuvvetleri göz önüne alınmayacaktır. Ayrıca sistem holonomik ve n serbestlik derecelidir; n adet φ_i açısı esas genelleştirilmiş koordinat alınabilir. Verilmiş kuvvetler olan F kuvveti ve n adet çubuğun mg ağırlık kuvvetleri dikkate alınarak k ıncı genelleştirilmiş kuvvet (2.4.33) uyarınca

$$Q_k = F \cdot \frac{\partial x_A}{\partial \varphi_k} + \sum_{i=1}^{n} mg \cdot \frac{\partial y_{G_i}}{\partial \varphi_k} \qquad \text{(i)}$$

şeklinde yazılır. Burada şekil yardımıyla

$$x_A = \sum_{i=1}^{n} \ell \sin\varphi_i \qquad \text{(ii)}$$

$$y_{G_i} = \frac{\ell}{2}\cos\varphi_i + \sum_{j=i+1}^{n} \ell \cos\varphi_j \qquad \text{(iii)}$$

yazıldıktan sonra (ii) den

$$\frac{\partial x_A}{\partial \varphi_k} = \ell \cos\varphi_k \qquad \text{(iv)}$$

(iii) den de

$$\begin{aligned} i < k \quad \text{ise}: \quad & \frac{\partial y_{G_i}}{\partial \varphi_k} = -\ell \sin\varphi_k \\ i = k \quad \text{ise}: \quad & \frac{\partial y_{G_i}}{\partial \varphi_k} = -\frac{\ell}{2}\sin\varphi_k \\ i > k \quad \text{ise}: \quad & \frac{\partial y_{G_i}}{\partial \varphi_k} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(v)}$$

belirlenir. (iv) ve (v) ile (i) ye dönülürse

$$Q_k = F \cdot \ell \cos\varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} mg \cdot \ell \sin\varphi_k - mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi_k \qquad \text{(vi)}$$

veya toparlayıp (2.4.36) uyarınca sıfıra eşitleyerek

$$Q_k = F \cdot \ell \cos\varphi_k - (k - \tfrac{1}{2})mg\ell \sin\varphi_k = 0 \qquad \text{(vii)}$$

elde edilir. Buradan artık φ_k kolayca

$$\varphi_k = \tan^{-1} \frac{2F}{(2k-1)mg} \qquad \text{(viii)}$$

şeklinde hesaplanır.

2.4.4 D'ALEMBERT İLKESİ

D'Alembert İlkesi dinamik problemlerinin biçimsel olarak statik problemlerine dönüştürülmesini sağlayan bir ilkedir. İlkeye esas oluşturan temel fikirler d'Alembert[1] tarafından ortaya konmakla birlikte, bu fikirleri virtüel işler ilkesinin temel fikirleriyle birlikte bir senteze ulaştırarak dinamiğin temel ilkelerinden biri haline getiren Lagrange olmuştur.

Newton'un İkinci Hareket Yasası'na göre m kütlesine sahip bir maddesel nokta, hareketinin herhangi bir t anında **F** kuvvetinin etkisi altında ve $\ddot{\mathbf{r}}$ mutlak ivmesine sahip olacak biçimde hareket ediyorsa

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \tag{2.4.37}$$

eşitliğinin geçerli olduğu bilinmektedir. Bölüm 2.1.2.3'ün içeriğinden ise, $\mathbf{F}_e = -m\ddot{\mathbf{r}}$ kurgusal eylemsizlik kuvvetinin devreye sokulmasıyla, bunun yerine

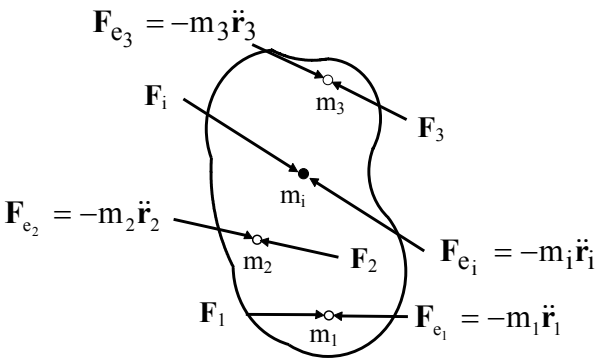
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \tag{2.4.38}$$

ya da $\mathbf{F}_e$'nin ifadesi yerine konularak

$$\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \tag{2.4.39}$$

yazılabileceği bunun da, m cisminin, kendisiyle birlikte hareket ettiği varsayılan hayali bir eksen takımındaki statik denge koşulu olarak yorumlanabileceği bilinmektedir. Bu yoruma göre her cisim, kendisiyle birlikte hareket eden bir eksen takımında, **F** gerçek ve $\mathbf{F}_e$ kurgusal kuvvetlerinin toplam etkisi altında statik denge halinde bulunur.

Bu fikir m_i maddesel noktalarının oluşturduğu bir bütün olarak düşünülen bir mekanik sisteme uygulanırsa (Şekil 2.4.7)



Şekil 2.4.7 D'Alembert İlkesi

[1] Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) Fransız matematikçi, fizikçi ve düşünürü. *Traité de Dynamique* (1743) adlı yapıtında özellikle Newton İlkelerinin rijid cisimlere uygulanmasına ilişkin fikirleri geliştirdi, tellerin titreşimi probleminin kendi adını taşıyan çözümünü verdi. Diderot ile birlikte fransız aydınlanma hareketinin öncülüğünü yaptı, ünlü *Ansiklopedi*'nin önsözünü ve bir çok maddesini kaleme aldı.

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{0} \tag{2.4.40}$$

elde edilir. İstenirse (2.4.40) ın temsil ettiği kurgusal statik denge problemine virtüel işler ilkesi uygulanarak

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2.4.41}$$

da yazılabilir. Buradaki $\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ büyüklükleri teker teker sıfıra eşit olduğundan bu ilginç bir sonuç değildir. Ancak Bölüm 2.4.3 te yapıldığı gibi $\mathbf{F}_i$ kuvvetleri

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^v + \mathbf{F}_i^k \tag{2.4.42}$$

şeklinde, verilmiş kuvvet ve kısıt kuvveti bileşenlerine ayrılarak düşünülür ve inceleme ideal kısıtlara sahip sistemlerle sınırlandırılırsa, virtüel işleri toplamı sıfır olan kısıt kuvvetleri problemden düşer ve

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^v - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\delta\mathbf{r}_i = 0 \tag{2.4.43}$$

sonucuna ulaşılır. Lagrange tarafından formüle edilen bu sonuç, yine onun tarafından d'Alembert İlkesi diye adlandırılan sonuçtur. D'Alembert ilkesi kelimelerle

İdeal kısıtlara sahip her mekanik sistem, üzerine etkiyen verilmiş gerçek kuvvetlerle kurgusal eylemsizlik kuvvetlerinin virtüel işleri toplamı, hareketinin her t anında ve olası bütün virtüel yer değiştirmelerde sıfır olacak biçimde hareket eder.

şeklinde ifade edilebilir.

2.4.5 HAREKETİN LAGRANGE DENKLEMLERİ

Lagrange, d'Alembert ilkesinden yola çıkarak, her türlü mekanik sistemin hareket denklemlerini genelleştirilmiş kordinatlar uzayında elde etmenin sistematik bir yolunu ortaya koymuştur. Burada bu yolun ana hatlarını gözden geçireceğiz.

2.4.5.1 Genel

f serbestlik dereceli bir mekanik sistem göz önüne alınsın ve bu sistemin konumunun $n \geq f$ adet $q_1, q_2, ..., q_n$ genelleştirilmiş koordinatıyla tanımlandığı düşünülsün. Bu durumda sistemin herhangi bir i inci noktasının yer vektörü bu n genelleştirilmiş koordinatla, reonomik sistemler halinde, t zamanının fonksiyonu olarak ifade edilebilecektir:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, .., q_n; t) \tag{2.4.44}$$

Buna göre bu noktanın virtüel yer değiştirmesi de (2.4.20) deki gibi

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{2.4.45}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin, ideal kısıtlara sahip sistemlerin hareketlerini yönettiği bilinen (2.4.43) de yerine konulmasıyla ve $\mathbf{F}_i$ nin yalnız verilmiş kuvvetleri içereceği akılda tutulmak kaydıyla v üst indisi artık kaldırılarak

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right] . \delta q_j = 0 \tag{2.4.46}$$

elde edilir. Burada da (2.4.33) deki

$$\sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j \tag{2.4.47}$$

genelleştirilmiş kuvvet tanımı anımsanırsa

$$\sum_{j=1}^{n} \left[Q_j - \left(\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) \right] \delta q_j = 0 \tag{2.4.48}$$

yazılabilir. Öte yandan, (2.4.48) deki i ye göre toplam altındaki terimin, T sistemin toplam kinetik enerjisini göstermek üzere

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \tag{2.4.49}$$

şeklinde yazılabileceği gösterilebilir. Bu amaçla

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \tag{2.4.50}$$

yazılırsa, buradan hemen

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{2.4.51}$$

elde edilir. Oysa (2.4.44) e göre

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{2.4.52}$$

olacağına dikkat edilip, (2.4.52) den doğrudan doğruya kısmi türev alınırsa

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{2.4.53}$$

bulunur. (2.4.53) ün (2.4.51) de yerine konulmasıyla

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{2.4.54}$$

elde edilmiş olur. Buradan zamana göre türev alınırsa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{2.4.55}$$

ya da son terim için (2.4.52) yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \tag{2.4.56}$$

yazılarak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \tag{2.4.57}$$

elde edilir. Burada da (2.4.50) den

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \tag{2.4.58}$$

olduğuna dikkat edilirse (2.4.49) eşitliği kanıtlanmış olur.

Sonuçta (2.4.49) eşitliği (2.4.48) de yerine konularak

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right\}\delta q_j = 0 \tag{2.4.59}$$

elde edilir.

Buraya kadar q_j genelleştirilmiş koordinatlarının, dolayısıyla da δq_j virtüel yer değiştirmelerinin birbirinden bağımsız olmalarını sağlayacak bir kabul devreye sokmadığımız için (2.4.59) da δq_j lerin çarpanlarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması gereği yoktur. Şimdi bunu gerektiren bir özel hali ele alalım.

2.4.5.2 Holonomik Sistemlerde Lagrange Denklemleri

f serbestlik dereceli holonomik bir sistemde konumun birbirinden bağımsız f adet genelleştirilmiş koordinatla tanımlanabileceğini biliyoruz. Böyle yapılmış olması halinde (2.4.59) un sağlanabilmesi için δq_j lerin çarpanlarının ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesi gerekir ve holonomik sistemler özelinde geçerli olan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad ; \; j=1,2,\ldots,f \tag{2.4.60}$$

hareket denklemlerine ulaşılır. ($T \equiv 0$ özel halinde bu denklemlerin (2.4.36) daki statik denge denklemlerine indirgendiğine dikkat ediniz.)

Öte yandan, Q_j genelleştirilmiş kuvvetleri arasında korunumlu kuvvetlerin de bulunması halinde (2.4.60) denklemlerine yeni bir şekil de verilebilir. Böyle bir durumda Q_j genelleştirilmiş kuvveti, korunumsuz Q_j' ve korunumlu Q_j'' kısımlarının toplamı şeklinde yazılmış olsun:

$$Q_j = Q_j' + Q_j'' \tag{2.4.61}$$

Korunumlu kuvvetlerin tanımı gereği (Bkz. Bölüm 2.1.2.2), bu kuvvetlerin kendinden türetilebileceği, konumun fonksiyonu olan, $V(q_1, q_2, ..., q_f)$ şeklinde bir potansiyel enerji fonksiyonu bulunmalı ve kuvvetin her bir q_j genelleştirilmiş koordinatına ilişkin bileşeni

$$Q_j'' = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad ; \quad j=1,2,\ldots,f \tag{2.4.62}$$

şeklinde hesaplanabilmelidir. Öte yandan potansiyel enerji hızlardan bağımsız olduğundan

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad ; \quad j=1,2,\ldots,f \tag{2.4.63}$$

olacağı ortadadır. (2.4.61-63) eşitliklerinin (2.4.60) da değerlendirilmesiyle

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right\} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = Q_j' \quad ; \; j=1,2,\ldots,f \tag{2.4.64}$$

yazılabileceği anlaşılır. Burada da *Lagrange fonksiyonu* diye adlandırılan

$$L=T-V \tag{2.4.65}$$

fonksiyonu tanımlanırsa, sonuç olarak

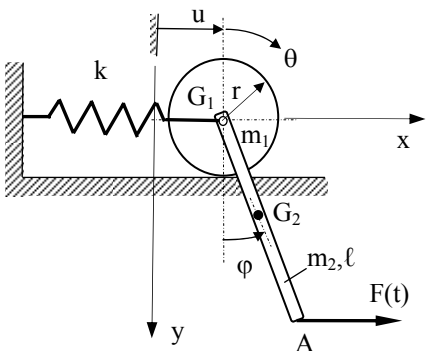
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right\} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j' \quad ; \; j=1,2,\ldots,f \tag{2.4.66}$$

elde edilir. Bu denklemler hareketin *Lagrange Denklemleri* adıyla bilinir.

Burada ideal kısıtlara sahip holonomik sistemlere özgü halini vermekle yetindiğimiz Lagrange denklemleri, her tür mekanik sistemin hareketini tasvir etmekte kullanılabilen güçlü ve zarif bir araç oluşturur. Bu aracın başlıca üstünlüğü, vektörel mekanikte önce hesaba katılıp sonra hesaptan düşürülen kısıt kuvvetlerini daha işin başlangıcında devre dışı bırakmasıdır. Ancak hesaplanmak istenenin doğrudan doğruya kısıt kuvvetleri olması halinde bunun bir üstünlük olmaktan çıkıp bir zaafa dönüşebileceğinin de belirtilmesi gerekir.

Burada son bir küçük not olarak şunu da belirtelim ki (2.4.65) bağıntısıyla tanımlanan Lagrange fonksiyonu, en sistematik ve basit yoldan elde edilen Lagrange fonksiyonu olmakla birlikte verilmiş bir sistem için yazılabilecek tek Lagrange fonksiyonu değildir. Her sistem için, (2.4.66) da yerine konulduğunda (2.4.65) dekiyle aynı sonucu verecek bir çok Lagrange fonksiyonu bulunabilir.

Örnek Problem 2.4.2



Şekil Pr . 2.4.2

Şekildeki sistemde, k yayına bağlı m_1,r homojen silindiri yatay düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanarak u(t) hareketini yaparken, ona sürtünmesiz olarak mafsallı, ince, düzgün kesitli, homojen m_2,ℓ çubuğu da yatay F(t) kuvvetinin etkisinde φ(t) salınımları yapmaktadır.

Sistemin hareketinin Lagrange denklemlerini elde ediniz.

Çözüm:

İki serbestlik dereceli, ideal, holonomik bir sistem söz konusudur (Bu belirlemeleri doğrulayınız). Önce sistemin kinetik enerjisi ifade edilsin:

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 v_{G_1}^2 + \left(\frac{1}{2}m_1 r^2\right)\cdot\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}\left[m_2 v_{G_2}^2 + \left(\frac{1}{12}m_2\ell^2\right)\cdot\dot{\varphi}^2\right]. \qquad \text{(i)}$$

Burada

$$v_{G_1} = \dot{u}, \qquad \text{(ii)}$$

$v_{G_2}^2 = \dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2$ bağıntısından, $x_{G_2} = u + \frac{\ell}{2}\sin\varphi \rightarrow \dot{x}_{G_2} = \dot{u} + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\dot{\varphi}$ ve $y_{G_2} = \frac{\ell}{2}\cos\varphi \rightarrow \dot{y}_{G_2} = -\frac{\ell}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}$ ile yazılan

$$v_{G_2}^2 = \dot{u}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \ell\cos\varphi\dot{u}\dot{\varphi}, \qquad \text{(iii)}$$

ve silindirin kaymadan yuvarlanma kısıtından yazılan

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{u}}{r} \tag{iv}$$

yerlerine konur ve sonuç düzenlenirse

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\dot{u}^2 + \frac{1}{3}m_2\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_2\ell\cos\varphi\dot{u}\dot{\varphi}\right] \tag{v}$$

bulunur. Şimdi de potansiyel enerji ifade edilmek istenirse,

$$V = \frac{1}{2}ku^2 - \frac{1}{2}m_2 g\ell\cos\varphi \tag{vi}$$

yazılabilir. Böylece sisteme ait Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\dot{u}^2 + \frac{1}{3}m_2\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_2\ell\cos\varphi\dot{u}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}m_2 g\ell\cos\varphi\right] \tag{vii}$$

şeklinde bulunmuş olur. Buradaki u ve φ, 2 serbestlik dereceli olan sistem için seçtiğimiz esas genelleştirilmiş koordinatlardır. Öte yandan, sisteme etkiyen korunumsuz tek kuvvet olan F(t), (2.4.33) uyarınca genelleştirilmiş kuvvet bileşenlerine ayrılırsa

$$Q'_u = F(t)\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial u} = F(t)\mathbf{i}\cdot\frac{\partial[(u+\ell\sin\varphi)\mathbf{i}+\ell\cos\varphi\mathbf{j}]}{\partial u} = F(t) \tag{viii}$$

$$Q'_\varphi = F(t)\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \varphi} = F(t)\mathbf{i}\cdot\frac{\partial[(u+\ell\sin\varphi)\mathbf{i}+\ell\cos\varphi\mathbf{j}]}{\partial \varphi} = F(t)\ell\cos\varphi \tag{ix}$$

elde edilir. Artık yapılması gereken, (2.4.65) ten q_1=u ve q_2=φ koordinatları için gerekli hesapların yapılmasından ibarettir. Önce u koordinatı ele alınırsa,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right\} - \frac{\partial L}{\partial u} = Q'_u \tag{x}$$

denklemi yazılır. Burada (vii) göz önüne alınarak,

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -ku \tag{xi}$$

ve

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\dot{u} + \frac{1}{2}m_2\ell\cos\varphi\dot{\varphi}, \tag{xii}$$

buradan zamana göre tam türev alarak da

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right\} = \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{u} - \frac{1}{2}m_2\ell\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\ell\cos\varphi\ddot{\varphi} \tag{xiii}$$

hesaplanır. (viii), (xi) ve (xiii) ün (x) da yerlerine konulmasıyla

$$\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{u} + \frac{1}{2}m_2\ell\left(\cos\varphi\ddot{\varphi} - \sin\varphi\dot{\varphi}^2\right) + ku = F(t) \qquad \text{(xiv)}$$

elde edilir. Benzer hesapların φ koordinatı için yinelenmesiyle de

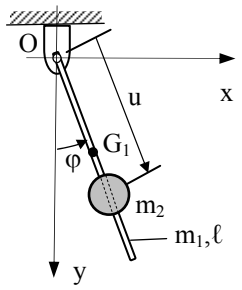
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right\} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q'_\varphi \qquad \text{(xv)}$$

den,

$$\frac{1}{3}m_2\ell^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2\ell\left(\ddot{u}\cos\varphi + g\sin\varphi\right) = F(t)\ell\cos\varphi \qquad \text{(xvi)}$$

bulunur. (xiv) ve (xvi), hareketin, aranan Lagrange denklemleridir.

Örnek Problem 2.4.3



Şekil Pr . 2.4.3

Şekildeki sistemde, ince, düzgün kesitli, homojen m_1,ℓ çubuğu sürtünmesiz O mafsalından asılı olarak φ(t) salınımlarını yaparken, m_2 maddesel noktası da çubuk boyunca sürtünmesiz olarak kayarak u(t) hareketini yapmaktadır.

Sistemin hareketinin Lagrange denklemlerini elde ediniz.

Çözüm:

Sistem iki serbestlik dereceli, ideal, holonomik bir sistemdir. Sistemin kinetik enerjisi ifade edilmek istenirse,

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 v_{G_1}^2 + \left(\frac{1}{12}m_1\ell^2\right)\cdot\dot{\varphi}^2\right] + \frac{1}{2}m_2 v_{G_2}^2 \qquad \text{(i)}$$

yazılıp, burada

$$v_{G_1} = \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}, \qquad \text{(ii)}$$

ve $v_{G_2}^2 = \dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2$ bağıntısından, $x_{G_2} = u\sin\varphi \rightarrow \dot{x}_{G_2} = \dot{u}\sin\varphi + u\cos\varphi\dot{\varphi}$ ve $y_{G_2} = u\cos\varphi \rightarrow \dot{y}_{G_2} = \dot{u}\cos\varphi - u\sin\varphi\dot{\varphi}$ ile yazılan

$$v_{G_2}^2 = \dot{u}^2 + u^2\dot{\varphi}^2 \qquad \text{(iii)}$$

yerlerine konulursa

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1\ell^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{u}^2 + u^2\dot{\varphi}^2\right) \qquad \text{(iv)}$$

bulunur. Potansiyel enerji için ise kolayca,

$$V = -m_1 g \frac{\ell}{2} \cos\varphi - m_2 g u \cos\varphi \qquad \text{(v)}$$

yazılabilir. Böylece sisteme ait Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_1 \ell^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{u}^2 + u^2 \dot{\varphi}^2\right) + \left(m_1 \frac{\ell}{2} + m_2 u\right) g \cos\varphi \qquad \text{(vi)}$$

şeklinde bulunmuş olur. Artık (2.4.65) ten $q_1=\varphi$ ve $q_2=u$ koordinatları için, sisteme herhangi bir korunumsuz kuvvet etkimediğine göre $Q'_u = 0$, $Q'_\varphi = 0$ olacağına da dikkat edilerek gerekli hesaplar yapılırsa,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right\} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{(vii)}$$

dan

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m_1 \ell^2 \dot{\varphi} + m_2 u^2 \dot{\varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right\} = \left(\frac{1}{3} m_1 \ell^2 + m_2 u^2\right)\ddot{\varphi} + 2 m_2 u \dot{u} \dot{\varphi} \qquad \text{(viii)}$$

ve

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\left(m_1 \frac{\ell}{2} + m_2 u\right) g \sin\varphi$$

ile

$$\left(\frac{1}{3} m_1 \ell^2 + m_2 u^2\right)\ddot{\varphi} + 2 m_2 u \dot{u} \dot{\varphi} + \left(m_1 \frac{\ell}{2} + m_2 u\right) g \sin\varphi = 0 \qquad \text{(ix)}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right\} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \qquad \text{(x)}$$

dan ise, gerekli hesaplar yapılarak

$$\ddot{u} - u\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi = 0 \qquad \text{(xi)}$$

bulunur. (ix) ve (xi) hareketin Lagrange denklemleridir.

3. TEK SERBESTLİK DERECELİ DÜZLEMSEL MAKİNALARIN STATİK DENGESİ

3.1 GENEL

Genel olarak bir makinanın görevi kuvvet ve hareket ileterek bir dirence karşı yararlı iş yapmak olmakla birlikte, kaldırma ve taşıma makinaları gibi kimi makinalarda, görevin, hareket etmeksizin bir direnç kuvvetinin dengede tutulması şeklindeki evrelerine de rastlanır. Yine kimi makinaların görevleri, çok büyük direnç kuvvetlerine karşı çok küçük hız ve ivmelerle çalışmalarını gerektirir. Bu gibi makinaların hareketlerinin incelenmesi gerektiğinde, hareketi göz ardı ederek, probleme, söz konusu direnç kuvvetlerinin çeşitli konumlarda dengede tutulmasına ilişkin bir dizi statik denge problemi gözüyle bakılması uygun bir ilk yaklaşıklık oluşturur.

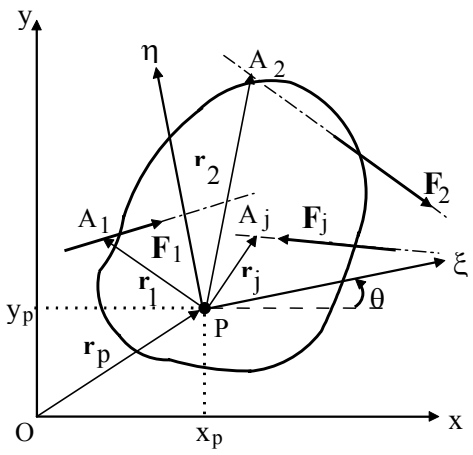
Bu gibi durumlarda makinaların statik dengesi problemiyle karşı karşıya kalınır. Bu problemin çözümünde baş vurulabilecek en uygun araç virtüel işler ilkesidir. Virtüel işler ilkesi, amacın bizzat bu kuvvetlerin hesaplanması olmadığı problemlerde, makinalarda çok sayıda olan kısıt kuvvetlerini devre dışı bırakarak etkili olur.

Bu bölümde, virtüel işler ilkesinin rijid uzuvlardan oluşan, tek serbestlik dereceli, düzlemsel, holonomik, skleronomik ve ideal kısıtlara sahip makinaların statik denge problemine uygulanışı ele alınacaktır.

3.2 VİRTÜEL İŞLER İLKESİNİN MAKİNALARA UYGULANMASI

3.2.1 DÜZLEMSEL HAREKET YAPAN BİR RİJİD CİSME ETKİYEN KUVVETLER SİSTEMİNİN VİRTÜEL İŞLER TOPLAMI

Düzlemsel makina diye, bütün uzuvları düzlemsel hareket yapan makinalara denir. Bu nedenle, rijid uzuvlu düzlemsel makinalara virtüel işler ilkesini uygulamaya geçmeden önce, buna hazırlık olmak üzere, düzlemsel hareket yapan bir rijid cisme etkiyen kuvvetlerin virtüel işlerinin hesaplanması konusuna kısaca değinmek yerinde olacaktır. Bu amaçla, Şekil 3.2.1 deki, Oxy düzlemi içerisinde hareket eden rijid cisim göz önüne alınsın ve bu cismin, hareket düzlemi üzerindeki izdüşümleri $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2,\ldots,\mathbf{F}_j,\ldots$ olarak bilinen bir dizi kuvvetin etkisi altında bulunduğu düşünülsün. Rijid cisimlere etkiyen kuvvetlerin kayan vektörler oldukları, yani etki çizgileri boyunca kaydırılmalarının etkilerini farklılaştırmadığı bilindiğine göre her kuvvetin etki çizgisi üzerinde keyfi bir A_j noktası bu kuvvetin uygulama noktası olarak seçilsin. Bu durumda cisme etkiyen kuvvetler sisteminin toplam virtüel işi için



Şekil 3.2.1 Rijid Cisme Etkiyen Kuvvetler Sistemi

$$\delta W = \sum_j \mathbf{F}_j \delta \mathbf{r}_{A_j} \tag{3.2.1}$$

yazılabilir. Oysa düzlemsel hareket yapan rijid cismin serbestlik derecesi üç olduğuna ve konumu x_P, y_P (veya $\mathbf{r}_P$) ve θ koordinat üçlüsü ile tanımlanabileceğine göre bütün $\delta \mathbf{r}_{A_j}$ ler δx_P, δy_P (veya $\delta \mathbf{r}_P$) ve $\delta\theta$ cinsinden belirli olmalıdır. Gerçekten de $\mathbf{r}_{A_j} = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_j \rightarrow d\mathbf{r}_{A_j} = d\mathbf{r}_P + d\mathbf{r}_j \rightarrow d\mathbf{r}_{A_j} = d\mathbf{r}_P + d\theta \mathbf{k} \times \mathbf{r}_j$ şeklinde hesap yapılırsa

$$\delta \mathbf{r}_{A_j} = \delta \mathbf{r}_P + (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_j)\delta\theta \tag{3.2.2}$$

olduğu görülür. (3.2.2) eşitliği (3.2.1) de yerine konulduğunda

$$\delta W = (\sum_j \mathbf{F}_j)\delta \mathbf{r}_P + (\sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j) \cdot \mathbf{k}\delta\theta \tag{3.2.3}$$

elde edilir[1]. Buradaki ilk terimdeki toplam, kuvvetler sisteminin **F** bileşkesinden, ikinci terimdeki toplam ise sistemin P den geçen, **k** ya koşut eksene göre toplam momenti $\mathbf{M}^P$ den başka bir şey değildir:

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j \quad , \quad \mathbf{M}^P = M^P \mathbf{k} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j \tag{3.2.4}$$

Böylece, cisme etkiyen kuvvetler sisteminin virtüel işler toplamı için (3.2.3) yerine

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_P + M^P \delta\theta = F_x \delta x_P + F_y \delta y_P + M^P \delta\theta \tag{3.2.5}$$

yazılabileceği görülür. Buradan, bir rijid cisme etkiyen bir kuvvetler sisteminin virtüel işler toplamı hesaplanmak istendiğinde bu sistemi oluşturan tüm kuvvetlerin teker teker ele alınmasına gerek bulunmadığı; keyfi bir P noktasına etkitilecek

[1] Burada vektör karışık çarpımının **a**.(**b**x**c**) = (**a**x**b**).**c** = (**c**x**a**).**b** özelliği dikkate alınmıştır.

bileşkenin ve P ye göre toplam momentin dikkate alınmasının yeterli olacağı anlaşılmaktadır.

Bu sonuç, aslında, rijid cisimlere etkiyen bir kuvvetler sisteminin indirgenmesiyle ilgili iyi bilinen bir kuralın doğrulanmasından başka bir şey değildir. Bu kurala göre rijid cisme etkiyen bir kuvvetler sistemi, cismin keyfi seçilecek bir P noktasına etkiyen bileşke kuvvet ile momenti sistemin P ye göre toplam momentine eşit bir kuvvet çiftiyle eşdeğer olarak temsil edilebilir. Buna kuvvet sisteminin P noktasına indirgenmesi denir.

Bu bilginin, aynı rijid cisme etkiyen bir çok kuvvetin virtüel işleri toplamının hesaplanmasında büyük kolaylık sağlayacağı; keyfi olan P indirgeme noktasının uygun seçilmesiyle bu kolaylığın daha da arttırılabileceği açıktır.

3.2.2 MAKİNALARIN DENGESİ

Rijid uzuvlara ve ideal kısıtlara sahip düzlemsel bir makinanın denge koşulu virtüel işler ilkesi yardımıyla yazılmak istenirse, δW_i makinanın i numaralı hareketli uzvuna etkiyen kuvvetlerden kısıt kuvvetleri dışında kalanların (3.2.5) teki gibi hesaplanan virtüel işleri toplamını göstermek üzere

$$\delta W = \sum_i \delta W_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_{P_i} + M_i^P \cdot \delta\theta_i = 0 \qquad (3.2.6)$$

yazılabilir. Makina tek serbestlik dereceli ve holonomik olduğuna göre konum tek bir q esas genelleştirilmiş koordinatıyla, virtüel yer değiştirme de δq ile tanımlanabilmelidir. Bu ise $\delta \mathbf{r}_P$ ile $\delta\theta_i$ nin δq cinsinden ifade edilmesini gerektirir. Mekanizmaların kinematiğinden, gerçekten de

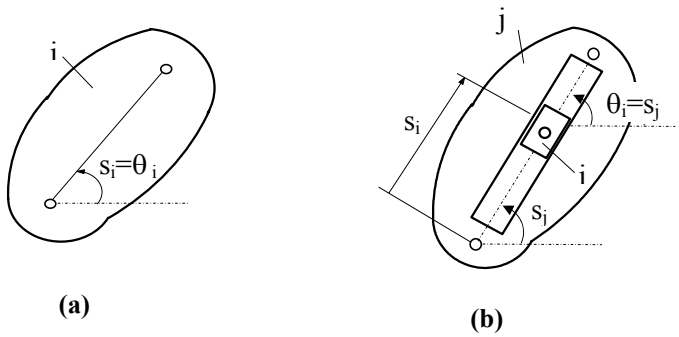
$$\delta \mathbf{r}_{P_i} = \mathbf{g}'_{P_i}(q)\delta q \qquad (3.2.7)$$

yazılabileceği bilinmektedir. $\delta\theta_i$ için de

$$\delta\theta_i = g'_{\theta_i}(q)\delta q \qquad (3.2.8)$$

yazalım. i inci uzvun konumunu tanımlamak üzere seçilen s_i ikincil koordinatının açısal bir koordinat olması halinde $\theta_i = s_i \rightarrow \delta\theta_i = \delta s_i \rightarrow g'_{\theta_i} = g'_i$ olacağı (Şekil 3.2.2-a); bu uzvun hareketi dönme de içermekle birlikte konumunu göstermekte çizgisel bir s_i koordinatı kullanılmış olması halinde ise uzvun, dönmesini paylaştığı bir başka uzuv (j inci uzuv diyelim) bulunacağı ve $\theta_i = s_j \rightarrow \delta\theta_i = \delta s_j \rightarrow g'_{\theta_i} = g'_j$ olacağı (Şekil 3.2.2-b) açıktır. Bu açıklamadan sonra (3.2.7) ve (3.2.8) eşitlikleriyle (3.2.6) ya dönülürse, mekanizmanın statik denge koşulu olarak

$$\sum_i \left[\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{g}'_{P_i}(q) + M_i^P \cdot g'_{\theta_i}(q)\right] = 0 \qquad (3.2.9)$$



Şekil 3.2.2 Uzvun Dönmesi

elde edilir. Mekanizmanın konum analizinin analitik yoldan gerçekleştirilip hız katsayılarının kapalı formda elde edilmiş olması halinde statik denge koşulu da (3.2.9) denkleminden q konumunun fonksiyonu olarak elde edilir. Buna karşılık konum analizinin ancak belli q* konumları için sayısal yoldan gerçekleştirilebilmesi halinde denge koşulu da ancak ilgili q* konumları için elde edilebilir. Öte yandan, skleronomik makinalarda (3.2.9) da kullanılan hız katsayılarının, $\omega_i = \dot{\theta}_i$ gösterilimiyle

$$\mathbf{g}'_{P_i} = \frac{\mathbf{v}_{P_i}}{\dot{q}} \quad , \quad g'_{\theta_i} = \frac{\omega_i}{\dot{q}} \tag{3.2.10}$$

eşitliklerini sağladıkları anımsanırsa bu denklem yerine

$$\sum_i \left[\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_{P_i}(q) + M_i^P \cdot \omega_i(q)\right] = 0 \tag{3.2.11}$$

de yazılabileceği görülür. (3.2.11) denklemi, skleronomik makinaların statik denge koşulunun yazılmasında keyfi bir $\dot{q}$ esas genelleştirilmiş hızına karşılık gelen hız çözümlemesi sonuçlarının da kullanılabileceğini göstermektedir.

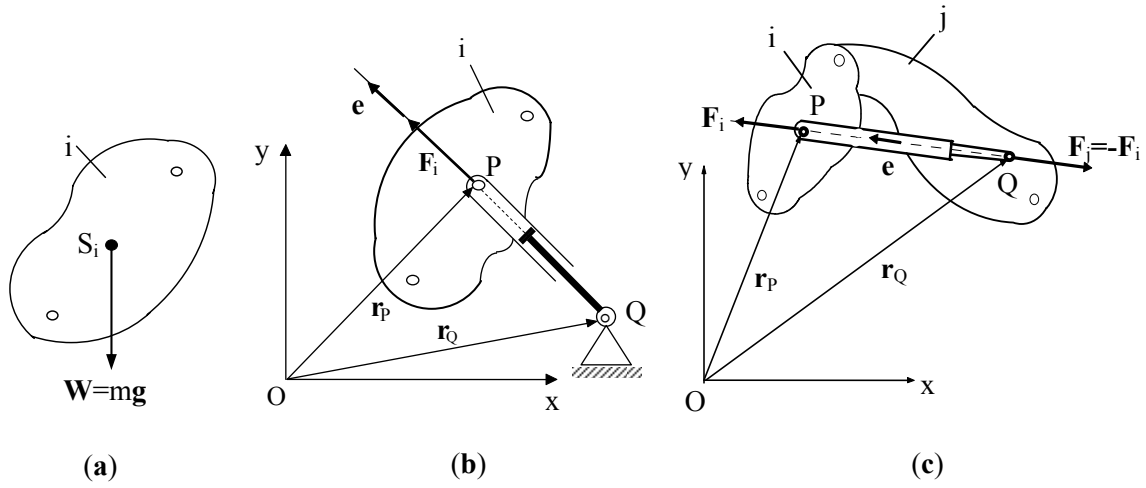
Bu noktada, kısaca, makina uzuvlarına etkiyen kuvvetlerin birer vektör olarak ifade edilişi üzerinde durulması yerinde olacaktır. Şiddetlerini gösteren bir F skaleri ve etki doğrultularını gösteren bir **e** birim vektörü yardımıyla bu kuvvetler genel olarak

$$\mathbf{F} = F\mathbf{e} \tag{3.2.12}$$

şeklinde ifade edilirler. Buradaki F skaleri bilinen ya da hesaplanmak istenen bir büyüklük olabilir. Bizim burada üzerinde durmak istediğimiz, asıl, **e** birim vektörüdür.

Uzuvlara etkiyen ağırlık kuvvetleri örneğinde olduğu gibi (Şekil 3.2.3-a) kimi kuvvetler sabit (makinanın q konumundan bağımsız) ve verilmiş bir etki doğrultusuna sahiptir:

$$\mathbf{e}=\text{sabit} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial q} = 0 \tag{3.2.13}$$



Şekil 3.2.3 Makina Uzuvlarına Etkiyen Kuvvetlerin Etki Doğrultuları

Bu durumda **e** nin belirlenmesi için ek bir gayret gerekmez. Ancak kimi kuvvetler de mekanizmanın i inci uzvunun bir P noktasına, öbür ucu bir Q noktasına bağlı bir kuvvet uygulama elemanı (halat, hidrolik silindir vb.) yardımıyla uygulanırlar (Şekil 3.2.3-b,c). Böyle durumlarda kuvvetin **QP** etki doğrultusu, genellikle, makinanın q konumuna bağlı olarak değişir:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(q) = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|} = \frac{(x_P - x_Q)\mathbf{i} + (y_P - y_Q)\mathbf{j}}{\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}} \qquad (3.2.14)$$

Bu değişim, Q ucu sabit bir noktaya bağlı elemanlar (Şekil 3.2.3-b) halinde $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(q)$ oluşundan; Q ucu da makinanın bir başka j inci uzvuna bağlı elemanlar (Şekil 3.2.3-c) halinde ise hem $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(q)$ hem $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_Q(q)$ oluşundan kaynaklanır. Bu durumlarda ilkin makinanın konum çözümlemesinin yapılması, sonra da **e** nin (3.2.14) ten hesaplanması gerekir.

Öte yandan, Şekil 3.2.3-a ve b deki kuvvetler makina için birer dış kuvvet iken Şekil 3.2.3-c deki kuvvet bir iç kuvvet oluşturur. Böyle iç kuvvetlerin söz konusu olduğu durumlarda j inci uzvun i inciye etkisi olan $\mathbf{F}_i = F\mathbf{e}$ kuvvetinin yanısıra i incinin j inciye tepkisi olan ve Newton'un üçüncü hareket yasası dolayısıyla $\mathbf{F}_j = -\mathbf{F}_i$ eşitliğini sağlayan kuvvetin de statik denge hesabında dikkate alınması gerekir. Bu ise (3.2.6) statik denge denkleminde

$$\delta W' = \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_{P_i} + \mathbf{F}_j \cdot \delta\mathbf{r}_{Q_j} = F\mathbf{e} \cdot (\delta\mathbf{r}_{P_i} - \delta\mathbf{r}_{Q_j}) = F\mathbf{e} \cdot \delta(\mathbf{r}_{P_i} - \mathbf{r}_{Q_j}) \qquad (3.2.15)$$

şeklinde bir terimin hesaba katılmasını gerektirir. Bu terimin hemen ortaya koyduğu bir özellik olarak, makinalarda edimli (aktif) iç kuvvetler, etkileşim halindeki makina noktalarının bağıl virtüel yer değiştirmesi ile orantılı virtüel iş yaparlar.

3.2.3 GENELLEŞTİRİLMİŞ KUVVET

Bölüm 2.4.3 ün içeriğinden, f serbestlik dereceli holonomik sistemlerde statik dengenin gerek ve yeter koşulunun Q_j j inci genelleştirilmiş koordinata ilişkin genelleştirilmiş kuvveti göstermek üzere $Q_j = 0$; j=1,2,…,f şeklinde yazılabileceği bilinmektedir. Bu bilgi, tek serbestlik dereceli holonomik makinaların statik denge koşulunu ifade eden (3.2.9) ile birlikte değerlendirildiğinde, bu makinalarda q esas genelleştirilmiş koordinatına ilişkin genelleştirilmiş kuvvetin

$$Q(q) = \sum_i \left[\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{g}'_{P_i}(q) + M_i^P \cdot g'_{\theta_i}(q) \right] \tag{3.2.16}$$

ya da, skleronomik makinalarda, (3.2.10) bağıntıları kullanılarak

$$Q(q) = \sum_i \left[\mathbf{F}_i \cdot \frac{\mathbf{v}_{P_i}(q)}{\dot{q}} + M_i^P \cdot \frac{\omega_i(q)}{\dot{q}} \right] \tag{3.2.17}$$

şeklinde ifade edilebileceği anlaşılır. (3.2.16) bağıntısında yer alan hız katsayılarının q konumunun fonksiyonu olduğu makinalarda genelleştirilmiş kuvvet de konumun bir fonksiyonu olacaktır.

Fiziksel anlam olarak genelleştirilmiş kuvvet, konumu q esas genelleştirilmiş koordinatı ile tanımlanan uzva uygulandığında makinaya etkiyen bütün kuvvetlerin toplam etkisine denk etki yaratacak kuvveti temsil etmektedir. Bu anlamda bazen Q ye *q koordinatına indirgenmiş eşdeğer kuvvet* de denir. Kuvvet diye adlandırılmakla birlikte Q nün her zaman kuvvet boyutunda olmadığına; q koordinatı çizgisel bir koordinat iken kuvvet boyutunda olan Q nün, q açısal bir koordinat iken moment boyutunda olacağına dikkat ediniz.

Genelleştirilmiş kuvvet kavramı makinaların statiğinde olduğu gibi dinamiğinde de önemli bir yer tutar.

3.2.4 MEKANİK KAZANÇ . MEKANİĞİN ALTIN KURALI

Amacı bir $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_P$ kuvvetini bir $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_F$ kuvveti yardımıyla dengede tutmak olan bir makinada, başarının bir ölçüsünü oluşturan

$$\eta = \frac{P}{F} \tag{3.2.18}$$

oranına *mekanik kazanç* adı verilir. **P** ve **F** nin uygulanma noktalarının hız katsayısı vektörlerine, sırasıyla, $\mathbf{g}'_P(q)$ ve $\mathbf{g}'_F(q)$ denilirse anılan denge (3.2.9) dan

$$F\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{g}'_F(q) + P\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{g}'_P(q) = 0 \tag{3.2.19}$$

şeklinde yazılabileceğine göre mekanik kazancın

$$\eta(q) = \left|\frac{\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{g}'_F(q)}{\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{g}'_P(q)}\right| \tag{3.2.20}$$

şeklinde ifade edilebileceği; ya da skleronomik sistem halinde (3.2.11) den

$$F\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{v}_F(q) + P\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{v}_P(q) = 0 \tag{3.2.21}$$

yazılabileceğine dikkat edilirse

$$\eta(q) = \left|\frac{\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{v}_F(q)}{\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{v}_P(q)}\right| \tag{3.2.22}$$

olacağı anlaşılır. Bazı basit makinalar dışında mekanik kazanç makinanın q konumuna bağlı olarak değişir.

(3.2.22) ifadesinin pay ve paydasındaki skaler çarpımların, hız vektörlerinin kuvvet doğrultusundaki bileşenlerinden başka bir şey vermediğine dikkat edilir ve bu bileşenlerin mutlak değerleri

$$v'_F = \left|\mathbf{e}_F \cdot \mathbf{v}_F(q)\right| \ , \ \ v'_P = \left|\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{v}_P(q)\right| \tag{3.2.23}$$

şeklinde gösterilirse (3.2.18) ve (3.2.22) den

$$\frac{P}{F} = \frac{v'_F}{v'_P} \tag{3.2.24}$$

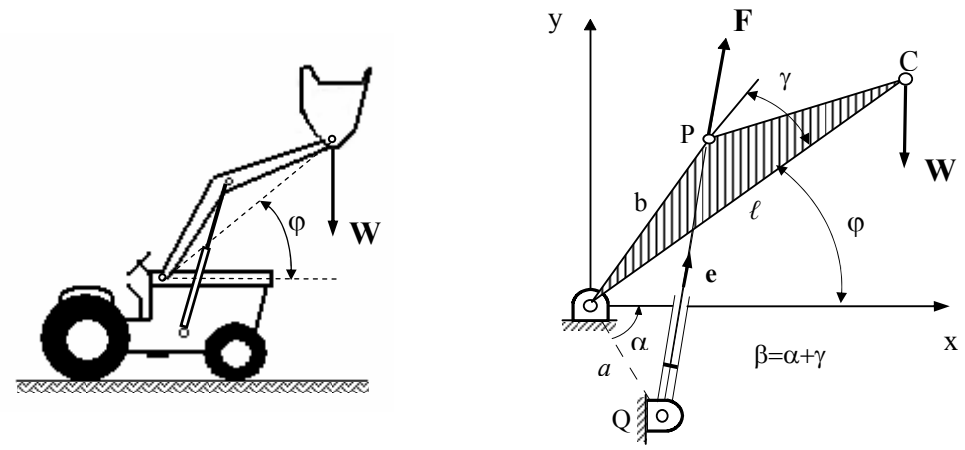
elde edilir. Denge halindeki kuvvetlerin, uygulama noktalarının hızlarıyla ters orantılı olacağını gösteren bu ifadeye bakılarak, virtüel işler ilkesinin atası olan ve yüzyıllar boyunca *mekaniğin altın kuralı* adıyla anılmış olan şu kural çıkartılabilir:

Kuvvetten kazanırsan hızdan kaybedersin, hızdan kazanırsan kuvvetten kaybedersin.

Kaldıraç, palanga, vidalı kriko vb. gibi bütün basit makinaların yanısıra motorlu taşıtların vites mekanizmaları gibi bir çok çağdaş düzenek de bu kuralın uygulama örneklerini oluşturur.

ÖRNEK PROBLEMLER

Problem 3.2.1



(a) **(b)**

Şekil Pr. 3.2.1-1 Kaldırma Makinası

Şekildeki yükleme makinasının boyutları a=0.585 m, b=1.269 m, ℓ=3 m, $\beta=\alpha+\gamma=70^o$, $-20° \le \varphi \le 80°$ olarak verilmiştir. W yükünü dengede tutabilmek için QP hidrolik silindirinin uygulaması gereken F kuvvetini ve makinanın mekanik kazancını φ açısının fonksiyonu olarak elde ediniz.

Çözüm: İlkin C, P ve Q noktalarıyla ilgili şu belirlemeler yapılsın: $y_C = \ell \sin\varphi$, $\dot{y}_C = \ell\cos\varphi\dot{\varphi}$, $x_P = b\cos(\varphi+\gamma)$, $\dot{x}_P = -b\sin(\varphi+\gamma)\dot{\varphi}$, $y_P = b\sin(\varphi+\gamma)$, $\dot{y}_P = b\cos(\varphi+\gamma)\dot{\varphi}$, $x_Q = a\cos\alpha$, $y_Q = -a\sin\alpha$. Buradan, biraz hesapla F doğrultusundaki birim vektör

$$\mathbf{e} = \frac{[b\cos(\varphi+\gamma)-a\cos\alpha]\mathbf{i}+[b\sin(\varphi+\gamma)+a\sin\alpha]\mathbf{j}}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\varphi+\beta)}} \qquad \text{(i)}$$

şeklinde, P ve C noktalarının hızları ise

$$\mathbf{v}_P = -b\sin(\varphi+\gamma)\dot{\varphi}\mathbf{i} + b\cos(\varphi+\gamma)\dot{\varphi}\mathbf{j} \qquad \text{(ii)}$$

ve

$$\mathbf{v}_C = \dot{x}_C\mathbf{i} + \ell\cos\varphi\dot{\varphi}\mathbf{j} \qquad \text{(iii)}$$

şeklinde belirlenir. Böylece

$$F\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}_P + \mathbf{W}\cdot\mathbf{v}_C = 0 \qquad \text{(iv)}$$

denge denkleminde (i), (ii), (iii) ve **W**=-W**j** yerine konulup hesap yapılarak F kuvveti

$$F(\varphi) = \frac{\ell}{ab}\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\varphi+\beta)}}{\sin(\varphi+\beta)}\cdot\cos\varphi\cdot W \qquad \text{(v)}$$

şeklinde, mekanik kazanç ise

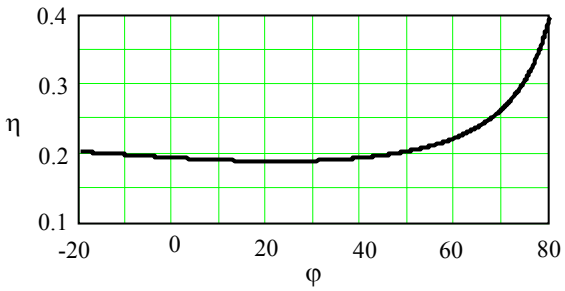
$$\eta(\varphi) = \frac{W}{F} = \frac{ab}{\ell}\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\varphi+\beta)}}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} \qquad \text{(vi)}$$

şeklinde hesaplanır. Burada sayısal verilerin kullanılmasıyla da

$$F(\varphi) = 4.041\frac{\sqrt{1.953-1.485\cos(\varphi+70)}}{\sin(\varphi+70)}\cdot\cos\varphi\cdot W \qquad \text{(vii)}$$

ve

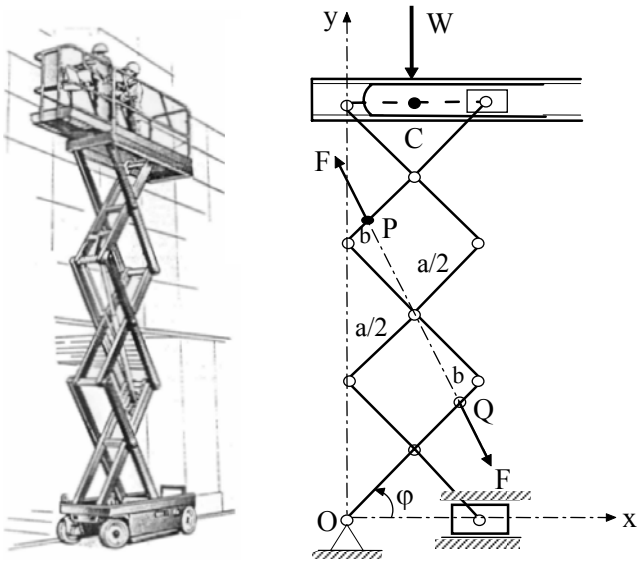
$$\eta(\varphi) = \frac{W}{F} = 0.247\frac{\sin(\varphi+70)}{\sqrt{1.953-1.485\cos(\varphi+70)}}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} \qquad \text{(viii)}$$



Şekil Pr. 3.2.1-2 Mekanik Kazanç

elde edilir. Yandaki grafikte $-20° \le \varphi \le 80°$ bölgesinde η'nın φ ile değişimi gösterilmiştir. Bu grafikten görüldüğü gibi, bu bölgenin tamamında $\eta<1$ olup, bir mekanik kazanç değil bir mekanik kayıp söz konusudur. En elverişsiz nokta ise $\varphi=21^o$ noktasıdır. Buna göre hidrolik piston seçiminde bu noktadaki koşullar esas alınmalıdır

Problem 3.2.2



Şekil Pr. 3.2.2-1 Kaldırma Platformu

Şekilde "X" tipi bir kaldırma platformu gösterilmiştir. Platformun boyutları a=3.75 m, b=0.67 m, $10° \le \varphi \le 80°$ şeklinde verildiğine göre, W yükünü dengede tutabilmek için QP hidrolik silindirinin uygulaması gereken F kuvvetini ve makinanın mekanik kazancını, uzuv ağırlıklarını göz ardı ederek, φ konumunun fonksiyonu olarak belirleyiniz.

Çözüm: Makinanın C, P ve Q noktaları ile ilgili olarak $y_C = 3a\sin\varphi$, $\dot{y}_C = 3a\cos\varphi\dot{\varphi}$, $x_P = b\cos\varphi$, $\dot{x}_P = -b\sin\varphi\dot{\varphi}$, $y_P = (2a+b)\sin\varphi$, $\dot{y}_P = (2a+b)\cos\varphi\dot{\varphi}$, $x_Q = (a-b)\cos\varphi$, $\dot{x}_Q = -(a-b)\sin\varphi\dot{\varphi}$, $y_Q = (a-b)\sin\varphi$, $\dot{y}_Q = (a-b)\cos\varphi\dot{\varphi}$ belirlemeleri yapılsın. Bunlara dayanılarak P ye etkiyen F kuvveti doğrultusundaki birim vektör

$$\mathbf{e} = \frac{(2b-a)\cos\varphi\mathbf{i}+(2b+a)\sin\varphi\mathbf{j}}{\sqrt{a^2+4b^2-4ab\cos 2\varphi}} \qquad \text{(i)}$$

şeklinde, C, P ve Q noktalarının hızları da

$$\mathbf{v}_C = \dot{x}_C\mathbf{i} + 3a\cos\varphi\dot{\varphi}\mathbf{j}\ ,\quad \mathbf{v}_P = -b\sin\varphi\dot{\varphi}\mathbf{i} + (2a+b)\cos\varphi\dot{\varphi}\mathbf{j}\ ,$$
$$\mathbf{v}_Q = -(a-b)\sin\varphi\dot{\varphi}\mathbf{i} + (a-b)\cos\varphi\dot{\varphi}\mathbf{j} \qquad \text{(ii)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Makinanın denge denklemi, (3.2.15) deki fikir uyarınca

$$F\mathbf{e}\cdot(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) + \mathbf{W}\cdot\mathbf{v}_C = 0 \qquad \text{(iii)}$$

şeklinde yazılmalıdır. Burada (i), (ii) bağıntıları ve **W**=-W**j** yerlerine konup hesap yapılırsa

$$F(\varphi) = \frac{3\sqrt{a^2+4b^2-4ab\cos 2\varphi}}{8b\sin\varphi}\cdot W \qquad \text{(iv)}$$

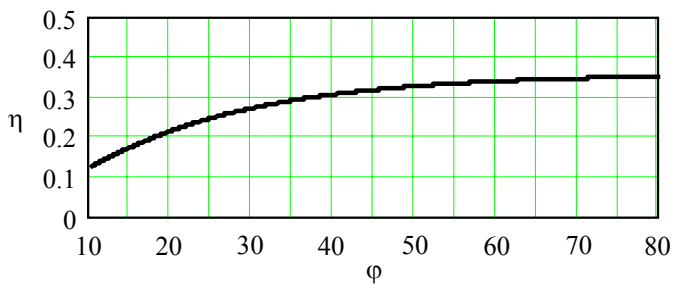
ve

$$\eta(\varphi) = \frac{W}{F} = \frac{8b\sin\varphi}{3\sqrt{a^2+4b^2-4ab\cos 2\varphi}} \qquad \text{(v)}$$

elde edilir. Sayısal verilerin kullanılmasıyla bu sonuçlar

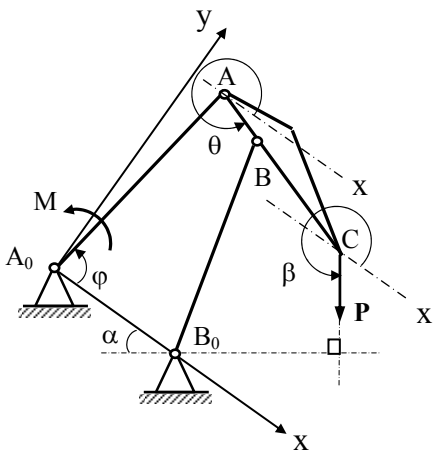
$$F(\varphi) = \frac{3\sqrt{15.86-10.05\cos 2\varphi}}{5.36\sin\varphi}\cdot W\ ,\quad \eta(\varphi) = \frac{5.36\sin\varphi}{3\sqrt{15.86-10.05\cos 2\varphi}} \qquad \text{(vi)}$$

verir. Aşağıdaki grafikte, $10° \le \varphi \le 80°$ aralığında η nın φ ile değişimi gösterilmiştir.



Şekil Pr. 3.2.2-2 Mekanik Kazanç

Problem 3.2.3



Şekil Pr. 3.2.3-1 Tersane Vinci

Şekilde, *tersane vinci* ya da *kuğu vinç* denilen tipten bir vinç gösterilmiştir. Üç çubuk mekanizmasını esas alan bu vinçte A_oA uzvu döndürüldüğünde yük askı noktası C yaklaşık yatay doğrultuda ileri-geri hareket etmektedir. Yükün yukarı-aşağı hareketi ise ayrı bir palanga sistemiyle sağlanmıştır. Vincin boyutları $r_1=A_oB_o=11$ m, $r_2=A_oA=22$ m, $r_3=AB=10$ m, $r_4=B_oB=29$ m, $\ell=AC=34$ m, $\alpha=40^o$, $90° \le \varphi \le 180°$ olarak verildiğine göre, uzuv ağırlıklarını hesaba katmaksızın, P yükünü dengede tutabilmek için A_oA uzvuna uygulanması gereken M momentini φ açısının fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Çözüm: Çözümde (3.2.9) denge koşulunu esas alalım ve

$$M + \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}'_C = 0 \qquad \text{(i)}$$

yazalım. Burada,

$$\mathbf{P} = P\cos\beta\mathbf{i} + P\sin\beta\mathbf{j} \;;\quad \beta = 270 + \alpha \qquad \text{(ii)}$$

ve

$$x_C = r_2\cos\varphi + \ell\cos\theta \;\rightarrow\; x'_C = \frac{dx_C}{d\varphi} = -r_2\sin\varphi - \ell\sin\theta \cdot g'_\theta$$

$$y_C = r_2\sin\varphi + \ell\sin\theta \;\rightarrow\; y'_C = \frac{dy_C}{d\varphi} = r_2\cos\varphi + \ell\cos\theta \cdot g'_\theta \qquad \text{(iii)}$$

dikkate alınarak yazılan

$$\mathbf{g}'_C = x'_C\mathbf{i} + y'_C\mathbf{j} \qquad \text{(iv)}$$

yerine konularak hesap yapılabilir. Ancak bunun için önce üç çubuk mekanizmasının kinematik çözümlemesinden

$$\theta(\varphi) = 2 \cdot \mathrm{arctg}\left[\frac{\sin\varphi - \sqrt{\sin^2\varphi + \left(\cos\varphi - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_2r_3} - \frac{r_1}{r_3}\cos\varphi\right)^2}}{\left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right)\cos\varphi - \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_2r_3}\right)}\right] \qquad \text{(v)}$$

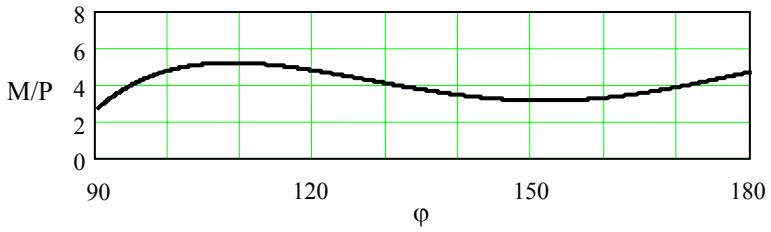
ile

$$g'_\theta(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \theta) - \frac{r_1}{r_3}\sin\varphi}{\sin(\varphi - \theta) + \frac{r_1}{r_2}\sin\theta} \qquad \text{(vi)}$$

eşitliklerinin anımsanması gerekir. (ii)-(vi) eşitlikleriyle (i) ye dönüp hesap yapılırsa

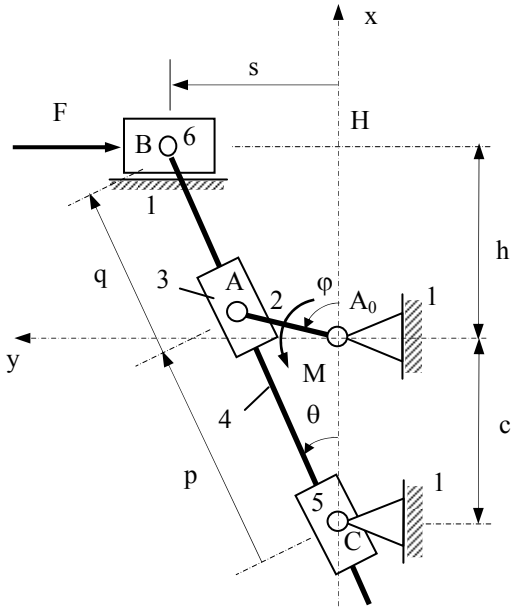
$$M(\varphi) = P\left[\cos\beta\left(r_2 \sin\varphi + \ell \sin\theta \cdot g'_\theta\right) - \sin\beta\left(r_2 \cos\varphi + \ell \cos\theta \cdot g'_\theta\right)\right] \qquad \text{(vii)}$$

elde edilir. Aşağıdaki grafikte, burada boyutları verilen vinçte $\frac{M}{P}$ oranının φ ile değişiminin, çalışma aralığı olan $90° \le \varphi \le 180°$ bölgesindeki gidişi gösterilmiştir.



Şekil Pr. 4.2.3-2 M/P-φ Grafiği

Problem 3.2.4



Şekil Pr. 3.2.4 Planya Mekanizması

Şekilde bir planya tezgahına ait ana mekanizma gösterilmiştir. Boyutları A_oA=r=0.15 m, A_oH=h=0.2 m, A_oC=c= 0.4 m şeklinde verilen mekanizmayı 6 numaralı koça etkiyen F=1500 N luk kuvvete karşın φ=120° ile tanımlanan konumunda dengede tutabilmek için A_oA koluna uygulanması gereken M momentini hesaplayınız.

Çözüm: (3.2.9) denklemi uyarınca

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{g}'_{B6} + M \cdot g'_\varphi = 0 \qquad \text{(i)}$$

veya burada $\mathbf{F}=-F.\mathbf{j}$, $\mathbf{g}'_{B6}=g'_s.\mathbf{j}$, $g'_\varphi=1$ olduğuna dikkat edilerek

$$-F.g'_s+M=0 \rightarrow M=F.\ g'_s \quad \text{(ii)}$$

şeklinde hesap yapılmak istensin. Problemin çözülebilmesi için g'_s in hesaplanması gerekmektedir. Bu amaçla ilkin şekil yardımıyla mekanizmanın skaler çevrim kapama denklemleri

$$\begin{aligned} f_1(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\cos\varphi - p\cos\theta + c = 0 \\ f_2(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\sin\varphi - p\sin\theta = 0 \\ f_3(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\cos\varphi + q\cos\theta - h = 0 \\ f_4(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\sin\varphi + q\sin\theta - s = 0 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

şeklinde yazılıp buradan da s_1=p, s_2=θ, s_3=q, s_4=s alınarak

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}-\cos\theta & p\sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & -p\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & -q\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & q\cos\theta & \sin\theta & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}'=r\cdot\begin{Bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Bmatrix} \qquad \text{(iv)}$$

belirlensin. (iii) denklem takımının φ=120°=2π/3 rad için çözülmesiyle

$$p=0.35\text{ m},\ \theta=0.380251\text{ rad},\ q=0.296154\text{ m},\ s=0.239822\text{ m} \qquad \text{(v)}$$

elde edilir. (v) değerlerinin (iv) te yerlerine konulmasıyla da

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}-0.928571 & 0.129904 & 0 & 0\\ -0.371154 & -0.325 & 0 & 0\\ 0 & -0.109919 & 0.928571 & 0\\ 0 & 0.275 & 0.371154 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}'=-\begin{Bmatrix}0.129904\\ 0.075\\ 0.129904\\ 0.075\end{Bmatrix} \qquad \text{(vi)}$$

hesaplanır. Artık, hız katsayıları sütun matrisinin mekanizmanın verilen konumundaki değeri,

$$\mathbf{g}'=-\mathbf{J}^{-1}\cdot\mathbf{f}'=\begin{Bmatrix}g'_p\\ g'_\theta\\ g'_q\\ g'_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.148461\\ -0.061224\\ 0.132649\\ -0.042604\end{Bmatrix} \qquad \text{(vii)}$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradan g'_s=-0.042604 değerinin alınıp (ii) de yerine konulmasıyla da F kuvvetini dengeleyecek moment için

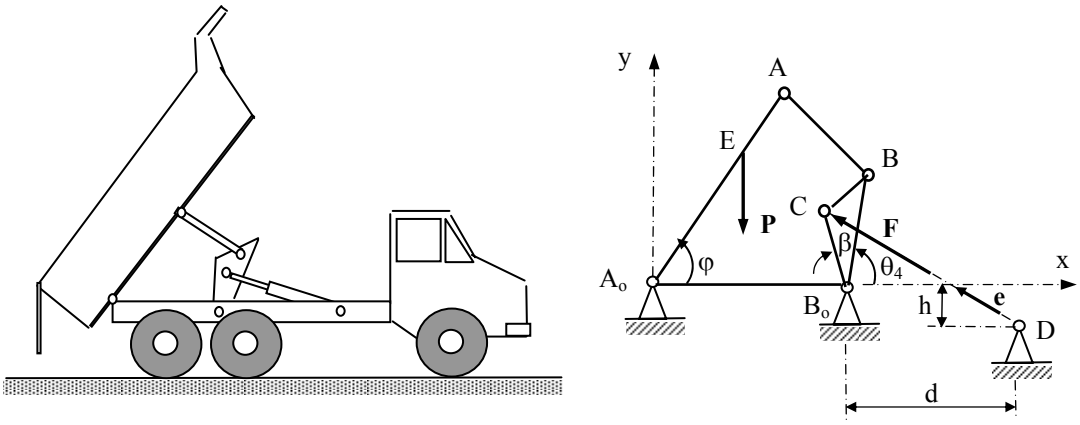
$$M=1500\,(-\,0.042604)=-\,63.906\text{ N.m} \qquad \text{(viii)}$$

bulunur. Buradaki eksi işareti, momentin şekildekine zıt yönde (saat yönünde) uygulanması gerektiğini göstermektedir.

Problem 3.2.5

Şekilde bir damperli kamyon ve ona ait kaldırma mekanizması gösterilmiştir. Diğer bütün kuvvetler göz ardı edildiğine göre, yüklü durumdayken P=40000 N ağırlığında olan kasayı dengede tutabilmek için DC hidrolik silindirinin uygulaması gereken kuvvetin, mekanizmanın çalışma aralığı olan $5^\circ \le \varphi \le 45^\circ$ aralığında, φ açısı ile değişimini elde edip sonucu grafik olarak veriniz.

$A_oB_o=r_1$=60 cm, $A_oA=r_2$=90 cm, AB= r_3=46 cm, $B_oB=r_4$=64 cm,
B_oC= c=50 cm, A_oE=a=60 cm, β=30°, d=60 cm, h=14 cm



Şekil Pr. 3.2.5-1 Damperli Kamyon

Çözüm: (3.2.9) denklemi uyarınca

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}'_E + F\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{g}'_C = 0 \rightarrow F = -\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}'_E}{\mathbf{e}\cdot\mathbf{g}'_C} \qquad \text{(i)}$$

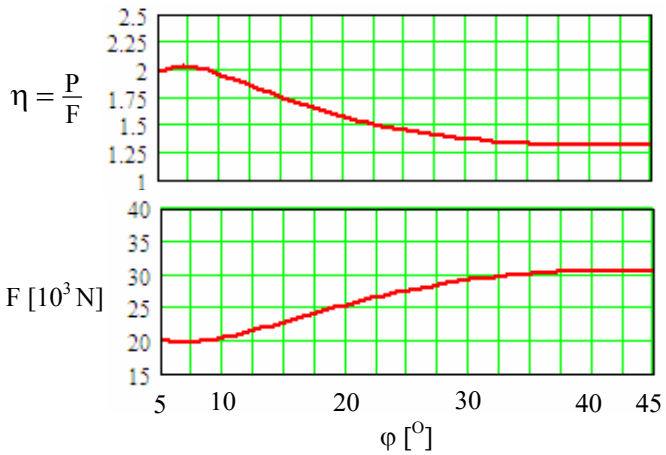
şeklinde hesap yapılsın. Bu amaçla, $x_E = a\cos\varphi$, $x'_E = -a\sin\varphi$, $y_E = a\sin\varphi$, $y'_E = a\cos\varphi$, $x_C = r_1 + c\cos(\theta_4+\beta)$, $x'_C = -c\sin(\theta_4+\beta)\cdot g'_4$, $y_C = c\sin(\theta_4+\beta)$, $y'_C = c\cos(\theta_4+\beta)\cdot g'_4$, $x_D = r_1 + d$, $y_D = -h$ yazılıp buradan

$$\mathbf{g}'_C = -c\sin(\theta_4+\beta)\cdot g'_4\cdot\mathbf{i} + c\cos(\theta_4+\beta)\cdot g'_4\cdot\mathbf{j}$$

$$\mathbf{g}'_E = -a\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + a\cos\varphi\cdot\mathbf{j} \qquad \text{(ii)}$$

$$\mathbf{e} = \frac{[c\cos(\theta_4+\beta)-d]\mathbf{i}+[c\sin(\theta_4+\beta)+h]\mathbf{j}}{\sqrt{[c\cos(\theta_4+\beta)-d]^2+[c\sin(\theta_4+\beta)+h]^2}}$$

belirlenir, ayrıca **P**=-P.**j** denirse, verilmiş her φ değeri için, θ_4 ve g'_4 ü elde etmek kaydıyla F, (i) bağıntısından hesaplanabilir. Bu değerlerin, mekanizmanın sayısal kinematik çözümlenmesinden elde edilmesiyle yapılan hesabın sonuçları Şekil Pr. 3.2.5-2'de F(φ) ve η(φ) grafikleri şeklinde verilmiştir.



Şekil Pr. 3.2.5-2 Hesap Sonuçları

4. TEK SERBESTLİK DERECELİ DÜZLEMSEL MAKİNALARIN HAREKET DENKLEMLERİ

4.1 GENEL

Bu bölümde, rijid uzuvlardan oluşan, tek serbestlik dereceli, düzlemsel, ideal kısıtlara sahip, holonomik ve skleronomik makinaların hareket denklemlerinin elde edilişi üzerinde durulacaktır. Makinalar gibi çok sayıda kısıt içeren sistemlerin hareket denklemlerinin elde edilmesinde en uygun yöntem, hareketin Lagrange denklemlerinin elde edilmesidir. Burada da bu yol izlenecektir.

Aşağıda görüleceği gibi, istisnai çok basit makinalar dışında, makinaların hareket denklemlerinin elde edilmesi başlı başına zorlu bir problemdir. Üstelik bu denklemlerin elde edilmesi de çoğu kez sorunun çözülmesi anlamına gelmez. Çünkü esas genelleştirilmiş koordinat q nün zamana göre ikinci mertebeden diferansiyel denklemleri olan bu denklemler, çoğunlukla, analitik olarak çözülmeleri olanaksız olan, lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir. Ne var ki bütün bu zorluklara karşın makinaların dinamik çözümlemesi yapılmak zorundadır. Çünkü makinaya güç sağlayacak motorun seçiminden makina uzuv ve bağlantı elemanlarının mukavemete göre boyutlandırılmasına kadar bir çok mühendislik probleminin gerektirdiği verileri üretmenin başka yolu yoktur.

4.2 MAKİNANIN GENELLEŞTİRİLMİŞ EYLEMSİZLİĞİ

Konumu q esas genelleştirilmiş koordinatıyla tanımlanan makina uzvunun, makinanın toplam kinetik enerjisine eşit kinetik enerji depolayabilmesi için sahip olması gereken eylemsizliğe makinanın genelleştirilmiş eylemsizliği (ya da, bazen, makinanın q koordinatına indirgenmiş eylemsizliği) denir.

Bu tanıma göre, makinanın genelleştirilmiş eylemsizliği ($\Im$ diyelim)

$$T_{mak} = \frac{1}{2}\Im.\dot{q}^2 \qquad (4.2.1)$$

eşitliğini sağlamalıdır. q esas genelleştirilmiş koordinatının çizgisel ya da açısal bir koordinat olmasına bağlı olarak $\Im$ nin kütle ya da kütlesel eylemsizlik momenti boyutunda olacağı ortadadır.

Şimdi makinanın toplam kinetik enerjisini ifade etmek amacıyla, düzlemsel hareket yapan rijid cisimlerin kinetik enerjisini ifade etmekte kullanılabilecek (2.3.14) eşitliği anımsanırsa, i indisi makinanın hareketli uzuvlarını taramak üzere

$$T_{mak} = \frac{1}{2}\sum_i (m_i v_{S_i}^2 + I_{S_i}\omega_i^2) = \frac{1}{2}\sum_i m_i (v_{S_i}^2 + i_{S_i}^2 \omega_i^2) \qquad (4.2.2)$$

ya da burada hız katsayıları devreye sokularak

$$T_{mak} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\mathbf{g}'_{S_i} \cdot \mathbf{g}'_{S_i} + i_{S_i}^2 g'^2_{\theta_i}) \cdot \dot{q}^2 \qquad (4.2.3)$$

yazılabilir. (4.2.2) ya da (4.2.3) ifadesinin (4.2.1) de yerine konulmasıyla makinanın genelleştirilmiş eylemsizliği için

$$\Im(q) = \sum_i m_i (\frac{v_{S_i}^2}{\dot{q}^2} + i_{S_i}^2 \frac{\omega_i^2}{\dot{q}^2}) \qquad (4.2.4)$$

ya da

$$\Im(q) = \sum_i m_i \left[\mathbf{g}'_{S_i}(q) \cdot \mathbf{g}'_{S_i}(q) + i_{S_i}^2 \cdot g'^2_{\theta_i}(q)\right] \qquad (4.2.5)$$

ifadesine ulaşılır. Hız katsayılarının q nün fonksiyonu olduğu makinalarda genelleştirilmiş eylemsizlik de q konumu ile değişecektir.

Buraya kadarki ifadeler makina uzuvlarının her türlü düzlemsel hareketinde geçerli olan genel ifadelerdir. Ancak makinanın herhangi bir i=k ıncı uzvunun özel olarak bir öteleme hareketi ya da sabit bir nokta çevresinde daimi dönme hareketi yapıyor olması halinde ilgili toplamdaki k ıncı terim basitleşir. Örneğin k ıncı uzuv bir öteleme hareketi yapıyorsa ifadelerdeki dönme kinetik enerjisine ilişkin terim düşer, ayrıca öteleme hareketinde rijid cismin tüm noktalarının hızları birbirinin aynı olacağından öteleme kinetik enerjisine ilişkin terimde de S_k kütle merkezininkinin yerine cismin herhangi bir A_k noktasının hızı kullanılabilir. Bu durumda (4.2.4) ve (4.2.5) teki k ıncı terimler, sırasıyla,

$$m_k \frac{v_{A_k}^2}{\dot{q}^2} \quad , \quad m_k \mathbf{g}'_{A_k}(q) \cdot \mathbf{g}'_{A_k}(q)$$

(4.2.6)

şeklini alacaktır. Öte yandan k ıncı uzuv bir O_k noktası çevresinde daimi dönme hareketi yapıyorsa kinetik enerji (2.3.10) uyarınca tek terimle ifade edilebileceğinden, i_{O_k} cismin, O_k noktasına göre eylemsizlik yarıçapını göstermek üzere, (4.2.4) ve (4.2.5) teki k ıncı terimler bu kez de, sırasıyla,

$$m_k i_{O_k}^2 \frac{\omega_k^2}{\dot{q}^2} \quad , \quad m_k i_{O_k}^2 \cdot g'^2_{\theta_k}(q) \qquad (4.2.7)$$

şeklinde yazılabilir.

4.3 HAREKET DENKLEMİ

Lagrange hareket denklemlerinin (2.4.59) da verilen ifadesi, tek serbestlik dereceli sistemler özel hali için göz önüne alınırsa

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \tag{4.3.1}$$

yazılabilir. Burada, makinanın toplam kinetik enerjisini gösteren T için, Bölüm 4.2 den,

$$T = \frac{1}{2}\Im(q).\dot{q}^2 \tag{4.3.2}$$

yazılabileceği bilinmektedir. Q genelleştirilmiş kuvveti ise, Bölüm 4.2.3 e göre

$$Q(q) = \sum_i \left[\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{g}'_{P_i}(q) + M_i^P \cdot g'_{\theta_i}(q)\right] \tag{4.3.3}$$

şeklinde belirlidir. Ancak burada $\mathbf{F}_i$ bileşke kuvvetlerinin ve M_i^P momentlerinin hesabına giren kuvvetler, en genel halde sabit kuvvetler olmayıp, q konumunun, $\dot{q}$ hızının ve t zamanının fonksiyonu olabilirler. Bu nedenle genelleştirilmiş kuvvetin en genel halde $Q(q,\dot{q},t)$ şeklinde yazılması uygun olur. Böylece makinaların hareket denklemi için (4.3.1) den

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}\Im(q).\dot{q}^2\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}\Im(q).\dot{q}^2\right] = Q(q,\dot{q},t) \tag{4.3.4}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}\Im(q).\dot{q}^2\right]\right\} = \frac{d}{dt}\left[\Im(q).\dot{q}\right] = \frac{d\Im(q)}{dq}\cdot\dot{q}^2 + \Im(q)\cdot\ddot{q} \tag{4.3.5}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}\Im(q).\dot{q}^2\right] = \frac{1}{2}\frac{d\Im(q)}{dq}\cdot\dot{q}^2 \tag{4.3.6}$$

ara hesaplarının gerçekleştirilmesiyle (4.3.4) yerine

$$\boxed{\Im(q)\cdot\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{d\Im(q)}{dq}\cdot\dot{q}^2 = Q(q,\dot{q},t)} \tag{4.3.7}$$

de yazılabilir. Tek serbestlik dereceli makinaların genel hareket denklemini oluşturan bu denklem bazen *Eksergian Hareket Denklemi* adıyla da anılır[1].

(4.3.7) deki ikinci terimin *merkezcil katsayı* adıyla anılan çarpanı

$$C(q) = \frac{1}{2}\frac{d\Im(q)}{dq} \tag{4.3.8}$$

şeklinde gösterilirse denklem

$$\boxed{\Im(q)\cdot\ddot{q} + C(q)\cdot\dot{q}^2 = Q(q,\dot{q},t)} \tag{4.3.9}$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki merkezcil katsayının, $\Im(q)$ nün (4.2.5) teki ifadesi (4.3.8) de yerine konulup hesap yapılarak ve ivme katsayıları anımsanarak

$$C(q) = \sum_i m_i\left[\mathbf{g}'_{S_i}(q)\cdot\mathbf{g}''_{S_i}(q) + i^2_{S_i}\cdot g'_{\theta_i}(q)\cdot g''_{\theta_i}(q)\right] \tag{4.3.10}$$

şeklinde ifade edilebileceğini belirtelim.

Öte yandan, $Q(q,\dot{q},t)$ genelleştirilmiş kuvveti, korunumsuz kuvvetlerden gelen bir $Q'(q,\dot{q},t)$ kısmı ile korunumlu kuvvetlerden gelen bir $Q''(q)$ kısmının toplamı olarak düşünülür ve korunumlu kuvvetlerin tanımı gereği, bu kısmın

$$Q''(q) = -\frac{dV(q)}{dq} \tag{4.3.11}$$

şeklinde kendisinden türetileceği bir V(q) potansiyel enerji fonksiyonunun bulunacağı anımsanırsa, (4.3.9) yerine

$$\boxed{\Im(q)\cdot\ddot{q} + C(q)\cdot\dot{q}^2 + \frac{dV(q)}{dq} = Q'(q,\dot{q},t)} \tag{4.3.12}$$

de yazılabilir.

Tek serbestlik dereceli makinaların hareketini yöneten genel diferansiyel denklem olan (4.3.9) denkleminin elde edilebilmesi, bu denklemdeki $\Im(q)$, C(q) ve $Q(q,\dot{q},t)$ terimlerinin analitik olarak ifade edilebilmesine, bu ise, bu terimlerin tanımlarından kolayca anlaşılabileceği gibi, her şeyden önce, ilgili makinanın kinematik çözümlemesinin analitik yoldan gerçekleştirilmesine bağlıdır, ki bilindiği gibi bu her zaman olanaklı değildir. Ayrıca, makinaya etkiyen ve $Q(q,\dot{q},t)$ genelleştirilmiş kuvvetine katkıda bulunan tüm kuvvetlerin de analitik olarak ifade edilmiş olması gerekir. İleride görüleceği gibi bu da her zaman kolay bir iş değildir. Bütün bu söylenilenlerden anlaşılacağı gibi, makinaların hareketini yöneten

[1] Bu, 1930-1931 yılları arasında Makinaların Dinamik Çözümlemesi konulu bir dizi çalışma yayınlamış ve bu çalışmalarında anılan denklemi yoğun olarak kullanmış olan R. Eksergian'ın adına atfen yapılan bir adlandırmadır.

diferansiyel denklemlerin elde edilmesi ancak sınırlı sayıdaki istisnai durumda umulabilecek bir sonuçtur. Öte yandan, $\Im(q)$ nün sabit olmasına yol açan özellikle basit bazı makinalar dışında (4.3.9) diferansiyel denklemi lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir ve, bilindiği gibi, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin genel çözüm yöntemleri bilinmemektedir. Buradan, makinaların hareket denklemleri analitik olarak elde edilebilse bile, analitik olarak çözülmelerinin genellikle mümkün olmayacağı anlaşılmaktadır. Bu durumda bu denklemlerin çözümünde sayısal yöntemlere baş vurulması kaçınılmaz olabilecektir. Oysa, çözüm sayısal olarak elde edilecekse denklemi analitik olarak elde etmenin de pek anlamı kalmayacağı ortadadır. Böylece, (4.3.9) denkleminin sayısal olarak elde edilmesiyle yetinilebileceği anlaşılır. Bu, $\Im(q)$, $C(q)$ ve $Q(q,\dot{q},t)$ fonksiyonlarının, makinanın belli bir q* konumundaki değerlerinin yerine konulmasıyla gerçekleştirilir. Bunun için ise makinanın kinematik çözümlemesinin sayısal yoldan yapılmış olması yeterlidir.

Şimdi de, makinaların hareketine ilişkin bir başka diferansiyel denklemden söz edelim. (4.3.9) denkleminde

$$\Im(q)\cdot\ddot{q} = \Im(q)\cdot\frac{d\dot{q}}{dt} = \Im(q)\cdot\frac{d\dot{q}}{dq}\cdot\dot{q} = \frac{1}{2}\Im(q)\frac{d(\dot{q}^2)}{dq} \tag{4.3.13}$$

eşitliği dikkate alınırsa

$$\boxed{\frac{1}{2}\Im(q)\cdot\frac{d\dot{q}^2}{dq} + C(q)\cdot\dot{q}^2 = Q(q,\dot{q},t)} \tag{4.3.14}$$

ya da

$$\Im(q)\cdot\frac{d\dot{q}^2}{dq} + \frac{d\Im(q)}{dq}\cdot\dot{q}^2 = 2\cdot Q(q,\dot{q},t) \tag{4.3.15}$$

elde edilir. Böylece q konumunun t zamanına göre ikinci mertebeden diferansiyel denklemleri olan (4.3.7), (4.3.9) ya da (4.3.12) denklemleri yerine $\dot{q}$ hızının q konumuna göre birinci mertebeden bir diferansiyel denklemine gelinmiş olur. Bu denklem, özellikle Q genelleştirilmiş kuvvetinin $Q = Q(q,\dot{q}^2)$ şeklinde olduğu, yani t zamanını açık olarak içermediği, $\dot{q}$ ile bağlantısının ise $\dot{q}^2$ li terimler şeklinde olduğu problemlerde yararlı bir seçenek oluşturur.

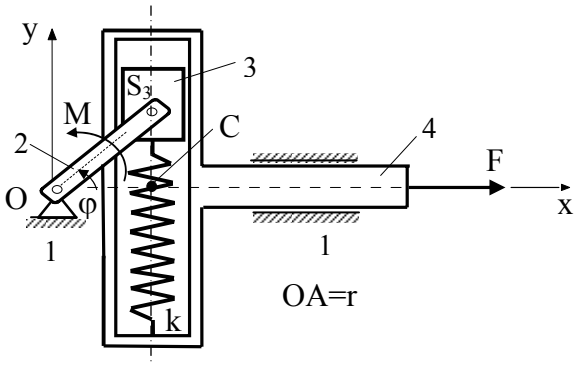
Burada son olarak (4.3.14) ün

$$\boxed{\frac{d}{dq}\left[\frac{1}{2}\Im(q)\cdot\dot{q}^2\right] = Q(q,\dot{q},t)} \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dq} = Q(q,\dot{q},t) \tag{4.3.16}$$

şeklinde de yazılabileceğini not edelim. Bu denklem de, Q nün Q=Q(q) şeklinde yalnızca q ye bağlı olduğu problemlerde hızın konumla değişiminin hesaplanmasında yararlı olur.

ÖRNEK PROBLEMLER

Problem 4.3.1



Şekil Pr.4.3.1

Şekildeki harmonik hareket mekanizması esaslı makinanın 2 numaralı uzvu M momentinin, 4 numaralı uzvu da F kuvvetinin etkisi altındadır. Makinanın hareketli uzuvlarının kütleleri m_2, m_3 ve m_4 olarak, 2 numaralı uzvun OA nın tam ortasında bulunan S_2 kütle merkezine göre eylemsizlik yarıçapı ise i_{S_2} olarak bilindiğine ve φ=0 iken k yayı gerilmesiz olduğuna göre makinanın hareket denklemini elde ediniz.

Çözüm: Makinada 2 numaralı uzvun O noktası çevresinde daimi dönme hareketi, 3 numaralı uzvun dairesel öteleme hareketi, 4 numaralı uzvun ise doğrusal öteleme hareketi yaptığına dikkat edilir ve esas genelleştirilmiş koordinat olarak q=φ seçilerek hesap yapılırsa, makinanın genelleştirilmiş eylemsizliği için

$$\Im = m_2 i_{O_2}^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^2} + m_3 \frac{v_A^2}{\dot{\varphi}^2} + m_4 \frac{v_C^2}{\dot{\varphi}^2} \qquad \text{(i)}$$

yazılabilir. Burada, şekilden kolayca belirlenen

$$v_A = r\dot{\varphi}, \quad x_C = r\cos\varphi \;\rightarrow\; v_C = \dot{x}_C = -r\sin\varphi\dot{\varphi} \qquad \text{(ii)}$$

hız ifadeleri ve Huygens-Steiner formüllerine göre yazılan

$$i_{O_2}^2 = i_{S_2}^2 + (\tfrac{r}{2})^2 \qquad \text{(iii)}$$

eşitliği yerlerine konulursa

$$\Im(\varphi) = m_2 i_{S_2}^2 + r^2(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 \sin^2\varphi) \qquad \text{(iv)}$$

elde edilir. Buradan da merkezcil katsayı

$$C(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{d\Im(\varphi)}{d\varphi} = m_4 r^2 \sin\varphi\cos\varphi \qquad \text{(v)}$$

şeklinde hesaplanır. Öte yandan, 2 ve 3 numaralı uzuvların ağırlıkları ve k yayıyla ilgili olarak bir potansiyel enerji fonksiyonu

$$V = m_2 g y_{S_2} + m_3 g y_A + \frac{1}{2} k y_A^2 \qquad \text{(vi)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$y_{S_2} = \frac{1}{2} r \sin\varphi \ , \quad y_A = r \sin\varphi \qquad \text{(vii)}$$

ifadelerinin yerine konulmasıyla

$$V(\varphi) = (\frac{m_2}{2} + m_3) g r \sin\varphi + \frac{1}{2} k r^2 \sin^2\varphi \qquad \text{(viii)}$$

ve buradan da

$$\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = (\frac{m_2}{2} + m_3) g r \cos\varphi + k r^2 \sin\varphi \cos\varphi \qquad \text{(ix)}$$

elde edilir. Son olarak, genelleştirilmiş kuvvetin korunumlu olmayan kuvvetlere ilişkin kısmı (ya da korunumlu olmayan kuvvetlerin φ koordinatına indirgenmiş eşdeğeri)

$$Q'(\varphi) = M \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + F \frac{v_C}{\dot{\varphi}} = M - F r \sin\varphi \qquad \text{(x)}$$

şeklinde hesaplanır. (iv), (v), (ix) ve (x) sonuçlarının

$$\mathfrak{I}(q) \cdot \ddot{q} + C(q) \cdot \dot{q}^2 + \frac{dV(q)}{dq} = Q'(q, \dot{q}, t) \qquad \text{(xi)}$$

genel hareket denkleminde yerine konulmasıyla, verilen makinanın hareket denklemi

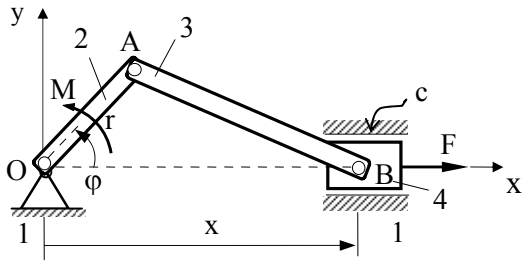
$$\left[m_2 i_{S_2}^2 + r^2 (\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 \sin^2\varphi) \right] \ddot{\varphi} + m_4 r^2 \sin\varphi \cos\varphi \dot{\varphi}^2$$
$$+ (\frac{m_2}{2} + m_3) g r \cos\varphi + k r^2 \sin\varphi \cos\varphi = M - F r \sin\varphi \qquad \text{(xii)}$$

ya da buradaki trigonometrik çarpımların açılıp sonucun düzenlenmesiyle

$$\left\{ m_2 (\frac{1}{4} + \frac{i_{S_2}^2}{r^2}) + m_3 + \frac{m_4}{2} (1 - \cos 2\varphi) \right\} \ddot{\varphi} + \frac{m_4}{2} \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2$$
$$+ (\frac{m_2}{2} + m_3) \frac{g}{r} \cos\varphi + \frac{F}{r} \sin\varphi + \frac{1}{2} k \sin 2\varphi = \frac{M}{r^2} \qquad \text{(xiii)}$$

şeklinde elde edilir.

Problem 4.3.2

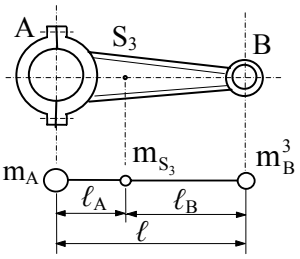


Şekil Pr.4.3.2-1

Şekilde krank-biyel mekanizması esaslı bir makina gösterilmiştir. Makinada krank M momentinin, piston F kuvvetinin etkisi altında bulunduğuna; krankın kütlesi m_2, O ya göre eylemsizlik yarıçapı i_{O_2}; biyelin kütlesi m_3, S_3 e göre eylemsizlik yarıçapı i_{S_3}; pistonun kütlesi ise m_4 olarak bilindiğine; pistonla silindir arasındaki sürtünmenin c katsayısına sahip bir viskoz sürtünme olarak modellenmesi düşünüldüğüne ve ağırlık kuvvetleri göz ardı edildiğine göre makinanın hareket denklemini elde ediniz.

Çözüm: Bu problemin çözümünü, uygun kabul ve yaklaşıklıklara başvurarak, adım adım gerçekleştirelim.

Biyelin bir maddesel noktalar sistemine indirgenmesi: Krank-biyel mekanizmalarının dinamiğinin incelenmesinde (ki bu mekanizma içten yanmalı motorlar, pistonlu pompa ve kompresörler gibi bir çok makinada kullanıldığı için bu inceleme sık sık kaçınılmaz olur) en büyük zorluk, genel düzlemsel hareket yapan biyele ilişkin hesaplarda ortaya çıkar. Bu zorluğu aşmanın bir yolu, biyelin A, B ve S_3 noktalarına yerleştirilecek üç maddesel noktadan oluşan bir maddesel noktalar sistemine indirgenmesidir. Bu indirgemede, kütlelerin



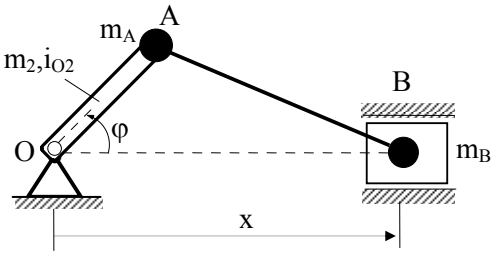
Şekil Pr.4.3.2-2

$$m_A = \frac{i_{S_3}^2}{\ell_A \cdot \ell} \cdot m_3 \ , \quad m_B^3 = \frac{i_{S_3}^2}{\ell_B \cdot \ell} \cdot m_3 \ , \quad m_{S_3} = \left(1 - \frac{i_{S_3}^2}{\ell_A \cdot \ell_B}\right) \cdot m_3 \qquad \text{(i)}$$

şeklinde hesaplanacağı bilinmektedir. Oysa biyeller genellikle,

$$\ell_A \cdot \ell_B = i_{S_3}^2 \qquad \text{(ii)}$$

eşitliği hiç değilse yaklaşık olarak sağlanacak biçimde boyutlandırılırlar. Biz de bu eşitliğin geçerli olduğunu kabul edelim. Böylece $m_{S_3} = 0$ olur ve biyel A ve B deki



Şekil Pr.4.3.2-3

m_A ve m_B^3 kütleli iki maddesel noktaya indirgenebilir. Bu indirgemenin sonucunda makina; krank, A daki m_A maddesel noktası ve B deki

$$m_B = m_B^3 + m_4 \qquad \text{(iii)}$$

maddesel noktasından ibaret kalmış olur.

Kinematik yaklaşıklıklar: Krank-biyel mekanizmasında piston konumu x, esas genelleştirilmiş koordinat olarak seçilmesi uygun olan krank açısı φ cinsinden kapalı formda elde edilebilir:

$$x(\varphi) = r\cos\varphi + \ell\sqrt{1-\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\sin^2\varphi} \qquad \text{(iv)}$$

Burada

$$\lambda = \frac{r}{\ell} \qquad \text{(v)}$$

denir ve kök altındaki terim binom serisine açılırsa

$$\left[1-\lambda^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} = 1-\tfrac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi-\tfrac{1}{8}\lambda^4\sin^4\varphi-\tfrac{1}{16}\lambda^6\sin^6\varphi-\cdots \qquad \text{(vi)}$$

elde edilir. Oysa bütün krank-biyel mekanizmalarında $\lambda < 1$ dir (İçten yanmalı motorlarda $\lambda \approx 0.2$). Buradan, yukarıdaki binom serisinde yalnızca ilk iki terimi almakla yapılacak hatanın bütün pratik amaçlar bakımından kabul edilebilir mertebede kalacağı anlaşılır. Böyle yapılarak (iv) e dönülürse

$$x(\varphi) \cong r\cos\varphi + \ell\left(1-\tfrac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi\right) \qquad \text{(vii)}$$

ya da buradaki $\sin^2\varphi$ terimi açılarak

$$x(\varphi) \cong \ell(1-\frac{\lambda^2}{4}) + r(\cos\varphi + \frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi) \qquad \text{(viii)}$$

elde edilir. Pistonun hızı ve ivmesi için de buradan türev alınarak

$$\dot{x}(\varphi) \cong -r(\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)\dot{\varphi} \qquad \text{(ix)}$$

ve

$$\ddot{x}(\varphi) \cong -r(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi)\dot{\varphi}^2 - r(\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)\ddot{\varphi} \qquad \text{(x)}$$

bulunur.

Hareket denkleminin elde edilmesi: Bu hazırlıklardan sonra, artık hareket denkleminin elde edilmesine geçilebilir. Bu amaçla ilkin makinanın genelleştirilmiş eylemsizliği hesaplanırsa

$$\Im = m_2 i_{O_2}^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^2} + m_A \frac{v_A^2}{\dot{\varphi}^2} + m_B \frac{v_B^2}{\dot{\varphi}^2} \qquad \text{(xi)}$$

den

$$v_A = r\dot{\varphi}, \quad v_B = \dot{x} \qquad \text{(xii)}$$

ile

$$\Im(\varphi) = m_2 i_{O_2}^2 + m_A r^2 + m_B r^2 (\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)^2 \qquad \text{(xiii)}$$

elde edilir. Buradan da merkezcil katsayı kolayca

$$C(\varphi) = m_B r^2 (\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi) \qquad \text{(xiv)}$$

şeklinde hesaplanır. Genelleştirilmiş kuvvet ise, pistona etkiyen viskoz sürtünme kuvvetinin de hesaba katılmasıyla

$$Q(\varphi) = M\frac{\dot\varphi}{\dot\varphi} + (F - c\dot x)\frac{\dot x}{\dot\varphi} \qquad \text{(xv)}$$

den (ix) dikkate alınarak

$$Q(\varphi) = M - r\left[F + cr(\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)\dot\varphi\right](\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi) \qquad \text{(xvi)}$$

şeklinde belirlenir. Artık makinanın hareket denklemi

$$\Im(q)\cdot\ddot q + C(q)\cdot\dot q^2 = Q(q,\dot q,t) \qquad \text{(xvii)}$$

genel denkleminde (xiii), (xiv) ve (xvi) nın yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned}&\left[\, m_2 i_{O_2}^2 + m_A r^2 + m_B r^2 (\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)^2 \,\right]\ddot\varphi \\ &\quad + m_B r^2 (\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi)\dot\varphi^2 \\ &\quad = M - r\left[F + cr(\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)\dot\varphi\right](\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi)\end{aligned} \qquad \text{(xviii)}$$

şeklinde elde edilir. İstenirse bu sonuç, açılıp düzenlenerek

$$\begin{aligned}&\left[\, m_2 i_{O_2}^2 + m_A r^2 + \tfrac{1}{2} m_B r^2 (1 + \tfrac{\lambda^2}{4} + \lambda\cos\varphi - \cos 2\varphi - \lambda\cos 3\varphi - \tfrac{\lambda^2}{4}\cos 4\varphi) \,\right]\ddot\varphi \\ &+ \tfrac{1}{4} m_B r^2 (-\lambda\sin\varphi + 2\sin 2\varphi + 3\lambda\sin 3\varphi + \lambda^2\sin 4\varphi)\dot\varphi^2 \\ &+ \tfrac{1}{4} c r^2 (-\lambda\sin\varphi + 2\sin 2\varphi + 3\lambda\sin 3\varphi + \lambda^2\sin 4\varphi)\dot\varphi + Fr(\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi) = M\end{aligned} \qquad \text{(xix)}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklem, piston hızının (ix) daki yaklaşık ifadesi kullanılarak elde edildiği için ancak yaklaşık olarak geçerlidir. Bu yaklaşıklıkla yetinilemeyen durumlarda piston hızı için (iv) ten doğrudan doğruya hesaplanan

$$\dot x(\varphi) = -r\left(\sin\varphi + \lambda\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right)\dot\varphi \qquad \text{(xx)}$$

kesin ifadesi kullanılarak kesin hareket denkleminin de elde edilebileceği açıktır.

4.4 MAKİNALARA ETKİYEN İŞLETME KUVVETLERİ

4.4.1 GENEL

Bir makinanın dinamik davranışı incelenmek istendiğinde, öncelikle, bu makinaya etkiyen kuvvetlerden verilmiş kuvvet sınıfına girenler hakkında bilgi edinilmesi gerekir. Eğer inceleme makinanın hareket denkleminin yazılmasını gerektiriyorsa, genelleştirilmiş kuvvetin ifade edilebilmesi için, bu kuvvetlerin kapalı formda ifade edilebilmesi de gerekli olur.

Makinalara etkiyebilecek kuvvetler üç ana başlık altında toplanabilir: Korunumlu kuvvetler, sürtünme kuvvetleri ve işletme kuvvetleri.

Bunlardan *korunumlu kuvvetler*, makina uzuvlarının ağırlık kuvvetlerini ve kuvvet kapalı eleman çifti oluşturmak, makinanın kararlı bir denge konumuna sahip olmasını sağlamak gibi konstrüktif gerekçelerle makinaya bağlanmış yaylara ait yay kuvvetlerini kapsar. Bu kuvvetler, korunumlu kuvvetlere ilişkin genel bilgiler çerçevesinde kolayca hesaba katılabileceği için bunlardan özel olarak söz etmeye gerek yoktur. Burada bu kuvvetlerin makinanın konumunun fonksiyonu olacaklarını ve çevrimler halinde çalışan makinalarda -ki çoğu makina böyledir- her çevrimde yapacakları net işin sıfır olacağını anımsatmakla yetinelim.

Sürtünme kuvvetleri ise makina uzuvlarının birbirine göre hareket halinde olduğu eleman çiftlerinde ortaya çıkan ve çoğunlukla ya kuru sürtünme (Coulomb) modeline ya da viskoz sürtünme modeline uyan kuvvetlerdir. Bu ders çerçevesinde makinaların ideal sistemler oldukları varsayıldığından (Bkz. Bl. 2.4.2.3) Coulomb yasasına uyan kuru sürtünme kuvvetleri hesaba katılmayacaktır. Esasen, uygulamada hareketli makina kısımları arasında kuru sürtünme oluşumuna engel olunmaya çalışıldığı ve bu amaçla yağlamaya baş vurulduğu anımsanırsa bunun çok büyük bir eksiklik yaratmayacağı anlaşılır. Yağlamalı temas halinde ortaya çıkan sürtünme kuvvetleri ise, bilindiği gibi, viskoz sürtünme modeline uyarlar. İlgili viskoz sürtünme katsayısının belirlenmesi sorunu bir yana bırakılırsa bu kuvvetler de genel bilgiler çerçevesinde kolayca hesaba katılabilecek kuvvetlerdir. Bu yüzden burada sürtünme kuvvetlerinden de özel olarak söz etmeye gerek bulunmamaktadır.

Geriye *işletme kuvvetleri* kalır ki bu kuvvetler doğrudan doğruya makinaların göreviyle ilgili kuvvetlerdir. Yalnızca makinalara özgü kuvvetler olduklarından genel mekanik bilgileri çerçevesinde yer almayan bu kuvvetlerden burada kısaca söz edilmesi yerinde olacaktır. İşletme kuvvetleri ana başlığı altına giren iki grup kuvvet vardır. Bunlar *çalıştırma kuvvetleri* ve *iş kuvvetleri*dir. Aşağıda işletme kuvvetleri, bu gruplara karşılık gelen iki ana başlık altında ele alınacaktır.

4.4.2 ÇALIŞTIRMA KUVVETLERİ • MOTORLAR

Bilindiği gibi makinalar, kendileri de birer makina olan ve özel olarak *güç makinaları* ya da *kuvvet makinaları* diye adlandırılan *motorlar* tarafından çalıştırılırlar. *Motorların makinalara uyguladıkları kuvvetlere çalıştırma kuvvetleri denir*.

Kuvvet makinaları çok çeşitlidir. Bu çeşitlilik yeni buluşlarla giderek artmaktadır ve kuşkusuz gelecekte de artacaktır. Buhar makinaları, buhar, su ve gaz türbinleri, içten yanmalı motorlar, doğru akım ve alternatif akım elektrik motorları mevcut çeşitlerin başlıcalarıdır. Bunlardan, Newcomen[2] tarafından keşfedilip Watt[3] tarafından mükemmelleştirilen ve Stephenson[4] tarafından lokomotiflere uygulanan buhar makinası, vaktinde sanayi devriminin itici gücünü oluşturan büyük bir buluş olmakla birlikte bugün artık devrini kapatmış durumdadır. Ataları olan yel ve su değirmenlerinin mükemmel torunları olan türbinler ise enerji santralleri ve uçaklar gibi özel uygulama alanları dışında pek kullanılmayan kuvvet makinalarıdır. Bu yüzden biz burada, makinacılıkta en yaygın kullanım alanına sahip olan içten yanmalı motorlarla elektrik motorlarına değinip bunların vereceği çalıştırma kuvvetlerinin özelliklerini gözden geçirmekle yetineceğiz.

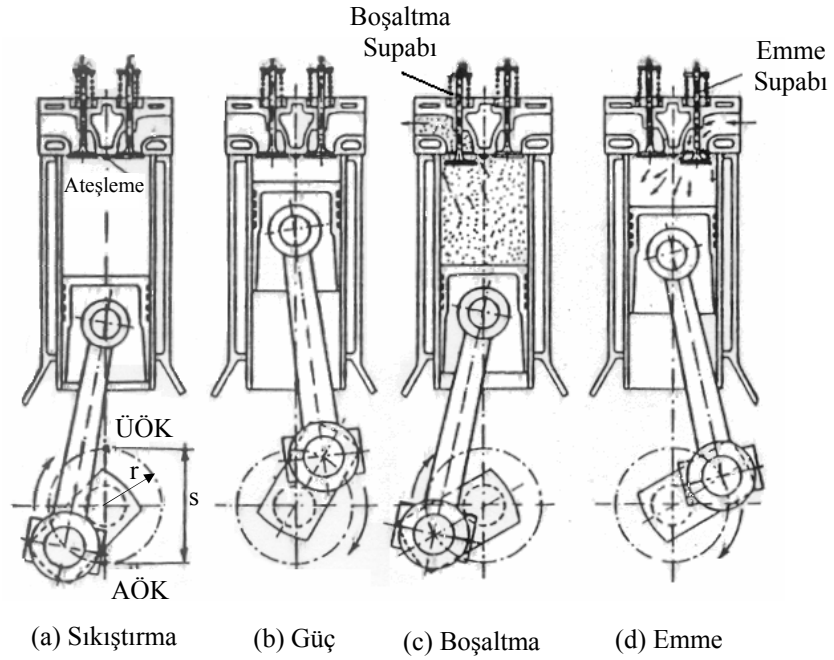
4.4.2.1 İçten Yanmalı Motorlar

İçten yanmalı motorlar krank-biyel mekanizmasını esas alan kuvvet makinalarıdır. Bilindiği gibi bu motorların temel çalışma ilkesi, bir silindir içerisinde oluşturulan yanma ya da patlamalarla krank-biyel mekanizmasının pistonunun harekete geçirilmesi ve bu şekilde üretilen gücün kranktan dönme hareketi ve moment olarak alınmasıdır. İçten yanmalı motorlar, krankın her devrinde bir yanma/patlamanın gerçekleştiği *2 zamanlı* motorlar ve her iki devirde bir yanma/patlamanın gerçekleştiği *4 zamanlı* motorlar olarak ikiye ayrılırlar. Bir başka önemli ayrım da, *benzin motorları* (ya da *ateşlemeli motorlar*) ve *Diesel*[5] *motorları* (ya da *püskürtmeli motorlar*) ayrımıdır. 2 zamanlı motorlar, motorlu bisikletler, küçük su pompaları gibi güç gereksinimi düşük olan makinaların çalıştırılmasında; 4 zamanlı motorlar ise daha yüksek güç gereksinimine gerek duyulan yerlerde kullanılırlar. Yine, ağır taşıtlar, lokomotifler, gemiler, büyük elektrik üreteçleri gibi yüksek güç gereksinimi olan makinaların çalıştırılmasında Diesel motorları; küçük ve orta güç gereksinimi olan makinaların çalıştırılmasında ise benzin motorları yeğlenir. İçten yanmalı motorlar arasında en yaygın kullanılanlar, binek taşıtlarında yeğlenen 4 zamanlı benzin motorlarıdır.

Şekil 4.4.1 de 4 zamanlı bir benzin motorunun çalışma evreleri gösterilmiştir. Pistonun alt ölü konum (AÖK) ile üst ölü konum (ÜÖK) arasındaki s=2r yolunu her katedişi -ki bu katedişlere *strok* adı verilir- bir çalışma evresine karşılık gelir. İlk evre *sıkıştırma stroğu*dur (Şek. 4.4.1-a). Bu evrede piston AÖK'dan ÜÖK'a kadar ilerlerken benzin-hava karışımını sıkıştırarak patlamaya hazır hale getirir. Piston ÜÖK'a yaklaştığında ateşleme gerçekleştirilir, patlama olur ve ikinci evre başlar. İkinci evre *güç* (ya da *genişleme*) *stroğu*dur (Şek. 4.4.1-b). Bu evrede silindir içerisindeki basınçlı gazlarca itilen piston ÜÖK'dan AÖK'a kadar ilerler. Piston AÖK'a yaklaştığında boşaltma (egzos) supabı açılır ve üçüncü evre başlar. Üçüncü evre *boşaltma stroğu*dur (Şek. 4.4.1-c). Bu evrede piston AÖK'dan ÜÖK'a kadar

---

[2] Thomas Newcomen (1663-1729). İngiliz mekanikçi. Buhar gücünü ilk kez hareket elde etmekte kullanan Thomas Savery'nin (İng., 1650-1715) fikrini geliştirerek 1705 yılında ilk buhar makinasını yaptı.
[3] James Watt (1736-1819). İskoçyalı mühendis. Newcomen'in buhar makinasını 1767-1780 yılları arasında adım adım geliştirdi. Regülatörü ve eylemsizlik çarkını icat etti.
[4] George Stephenson (1781-1848). İngiliz mühendisi. 1814 yılında ilk buharlı lokomotifi yaptı.
[5] Rudolf Diesel (1858-1913). Alman mühendisi. 1897 de ilk Diesel motorunu yaptı.



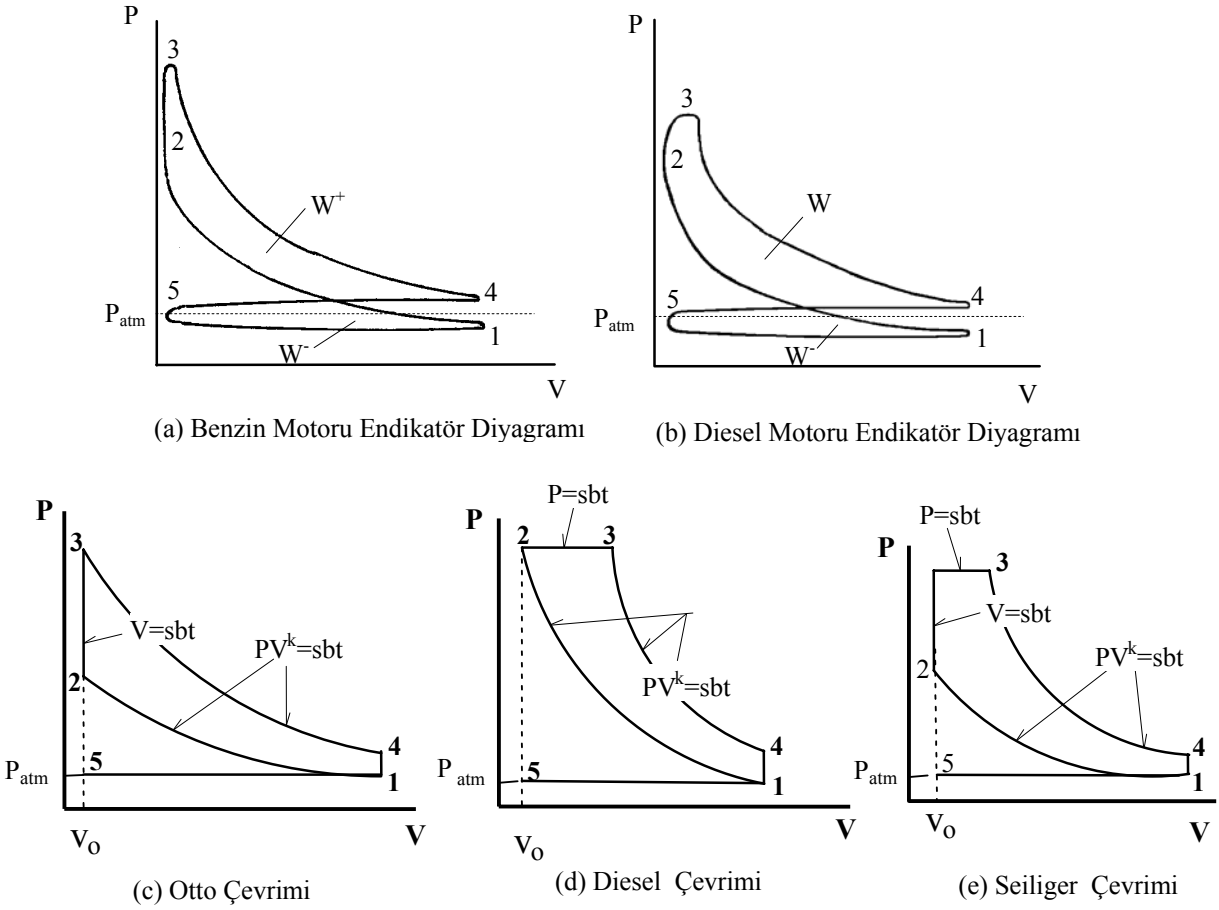
Şekil 4.4.1 4 Zamanlı Benzin Motorunun Çalışma Evreleri

ilerleyerek yanmış gazları dışarıya atar. Bu evrenin sonunda boşaltma supabı kapanır, emme supabı açılır ve dördüncü evre başlar. Dördüncü evre *emme stroğu*dur (Şek. 4.4.1-d). Bu evrede piston ÜÖK'dan AÖK'a kadar ilerleyerek benzin-hava karışımını silindirin içine emer. Bu evrenin sonunda emme supabı kapanır ve çevrim tamamlandığı için yeniden ilk evreye dönülür.

4 zamanlı Diesel motorlarının çalışma evreleri de yukarıdakine benzer şekildedir. Şu farkla ki Diesel motorlarında emme stroğunda emilen yakıt-hava karışımı değil yalnızca taze havadır. Yakıt silindire, benzin motorlarında ateşlemenin gerçekleştiği aşamada, püskürtülerek verilir ve ortam basınç ve sıcaklığı buna uygun olduğu için yanma ateşlemesiz olarak kendiliğinden oluşur.

Şimdi, bu düzende çalışan bir motorun, krank miline bağlanacak bir makinaya uygulayacağı çalıştırma kuvvetinin (moment) belirlenmesi konusuna eğilelim.

Kuşkusuz bu kuvvetin ana kaynağı, silindir içerisindeki gazın pistona uyguladığı P basıncıdır ve bu basınç yukarıda açıklanan evreler boyunca değişmektedir. Basıncın bu değişimi her motorda birbirinden az ya da çok farklı bir gidiş izler. İmal edilmiş bir motorda basıncın nasıl değiştiği, o motor için deneysel olarak belirlenen diyagramlar yardımıyla tanımlanır. Motorun en önemli karakteristiğini oluşturan ve *endikatör diyagramı* adı verilen bu diyagramlar, krank milinin belli ve sabit bir ω açısal hızıyla dönmesi hali için P basıncının, pistonun silindir içerisinde hapsettiği V hacmiyle değişimini gösterirler. Şekil 4.4.2-a da 4 zamanlı bir benzin motoruna, Şekil 4.4.2-b de ise 4 zamanlı bir Diesel motoruna ait endikatör diyagramları gösterilmiştir. Bu diyagramlarda 1-2 aralığı sıkıştırma stroğuna, 2-3 aralığı patlama/yanmanın oluşumuna, 3-4 aralığı güç stroğuna, 4-5 aralığı boşaltma stroğuna, 5-1 aralığı ise emme stroğuna karşılık gelmektedir.



Şekil 4.4.2 Endikatör Diyagramları ve İdeal Çevrimler

Benzin ve Diesel motorları için, Şekil 4.4.2-a ve b de verilenlerin idealleştirilmiş karşılıkları olan kuramsal endikatör diyagramları da oluşturulabilir. Böyle üç diyagram da Şekil 4.4.2-c, d ve e de gösterilmiştir. Benzin motorlarına ilişkin kuramsal diyagramdaki çevrim *Otto*[6] *çevrimi* ya da *patlama çevrimi* adını alır (Şek.4.4.2-c). Diesel motorlarına ilişkin olarak ise *Diesel çevrimi* ya da *yanma çevrimi* (Şek. 4.4.2-d) ve *Seiliger çevrimi* ya da *karma çevrim* (Şekil 4.4.2-e) adını alan iki farklı model vardır. Günümüz Diesel motorları daha çok Seiliger çevrimine göre çalışmaktadır. Bu kuramsal çevrimler, benzin ve Diesel motorlarının çalışma ilkelerindeki başlıca farkı açıkça ortaya koymaktadır: Benzin motorlarında yanma, pistonun hareket etmesine zaman tanımayan ani bir patlama şeklinde olmakta ve sabit hacimde bir basınç sıçramasına yol açarak gerçekleşmekte; Diesel motorlarında ise yanmanın ya tamamı (Diesel çevrimi) ya da bir kısmı (Seiliger çevrimi) bir süreç şeklinde olmakta ve bu arada piston hareket edip hacim genişlediği halde yanma basıncın sabit kalmasını sağlamaktadır. Bu kuramsal diyagramların göze çarpan bir başka özelliği de sıkıştırma ve genişleme evrelerindeki olayları adyabatik kabul edip $PV^k = \text{sabit}$ şeklinde modellemeleridir.

Motora ilişkin temel bazı bilgiler endikatör diyagramından kolayca elde edilebilir. Örneğin, endikatör diyagramındaki çevrimin çerçevelediği alanın, gaz kuvvetlerinin bir çevrimde yaptığı W işinden başka bir şey olmadığına dikkat edilerek ve bu çevrimin, ω endikatör diyagramına esas oluşturan krank hızını göstermek üzere, 4 zamanlı bir motorda

[6] Nikolaus Otto (1832-1891). Alman mühendisi. 1863 te ilk benzin motorunu yaptı.

$$T = \frac{4\pi}{\omega} \tag{4.4.1}$$

kadar süre alacağı hesaba katılarak, motorun ortalama gücü, endikatör diyagramındaki çevrimin alanı yardımıyla

$$G_{en} = \frac{W}{T} = \frac{W\omega}{4\pi} \tag{4.4.2}$$

şeklinde hesaplanır. Buna *motorun endike gücü* denir. Endike güç yardımıyla da kranka etkiyen, dolayısıyla da motora bağlanacak bir makinaya iletilecek *ortalama endike döndürme momenti*

$$\overline{M}_{en} = \frac{G_{en}}{\omega} = \frac{W}{4\pi} \tag{4.4.3}$$

şeklinde hesaplanabilir. Şekil 4.4.2-a,b deki gibi gerçek endikatör diyagramları ile çalışılırken üstteki çevrimin W^+ alanının gazın piston üzerine, alttaki çevrimin W^- alanının ise pistonun gaz üzerine yaptığı işi gösterdiği dikkate alınarak, yukarıdaki hesaplarda $W=W^+-W^-$ net işi kullanılmalıdır. (4.4.2) ve (4.4.3) te verilen endike değerlerlerin, motordaki sürtünme kayıpları dikkate alınmadan hesaplandıkları için, kendilerine karşılık gelen gerçek değerlerden bir miktar büyük olduklarını belirtelim.

(4.4.3) bağıntısı, krankının sabit ω açısal hızıyla dönmesi halinde 4 zamanlı, içten yanmalı bir motorun vereceği döndürme (çalıştırma) momentinin ortalama değerini vermektedir. Bu momentin an be an nasıl değiştiğinin belirlenmesi biraz daha zahmetli bir iştir. Bunun için ilkin, endikatör diyagramından yararlanılarak, pistona etkiyen F_{gaz} gaz kuvvetinin φ krank konumuyla değişiminin belirlenmesi gerekir. Bu amaçla endikatör diyagramındaki V hacminin

$$V(x) = V_0 + (r + \ell - x) \cdot A \tag{4.4.4}$$

şeklinde x piston konumunun fonksiyonu olduğuna, x piston konumunun ise

$$x(\varphi) \cong r\cos\varphi + \ell(1 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\varphi)$$

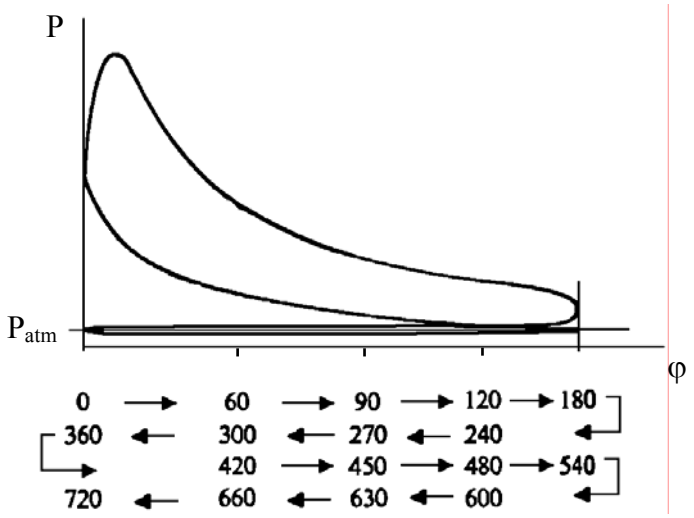
şeklinde φ krank açısının fonksiyonu olduğuna dikkat edilerek bu diyagramın bir P-φ diyagramı olarak görülmesi (Şek. 4.4.3); buradan okunacak $P(\varphi)$ lerin (tek etkili motorlarda) pistonun öbür yüzüne etkiyen atmosfer basıncıyla farkının alınarak

$$P_{et}(\varphi) = P(\varphi) - P_{atm} \tag{4.4.5}$$

şeklindeki etkin basınca geçilmesi ve buradan pistona etkiyen net gaz kuvvetinin

$$F_{gaz}(\varphi) = P_{et}(\varphi) \cdot A \tag{4.4.6}$$

şeklinde hesaplanması gerekir. Bu hesapta V_0 , piston ÜÖK'da iken silindir hacmini, A, piston yüzey alanını göstermektedir ve krank-biyel mekanizmasının kinematiğine



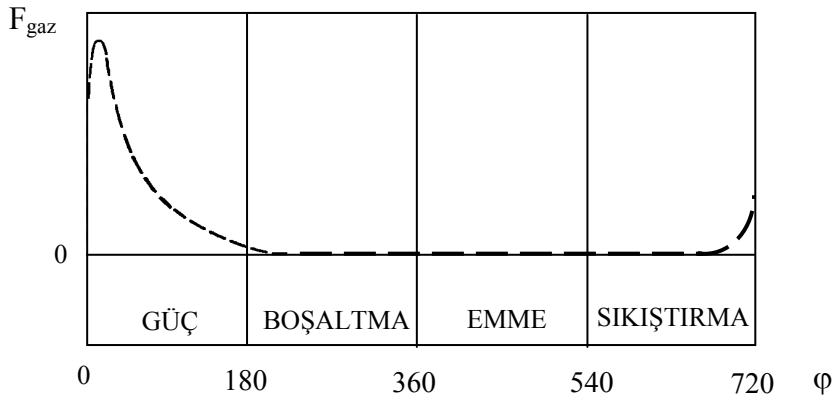
Şekil 4.4.3 P-φ Diyagramı

ilişkin x(φ) nin hesabında Problem 4.3.2 de elde edilen yaklaşık ifade kullanılmıştır. Şekil 4.4.4 te 4 zamanlı bir benzin motorunun bir silindirine ait $F_{gaz}(\varphi)$ diyagramı gösterilmiştir.

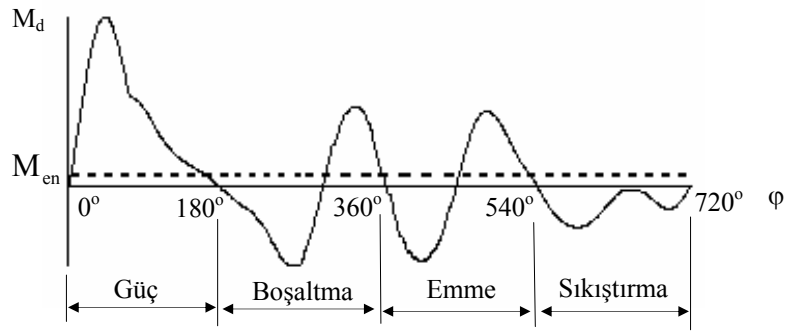
$F_{gaz}(\varphi)$ nin belirlenmesinden sonra, krank miline etkiyen döndürme momentinin ifadesine geçilebilir. Bunun için krank-biyel esaslı makinaların Problem 4.3.2 de elde edilen hareket denklemi kullanılabilir. Bu amaçla, şimdiki problemde $F = -F_{gaz}(\varphi)$, c=0, $\dot{\varphi} = \omega = \text{sabit}$, $\ddot{\varphi} = 0$ alınması gerektiğine dikkat edilerek Pr. 4.4.5 teki (xviii) denklemine gidilirse,

$$M(\varphi) = r\left[m_B r\omega^2(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi) - F_{gaz}(\varphi)\right]\cdot(\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi) \qquad (4.4.7)$$

elde edilir. Bu, $F_{gaz}(\varphi)$ nin etkisi altındaki makinada krank milinin $\dot{\varphi} = \omega = \text{sabit}$ hızıyla dönmesi için ona makinanın dışından uygulanması gereken momenttir. Olaya tersinden bakılırsa, bu koşullar altında krankın da dışarıya (4.4.7) dekinin ters işaretlisi olan bir döndürme momenti uygulayacağı anlaşılır:



Şekil 4.4.4 Gaz Kuvvetlerinin Krank Açısıyla Değişimi



Şekil 4.4.5 4 Zamanlı Bir Benzin Motorunda Tek Silindire Ait Döndürme Momenti Diyagramı

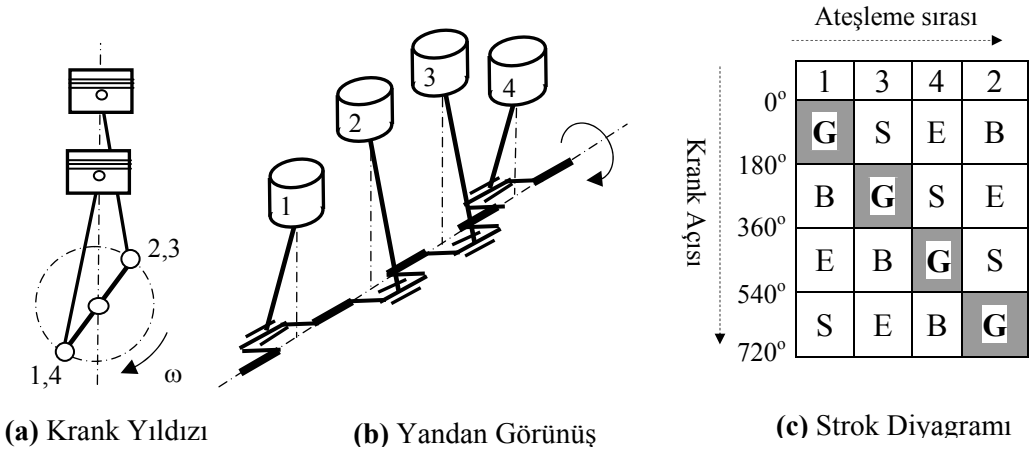
$$M_d(\varphi) = r\left[F_{gaz}(\varphi) - m_B r\omega^2(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi)\right]\cdot(\sin\varphi + \tfrac{\lambda}{2}\sin 2\varphi) \qquad (4.4.8)$$

Burada, köşeli parantez içerisindeki ikinci terimin, öteleme hareketi yapan m_B kütlesinin eylemsizlik etkisini yansıttığı ortadadır. (4.4.8) ifadesinin analitik olarak yazılabilmesi için $F_{gaz}(\varphi)$ için Şekil 4.4.4 teki grafikten bir eğri uydurma yöntemiyle analitik bir ifade elde edilmesi gerekir. Aksi takdirde (4.4.8) ancak nokta nokta değerlendirilebilecektir. (4.4.8) deki döndürme momentinin 4 zamanlı motor için iki krank turu süren bir çevrim içerisindeki ortalamasının -(4.4.8) in dayandığı yaklaşıklıkların getireceği fark dışında- (4.4.3) teki ortalama döndürme momentini vereceğini belirtelim:

$$\overline{M}_{en} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} M_d(\varphi)d\varphi \qquad (4.4.9)$$

Şekil 4.4.5 te 4 zamanlı bir benzin motorunun bir silindirine ait döndürme momenti diyagramı, ortalama moment ve motorun çalışma evreleri de işaretlenerek gösterilmiştir. Bu diyagramdan, döndürme momentinin ortalama değer etrafında büyük dalgalanmalar gösterdiği görülmektedir. Bu noktada, bu kadar değişken bir momentin etkisindeki krankın nasıl olup da sabit ω açısal hızıyla dönebildiği sorusu akla gelebilir. Bu sorunun Bölüm 7 de yanıtını bulacağını belirtip devam edelim.

Çoğu motorun tek bir silindire değil, birbiriyle özdeş bir çok silindire sahip olduğu bilinmektedir. Şekil 4.4.5 te bir silindirine ait döndürme momenti diyagramı verilen 4 zamanlı benzin motorunun 4 silindirli olduğunu ve krank yıldızının farklı krank kolları arasında 180^0 lik açılar bulunacak şekilde tasarlandığını düşünelim (Şek. 4.4.6 a,b). Ayrıca silindirlerin ateşleme sırasının 1-3-4-2 olduğunu varsayalım. Bu düzenlemenin değişik silindirlerin güç stroklarının birbirini izlemesine ve, Şekil 4.4.6 c deki strok diyagramından görüldüğü gibi, tek silindir halindekine oranla çok daha dengeli bir güç dağılımı sağlanmasına olanak vereceği ortadadır. Bu durumda motorun toplam döndürme momenti diyagramı da Şekil 4.4.7 de ayrı ayrı gösterilen dört özdeş döndürme momenti diyagramının süperpozisyonu (toplamı) olarak, 180^0 lik peryodla kendini yineleyen, daha az dalgalı bir diyagram görünümünü alır.



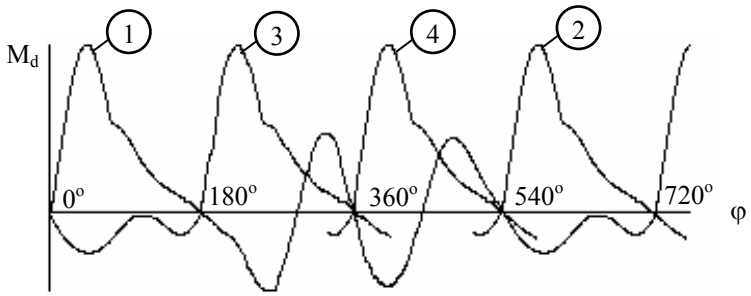
Şekil 4.4.6 4 Silindirli 4 Zamanlı Motor

İçten yanmalı motorların vereceği çalıştırma kuvvetleri ile ilgili olarak şu ana kadar hep krankın belli ve sabit bir ω açısal hızıyla dönmesi haline ilişkin endikatör diyagramlarına dayalı değerlendirmeler yaptık. Oysa farklı bir ω krank hızına geçildiğinde, endikatör diyagramı da, buna bağlı olarak yukarıdaki sonuçların tamamı da değişecektir. Bu değişim hakkında bir fikir vermek üzere Şekil 4.4.8 deki *motor performans eğrileri* diyagramını dikkate alalım. Bu diyagramdan görüldüğü gibi içten yanmalı motorlarda $\overline{M}$ ortalama döndürme momenti de G_{en} endike gücü de motor devir sayısıyla değişmektedir. Diyagramda bunların yanısıra, yakıt harcamasının ve sürtünme yüzünden kaybolan gücün de devir sayısıyla değişimi gösterilmiştir. Buradan, içten yanmalı motorlardan yüksek performans alınabilmesi için onların belli hızlarda çalıştırılmaları gerektiği sonucunun çıktığına işaret ettikten sonra bu bölümde, içten yanmalı motorlarla ilgili elde edilen bilgileri toparlayalım.

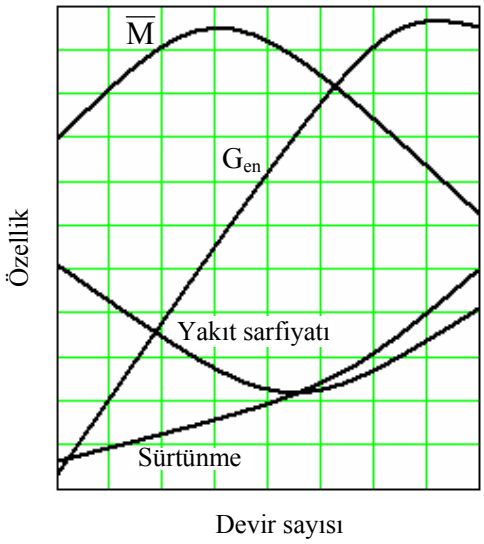
İçten yanmalı motorların vereceği çalıştırma momentleri, genel olarak $\dot{\varphi} = \omega$ hızının ve φ konumunun fonksiyonudurlar. φ ile fonksiyonel ilişki, k motorun kaç zamanlı, kaç silindirli olduğuna, krank yıldızının şekli ve ateşleme sırasına bağlı bir rasyonel sayı olmak üzere, $2k\pi$ peryoduyla peryodiktir. Bu sonucu

$$M_d = M_d(\varphi, \omega) = M_d[\varphi + 2k\pi, \omega] \qquad (4.4.10)$$

şeklinde not ederek bu bölümü kapatalım.



Şekil 4.4.7 Örnek Motorun Farklı Silindirlerine Ait Döndürme Momenti Diyagramları

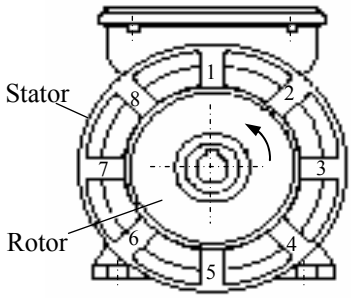


Şekil 4.4.8 Motor Performans Eğrileri

4.4.2.2 Elektrik Motorları

Elektrik motorları, *stator* adı verilen sabit bir kısım ile onun içerisinde dönen ve *rotor* adı verilen bir kısımdan oluşan çok basit bir mekanizmaya sahip kuvvet makinalarıdır (Şek. 4.4.9). Tablo 4.1 de, elektrik motorlarının bir sınıflandırması verilmiştir. Bu tablodan görüleceği gibi, farklı amaçlarla kullanılmaya elverişli, farklı bir çok elektrik motoru tipi vardır. Bir iş için en uygun elektrik motorunun seçimi, ciddi bilgi ve deneyim gerektirir. Tablo 4.1 de yer alan motor tipleri arasında en yaygın kullanılanlar, kafesli, asenkron, alternatif akım motorlarıdır. Bu nedenle bu bölümde, (Thomson[7]'un senkron alternatif akım motorunu icat etmesinden sonra) Tesla[8] tarafından icat edilmiş olan bu tip motorlar ve bunların vereceği çalıştırma momentleri üzerinde durmakla yetinilecektir.

Asenkron motorların verdiği çalıştırma ya da döndürme momentleri (M_d diyelim), rotorlarının $\dot{\varphi} = \omega$ açısal hızıyla değişir. Bu nedenle bir asenkron motorun

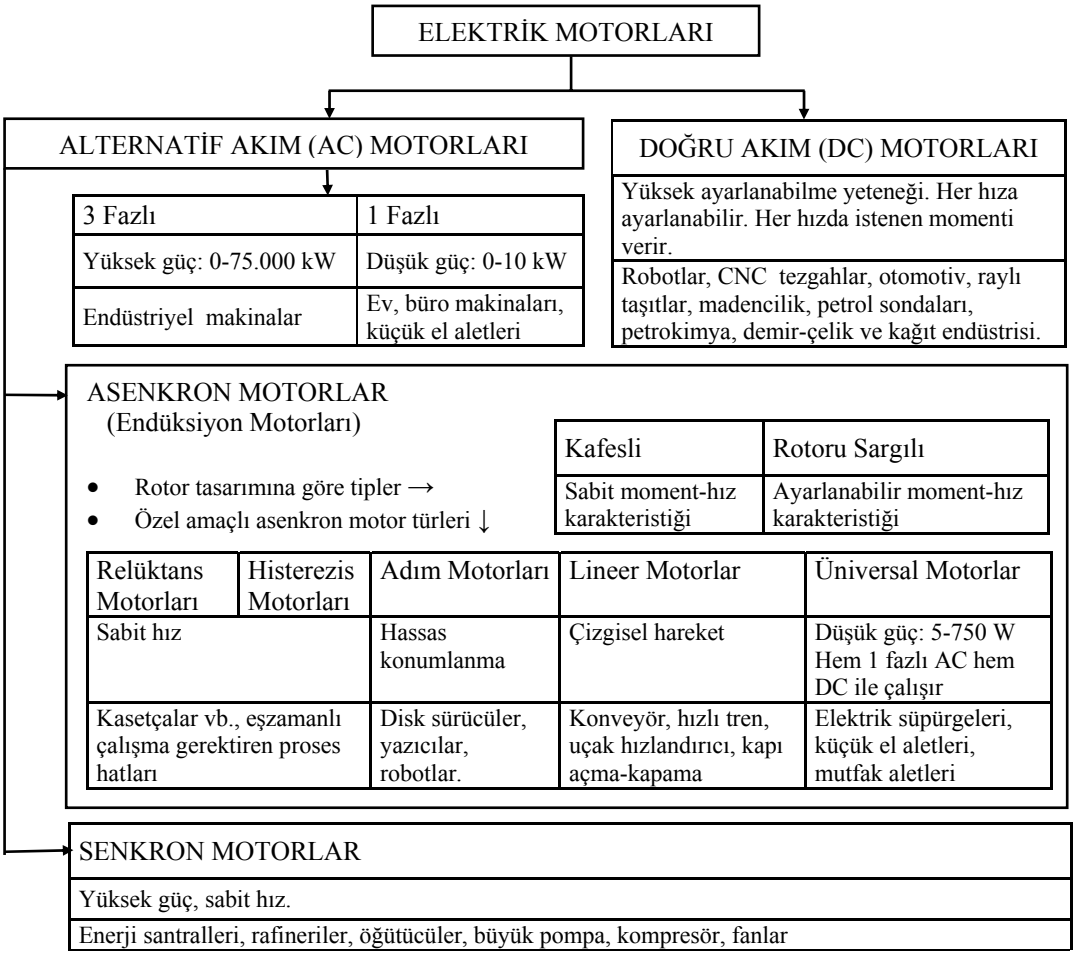


Şekil 4.4.9 8 Kutuplu (p=4) Bir Elektrik Motoru

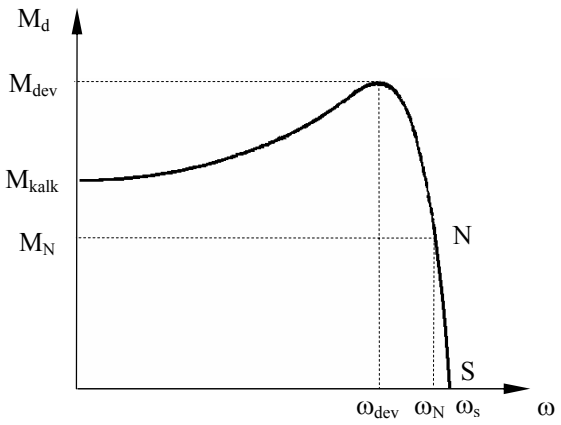
[7] Elihu Thomson (1853-1937). İngiliz kökenli Amerika'lı mühendis. Elektrik endüstrisinin öncülerinden. Senkron alternatif akım motorunu (1879), elektrik direnç kaynağını, tepkimeli motoru (1888), elektrik sayacını vb. icat etti.

[8] Nikola Tesla (1857-1943). Hırvat elektrik mühendisi. Asenkron elektrik motorunun (1888) yanı sıra çok fazlı elektrik akımını ve yüksek frekanslı alternatörü (1891) icat etti.

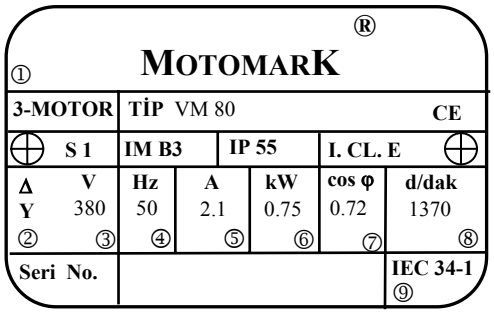
Tablo 4.1 Elektrik Motorlarının Sınıflandırılması



en önemli tanıtıcısı bu değişimi gösteren $M_d - \omega$ diyagramıdır. Buna motorun *moment karakteristiği* denir. Şekil 4.4.10-a da tipik bir moment karakteristiği örneği gösterilmiştir. Motora ilişkin temel bazı bilgiler bu karakteristikten kolayca çıkartılabilir. Bunlar, motorun sıfır hızda vereceği döndürme momenti olan M_{kalk} *kalkış momenti*, motorun vereceği döndürme momentinin sıfıra düştüğü hız olan ω_s *senkron hızı* ve moment karakteristiğinin yükselişten düşüşe geçtiği *devrilme noktasına* karşılık gelen M_{dev} *devrilme momenti* ve ω_{dev} *devrilme hızı* dır. Bunlardan M_{kalk}, motorun çalıştırdığı makinayı sıfır hızdan ivmelendirme yeteneğinin bir ölçüsüdür. M_{kalk} ne kadar büyükse motor makinayı o kadar kısa sürede nominal çalışma hızına ulaştırabilecektir. M_{dev} ile ω_s ise motordan elde edilebilecek en büyük moment ile en yüksek hızı; yani motorun performans sınırlarını tanımlamaktadır. Ancak bütün bu bilgiler sınır hallere ilişkindir. Motor, asıl, Şekil 4.4.10-a daki diyagramda N ile gösterilen noktadaki koşullarda çalışmak üzere tasarlanmıştır. Bu noktaya *nominal çalışma noktası*, ona karşılık gelen M_N momentine *nominal moment* (ya da *anma momenti*) ω_N hızına ise *nominal hız* (ya da *anma hızı*) adı verilir. Asenkron motorların tanıtım etiketlerinde ω_N nominal hızı ile G_N *nominal gücü* tanıtım bilgisi olarak yer alır (Bkz. Şekil 4.4.10-b). Buradan nominal momentin de



(a) Motor Karakteristiği



①Faz sayısı ②Klemens bağlantı şekli ③Anma gerilimi ④Anma frekansı ⑤Anma akımı ⑥Anma çıkış gücü ⑦Güç katsayısı ⑧Anma devir sayısı ⑨Uluslararası standart

(b) Motor Tanıtım Etiketi

OUTPUTS AND ELECTRIC DATA	Voltage	(Gerilim)	: 380 V
Asynchronous Three-Phase Motors	Frequency	(Frekans)	: 50 Hz
	Int. Protection	(Koruma Sınıfı)	: IP 55
İŞLETME DEĞERLERİ	Insulation Class	(Yalıtım Sınıfı)	: F
Üç Fazlı Asenkron Motorlar	Duty Type	(İşletme Türü)	: S1

Type Tip	Rated Values / Anma Değerleri								Starting Data / Kalkış Değerleri		Break down Torque Ratio	Weight B3
	Output		Voltage	Speed	Current	Power Factor	Efficiency	Torque	Current Ratio	Torque Ratio		
	Anma Gücü		Gerilim	Hız	Akım	Güç Faktörü	Verim	Moment	Akım Oranı	Moment Oranı	Devrilme Momenti Oranı	Ağırlık B3
	kW	HP	V	rpm d/dak	A	Cos φ	η %	Nm	Iklk / I_N	Mklk / M_N	Mdv / M_N	kg
4 poles / 4 kutuplu												
VM 63	0.12	1/6	380	1365	0.5	0.60	60	0.8	3.0	2.3	2.4	4.5
VM 63	0.18	1/4	380	1345	0.9	0.60	58	1.3	2.3	2.0	2.0	5.0
VM 71	0.25	1/3	380	1350	0.9	0.70	60	1.7	3.2	2.0	2.1	5.0
VM 71	0.37	1/2	380	1390	1.4	0.66	64	2.5	3.7	2.4	2.5	6.0
VM 80	0.55	3/4	380	1365	1.6	0.75	70	3.9	3.5	1.8	2.0	7.5
VM 80	0.75	1	380	1370	2.1	0.72	73	5.2	4.1	1.9	2.0	8.6
VM 90S	1.1	1.5	380	1380	2.7	0.80	78	7.7	4.6	2.2	2.3	11.3
VM 90L	1.5	2	380	1390	3.7	0.80	80	10.3	4.8	2.5	2.7	13.3
[illegible]	[illegible]	3	[illegible]	1400	[illegible]	[illegible]	81	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

(c) Motor Kataloğu

Şekil 4.4.10 Asenkron Elektrik Motoru

$$M_N = \frac{G_N}{\omega_N} \tag{4.4.11}$$

şeklinde hesaplanabileceğine dikkat edilirse, N noktasının her motorda bir etiket bilgisi olarak tanımlı olduğu anlaşılır. Öte yandan, ω_S senkron hızı da şebeke frekansı f ve motordaki kutup çifti sayısı p cinsinden, kolayca

$$\omega_S = \frac{2\pi f}{p} \tag{4.4.12}$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada Türkiye'de şebeke frekansının f=50 Hz olduğunun ve motorda toplam 2p kutup varsa kutup çifti sayısının p olacağının dikkate alınması yeterlidir.

Şimdi bir asenkron motorun vereceği ve hıza bağlı olduğunu gördüğümüz döndürme momentinin $M_d = M_d(\omega)$ şeklinde ifade edilmesi olanakları üzerinde duralım. Elde motorun moment karakteristiği varsa, bir eğri uydurma yöntemiyle böyle bir ifade elde edilebilir ise de bu karakteristiğe ulaşmak her zaman olanaklı değildir. Bu gibi durumlarda karakteristiğin N noktası civarındaki gidişinin yaklaşık olarak doğrusal olduğuna dikkat edilerek (ki çoğu motorda bu böyledir) yalnızca bu civarda ve yaklaşık olarak geçerli olmak üzere karakteristiğin yerine NS doğrusu alınabilir. Bunun için motorun etiket bilgisinden ve (4.4.11,12) bağıntılarından yararlanarak belirlenen ω_N, M_N ve ω_s değerleri yeterli olur:

$$M_d(\omega) \cong \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s - \omega_N} \cdot M_N = \left(\frac{\omega_s \cdot M_N}{\omega_s - \omega_N}\right) - \left(\frac{M_N}{\omega_s - \omega_N}\right) \cdot \omega \qquad (4.4.13)$$

Öte yandan, karakteristiği Şekil 4.4.10-a daki gibi olan motorların moment karakteristiğinin bütününde geçerli olan ve yaygın olarak kullanılan bir başka yaklaşık ifade de, karakteristiğin devrilme noktasına ilişkin verileri kullanan

$$M_d(\omega) \cong \frac{2M_{dev}}{\frac{\omega_s - \omega}{\omega_s - \omega_{dev}} + \frac{\omega_s - \omega_{dev}}{\omega_s - \omega}} \qquad (4.4.14)$$

ifadesidir. Bu ifadeden yola çıkılarak, biri kalkış noktası civarında, biri nominal çalışma noktası civarında geçerli olan daha basit iki ifade de türetilebilir. Bu amaçla, *kalkış noktası civarında* $\omega_s - \omega_{dev} < \omega_s - \omega$ olacağına göre (4.4.14) ün paydasındaki ikinci terim birincinin yanında ihmal edilirse, bu bölgede geçerli olan

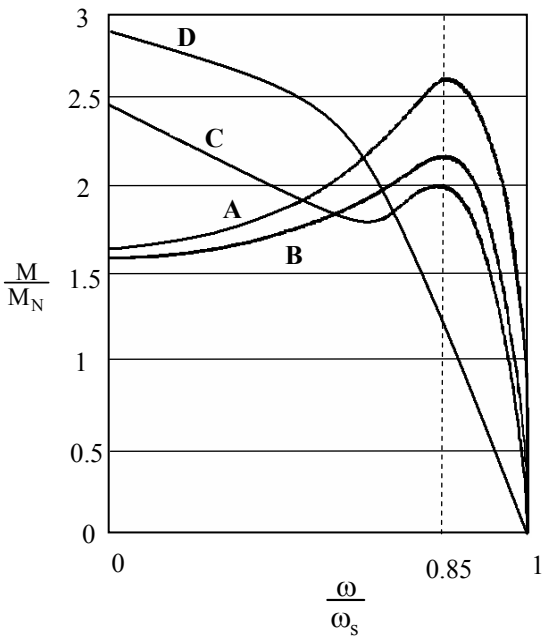
$$M_d(\omega) \cong 2M_{dev} \frac{\omega_s - \omega_{dev}}{\omega_s - \omega} \qquad (4.4.15)$$

ifadesi; *nominal çalışma noktası civarında* ise, bu bölgede $\omega_s - \omega_{dev} > \omega_s - \omega$ olacağından, bu kez de birinci terim ikincinin yanında ihmal edilerek

$$M_d(\omega) \cong 2M_{dev} \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s - \omega_{dev}} \qquad (4.4.16)$$

ifadesi elde edilir. Dikkat edilirse bu son ifade, tıpkı (4.4.13) ifadesinde olduğu gibi, karakteristiğin anılan bölgedeki gidişini bir doğru ile temsil etmektedir.

Bütün asenkron elektrik motorlarının karakteristikleri Şekil 4.4.10-a daki görünümde değildir. Farklı bir tip olarak, karakteristiği Şekil 4.4.11 deki D eğrisi görünümünde olan ve $M_{kalk} = M_{dev}$ özelliğine sahip olan motorlar göz önüne alınırsa, bunlardaki moment-hız ilişkisinin de, yaklaşık olarak



Şekil 4.4.11 Asenkron Motor Karakteristiği Tipleri

$$M_d(\omega) \cong M_{kalk}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right] \qquad (4.4.17)$$

parabolüyle temsil edilebileceği kolayca görülebilir.

Yukarıda, asenkron motorlarda M_{kalk} kalkış momentinin büyüklüğünün, çalıştırılan makinanın nominal hıza ne kadar çabuk ulaşacağının bir ölçüsü olduğunu belirtmiştik. Bu husus, bir makinaya motor seçerken, motorun nominal değerlerinin yanı sıra dikkate alınması gereken önemli bir ölçüt oluşturur. Genel olarak, düşük eylemsizliğe sahip olan, kesintisiz çalışan ve kalkışı tam yükle yapmayan makinalarda düşük M_{kalk} kalkış momentine sahip motorlar; bunun tersi, yani büyük eylemsizliğe sahip olan, sık sık durdurulup çalıştırılan ve tam yükle kalkış yapan makinalarda ise yüksek M_{kalk} kalkış momentine sahip motorlar yeğlenmelidir. Ayrıca, kendi M_{kalk} kalkış momentine eşit ya da ondan büyük bir yük altında kalkışa zorlanması halinde motorun "yanacağı" da unutulmamalıdır. Bir motorda kalkış momentinin yüksekliği, bu momentin nominal momente $\frac{M_{kalk}}{M_N}$ şeklindeki oranıyla tanımlanır. Her motor için bu oran, etiket bilgisi olarak değilse de katalog bilgisi olarak verilmiştir (Bkz. Şekil 4.4.10-c). Şekil 4.4.11 de farklı kalkış momenti oranına sahip asenkron motorlara ilişkin farklı moment karakteristikleri gösterilmiştir. Bunlardan B tipi karakteristiğe sahip motorlar vantilatör, aspiratör, merkezkaç pompa, gibi makinalarda ve takım tezgahlarında; C tipi karakteristiğe sahip motorlar, pistonlu pompa, kompresör, titreşimli elek gibi makinalarda; D tipi karakteristiğe sahip motorlar, zımba, giyotin, mekanik pres gibi eylemsizlik çarkına sahip makinalarla konveyör, asansör, vinç gibi makinalarda kullanılırlar. Bunlar arasında en yaygın kullanılanlar B tipi karakteristiğe sahip olan motorlardır. B tipi karakteristiğe sahip motorlara benzemekle birlikte onlardan devrilme momentinin yüksekliği ile ayrılan A tipi karakteristiğe sahip motorlar ise ender olarak kullanılırlar.

Burada, ekstrüzyon presi gibi bazı makinaların özel imal edilmiş motorlar gerektirebileceğini ve bazı motorlarda kalkışta devreye girerek yüksek kalkış momenti sağladıktan sonra devreden çıkan özel düzenlerin de bulunduğunu belirtelim fakat bu dersin çerçevesini aşan bu konularda daha fazla ayrıntıya girmeyelim.

4.4.3 İŞ KUVVETLERİ

Makinaların kendilerine karşı iş yapmak üzere tasarlandığı kuvvetlere yararlı direnç kuvvetleri, bunların ters işaretlisine; yani işi gerçekleştirmek için makinanın ortama uyguladığı kuvvetlere ise iş kuvvetleri denir.

Buna göre yararlı direnç kuvvetlerine ve iş kuvvetlerine karşılık gelen genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri, sırasıyla, Q_r ve Q_w ile gösterilirse, bunlar arasında

$$Q_w = -Q_r \tag{4.4.18}$$

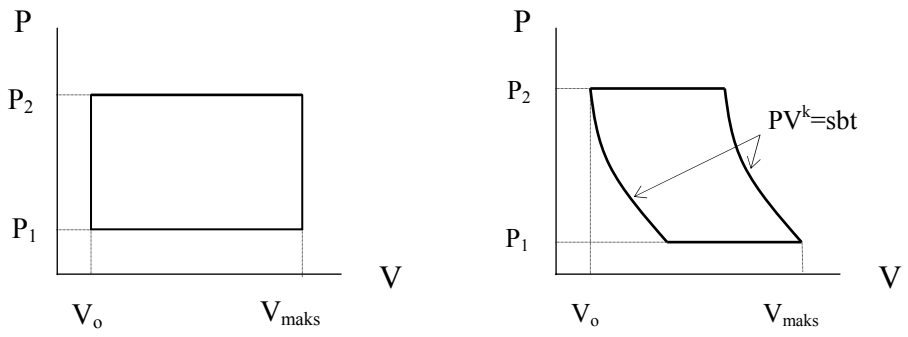
ilişkisi vardır. Direnç kuvvetleri makinanın hareketine karşı koyan kuvvetler olduklarından genellikle negatif, buna bağlı olarak iş kuvvetleri de genellikle pozitif işaretli kuvvetlerdir.

Bir makinada iş kuvvetleri çoğu kez ancak makinanın bir prototipi üretilip gerçek çalışma ortamında denendiğinde kesin olarak belirli hale gelir. Ne var ki bu kuvvetler bir makina için en önemli tasarım girdilerinden birini oluşturduğundan bu bilgiye tasarım aşamasındayken gerek duyulur. İş kuvvetlerinin önceden kestirilmesinde, eğer böyle yasalar varsa, direnç kuvvetlerini veren özel kuvvet yasalarından ve daha önce benzer görev için üretilmiş makinalardan edinilen deneyimden yararlanılır.

İş kuvvetlerinin belirlenmesi problemi, her makinada ayrı ayrı ele alınması gereken bir problemdir. Bu nedenle burada bir kaç örnekten kısaca söz edip konuya ilişkin genel bilgi vermekle yetineceğiz.

İş kuvvetlerinin kestirilmesi en kolay olan makinalar *kaldırma makinaları* dır. Bu makinalarda kaldırılacak yük hakkında karar verilir verilmez yararlı direnç kuvveti bu yükün ağırlığı olarak hemen belirli hale gelir. Bu sabit bir kuvvettir. Ancak buradan iş kuvvetinin makinanın q esas genelleştirilmiş koordinatına indirgenmiş eşdeğerine geçilmesiyle elde edilecek genelleştirilmiş iş kuvveti, makinanın yapısına bağlı olarak bazen q konumunun fonksiyonu olabilir (Bkz. Problem 4.2.2-3). Böylece kaldırma makinalarında en genel halde $Q_w = Q_w(q)$ olacağı söylenebilir. Kaldırma makinalarına ilişkin dinamik hesaplarda dikkat edilmesi gereken bir husus, yükün kütlesinin de makinanın genelleştirilmiş kütlesi içerisinde hesaba katılması gereğidir.

İş kuvvetlerinin kestirilmesinin göreli olarak kolay olduğu bir makina grubu da *pistonlu pompalar* dır. Pistonlu pompalar, tıpkı içten yanmalı motorlar gibi krank-biyel mekanizmasını esas alan ve onlarla benzer fakat zıt çalışma ilkelerine sahip olan



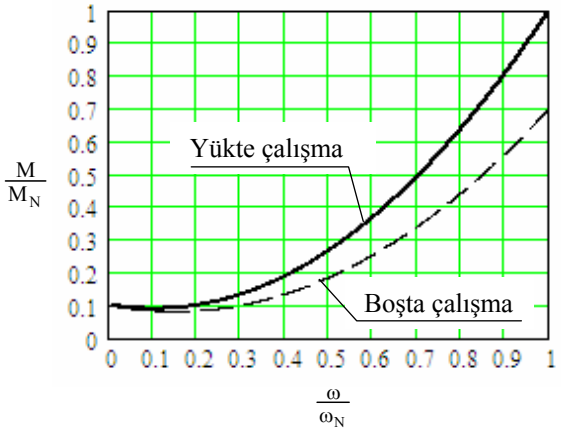
(a) Sıvı Çevrimi **(b)** Gaz Çevrimi

Şekil 4.4.12 Kuramsal Pistonlu Pompa Çevrimleri

makinalardır. Pistonlu pompalarda krankın her devrinde bir basma gerçekleşir. Çalışma düzeni şu evreleri içerir: Piston AÖK'dan ÜÖK'a doğru harekete geçtiğinde silindir içerisindeki maddeyi sıkıştırmaya başlar. Basınç basma supabının açılmasına yetecek P_2 değerine ulaşınca bu supap açılır, basma başlar ve bu, piston ÜÖK'a ulaşıncaya kadar sürer. Piston ÜÖK'a ulaşıp geri dönünce genişleme başlar, basınç P_2 nin altına düşer, basma supabı kapanır. Pistonun ÜÖK'dan AÖK'a hereketi sırasında basınç emme supabının açılmasına yetecek P_1 değerinin altına düşünce bu supap açılır, emme başlar ve piston AÖK'a ulaşıncaya kadar devam eder. Piston buraya ulaşıp geri döndüğünde basınç P_1 in üstüne çıkar, emme supabı kapanır, birinci çevrim tamamlanmış olur ve her şey yeniden başlar. Pistonlu pompalarda iş kuvvetleri, kendilerine ait P-V çevrimlerinden yola çıkılarak belirlenebilir. Bu iş için kuramsal çevrimlerin kullanılmasıyla iş kuvvetlerinin kuramsal olarak öngörülmeleri de mümkün olur. Bu çevrimlerdeki P_1 emme ve P_2 basma basınçları pompadan beklenen görevle ilgili olarak tasarımcı tarafından belirlenecek tasarım büyüklükleridir ve değerleri bellidir. P-V diyagramlarının genişleme ve sıkıştırmaya ilişkin kısımlarına gelince, bunlar sıvı ve gaz pompalarında farklı görünümler alırlar. Su ve diğer sıvı pompalarında, sıvılar pratikte sıkıştırılamaz akışkanlar kabul edilebileceğinden, genişleme ve sıkıştırma evrelerinin sabit hacimde gerçekleştiği düşünülür (Şek. 4.4.12-a). Hava ve diğer gaz pompalarında ise genişleme ve sıkıştırmanın adyabatik olduğunun düşünülmesi ve diyagramın bu bölgelerindeki gidişin, k ilgili gazın sabit hacim ve sabit basınçtaki özgül ısılar oranı olmak üzere (Hava için k=1.4) $PV^k = \text{Sabit}$ eğrisi şeklinde olduğunun kabul edilmesi uygundur (Şek. 4.4.12-b). Bütün bunlara ek olarak diyagramların eninin de s=2r krank-biyel mekanizmasının strokunu, A ise silindir kesit alanını göstermek üzere $V_{maks} = sA$ ile belirli olduğu düşünülürse herhangi bir pistonlu pompanın kuramsal P-V çevriminin kolayca elde edilebileceği anlaşılır. Çevrim elde edildikten sonra pompa iş kuvveti, tıpkı içten yanmalı motorlarda olduğu gibi $F_w = F_w(\varphi)$ şeklinde belirlenebilir. Buradan da genelleştirilmiş iş kuvveti, krank-biyel mekanizmasının (yaklaşık) kinematiğine ilişkin bilgiler anımsanarak

$$Q_w(q) = M_w(\varphi) = F_w(\varphi) \cdot \frac{\dot{x}}{\dot{\varphi}} = F_w(\varphi) \cdot r \cdot (\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi) \qquad (4.4.19)$$

şeklinde hesaplanabilir.



Şekil 4.4.13 Pervaneli Pompa Karakteristiği

Öte yandan, *pervaneli ve merkezkaç pompalar*da iş kuvveti (momenti), Şekil 4.4.13 de verilen örnek pompa karakteristiğinden de görüldüğü gibi, pompa milinin $\dot{\varphi} = \omega$ açısal hızıyla parabolik olarak değişir ve

$$Q_w(\dot{q}) = M_w(\omega) \cong a + b(\omega - c)^2 \qquad (4.4.20)$$

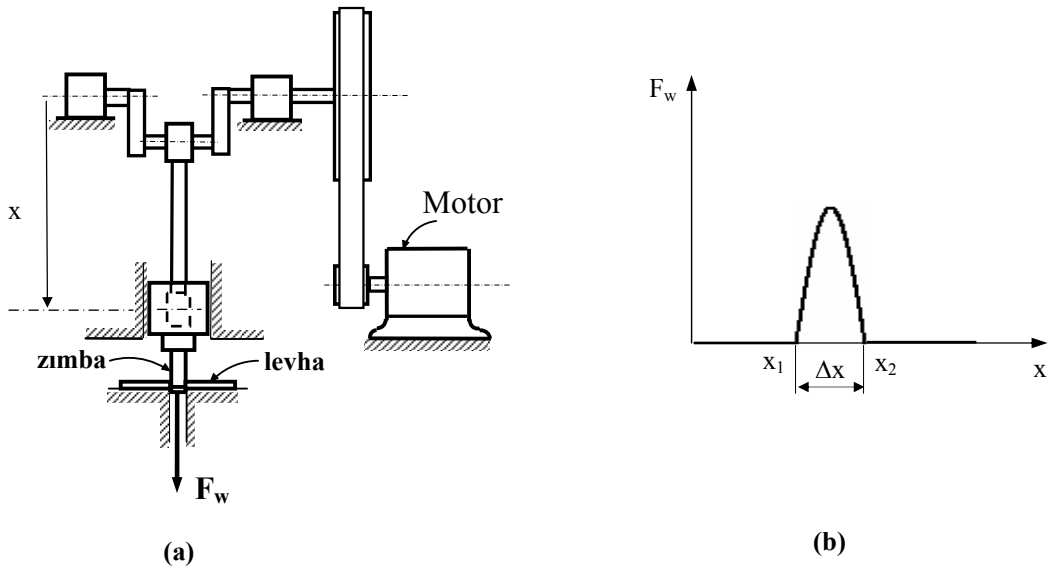
şeklinde modellenebilir. Buradaki a, b ve c katsayıları, M_N ve ω_N pompanın nominal çalışmasındaki moment ve hız değerlerini göstermek üzere $a \approx 0.10 M_N$, $b \approx 1.00 \frac{M_N}{\omega_N^2}$, $c \approx 0.10 \omega_N$ olarak alınabilir. Bunlardan a ile c'nin, mil yataklarındaki sürtünmenin modellenmesini amaçladığını belirtelim.

Düşük hızlarda dönen ve kıvamlı maddeleri karıştıran *karıştırıcılarda* ise iş momenti karıştırıcı milinin $\dot{\varphi} = \omega$ açısal hızıyla orantılı olarak artar ve

$$Q_W(\dot{q}) = M_W(\omega) \cong c + d \cdot \omega \qquad (4.4.21)$$

şeklinde modellenebilir. Buradaki c ve d katsayıları benzer makinalara ilişkin verilerden çıkartılabilir.

Burada son bir örnek olarak, Şekil 4.4.14-a daki *zımba makinası* na ilişkin iş kuvvetinden söz edelim. Makinanın bir zımbalama işlemi yapabilmesi için 2 numaralı kolun bir tam tur atması gerekmekle birlikte, iş kuvveti bütün bu tur boyunca değil; zımbalamanın gerçekleştiği aralık olan $\Delta x = x_2 - x_1$ aralığında etkir. Bu, bilinen bir büyüklüktür. Bir zımbalama için harcanması gereken ΔW enerjisi ise kuramsal olarak, ya da benzer makinalardan çıkartılabilir. Bu iki bilgiden yararlanılarak, iş kuvvetinin B noktasının x konumu ile değişimine ilişkin bir model geliştirilebilir. Örneğin, iş kuvvetinin $x_1 - x_2$ aralığında bir yarı sinüs dalgası şeklinde değiştiği varsayılıp $F_W(x) = F_0 \sin \frac{\pi}{\Delta x}(x - x_1)$ yazılırsa, sözü edilen aralıkta bu eğrinin altında kalan alanın ΔW enerjisine eşit olması gereği $F_0 = \frac{\pi \Delta w}{2 \Delta x}$ verir ve iş kuvveti için



Şekil 4.4.14 Zımba Makinasında İş Kuvveti

$$F_W(x) = 0 \qquad ; \quad x<x_1 \text{ ve } x> x_2 \text{ ise}$$

$$F_W(x) = \frac{\pi\Delta w}{2\Delta x}\cdot\sin\frac{\pi}{\Delta x}(x-x_1) \qquad ; \quad x_1 \le x \le x_2 \text{ ise} \tag{4.4.22}$$

elde edilir (Şek. 4.4.14-b). Buradan da, istenirse, mekanizmanın kinematik çözümlemesinden elde edilecek veriler yardımıyla genelleştirilmiş iş kuvvetinin ifadesine geçilebilir.

4.5 MAKİNA HAREKETİNİN EVRELERİ

4.5.1 GENEL

Bölüm 4.4 ün içeriğinden, bir makinaya etkiyen toplam genelleştirilmiş kuvvetin, $Q_ç$ çalıştırma kuvvetleri, Q_k korunumlu kuvvetleri, Q_s sürtünme kuvvetleri ve Q_w iş kuvvetlerinin toplamı olarak

$$Q(q,\dot{q};t) = Q_ç(q,\dot{q};t) + Q_k(q) - Q_S(q,\dot{q}) - Q_W(q,\dot{q};t) \tag{4.5.1}$$

şeklinde yazılabileceği bilinmektedir. Burada Q_w, (4.4.18) deki tanımından da anımsanacağı gibi, makinaya etkiyen negatif direnç kuvvetini değil makinanın bunu yenmek için uyguladığı pozitif kuvveti göstermektedir. Sürtünme kuvvetlerinin hesaba katılmasında da benzer bir fikir uygulanmış, makinaya etkiyen negatif sürtünme kuvvetleri yerine makinanın bunları yenmek için uygulaması gereken pozitif Q_s kuvveti kullanılmıştır. Yani buradaki Q_s , makinaya etkiyen sürtünme kuvvetlerinin ters işaretlisidir. Gösterilimde kullanılan bu tercihler, makina hareketini destekleyen kuvvetlerle ona karşı koyan kuvvetlerin kolayca ayırdedilmesini

sağlayarak kavrayışı, ve ileride görüleceği gibi hesabı kolaylaştırmak amacına yöneliktir.

Bir makinanın hareketi, büyük ölçüde, üzerine etkiyen genelleştirilmiş kuvvetin niteliğine bağlıdır. Bu bakımdan üç farklı durum ayırdedilir: **i**) Genelleştirilmiş kuvvet $Q = Q(q)$ şeklinde yalnızca q konumunun fonksiyonu olabilir. **ii**) Genelleştirilmiş kuvvet $Q = Q(q, \dot{q})$ şeklinde yalnızca q konumunun ve $\dot{q}$ hızının fonksiyonu olabilir. Bu iki durumda kuvvet t zamanından bağımsız olduğundan, makina -eğer aynı zamanda skleronomik ise- *zamandan bağımsız* (*otonom*) bir sistem oluşturur. **iii**) Genelleştirilmiş kuvvet $Q = Q(q, \dot{q}; t)$ şeklinde q konumunun ve $\dot{q}$ hızının yanısıra t zamanının da fonksiyonu olabilir. Bu durumda makina *zamana bağlı* (*heteronom*) bir sistem oluşturur.

Robotlar, CNC tezgahlar gibi bilgisayar kontrollü servomotorlarca çalıştırılan makinalar; iş makinaları, motorlu taşıtlar gibi bir operatör kontrolündeki makinalar ve yürür merdivenler, taşlama tezgahları gibi zamanla değişebilen yük altındaki makinalar esas olarak heteronom sistemler oluştururlar. Heteronom makinalarda çalışma düzeni hareket sırasında sürekli değişim gösterebileceğinden, bu makinalar için genel bir çalışma düzeninden söz edilemez. Buna karşılık pompalar, kompresörler, jeneratörler, dokuma tezgahları, matbaa makinaları vb. gibi bir kez çalıştırıldıktan sonra durdurulana kadar hep aynı işi yapan makinalar otonom sistemler oluştururlar. Otonom makinalar yol alma, stasyoner hareket (rejim hali) ve durma evrelerinden oluşan üç evreli bir düzen içerisinde çalışırlar. Aşağıda otonom makinaların çalışma evreleri gözden geçirilecektir.

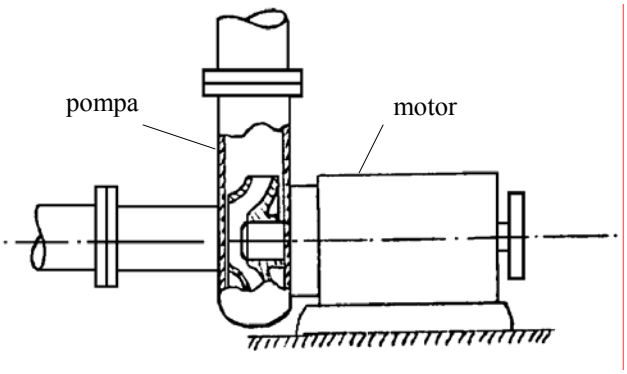
Yol alma (ya da yol verme) evresi, bir makinanın durağan halden başlayıp, düzenli çalışma hızına ulaşana kadar hız kazandığı evredir. Bu evrede makinaya etkiyen genelleştirilmiş kuvvet pozitif iş yapmakta ve makinanın kinetik enerjisi sürekli artmaktadır. *Stasyoner hareket evresi* makinanın ya sabit hızda, ya da sabit bir ortalama hız civarındaki küçük hız dalgalanmalarıyla çalışarak görevini yaptığı evredir. Bu evrede makinaya etkiyen genelleştirilmiş kuvvet bazı dönemlerde pozitif, bazı dönemlerde negatif iş yapabilir. Ancak bunlar toplamda birbirini götürmekte ve sisteme giren enerji ile çıkan enerji arasında *rejim hali* de denilen bir denge bulunmaktadır. *Durma evresi* ise makinanın düzenli çalışma hızından başlayıp giderek yavaşladığı ve sonunda durduğu evredir. Bu evrede makinaya etkiyen genelleştirilmiş kuvvet negatif iş yapmakta ve makinanın kinetik enerjisi giderek azalmaktadır.

4.5.2 BAZI ÖRNEK MAKİNALARIN ÇALIŞMA EVRELERİ

Bu bölümde bazı basit makinalar göz önüne alınıp, bunların hareket evreleri hareket denklemleri yardımıyla incelenecektir.

4.5.2.1 Yalnız Hıza Bağlı Genelleştirilmiş Kuvvet Hali: $Q = Q(\dot{q})$

İlk örnek olarak, elektrik motoruyla çalıştırılan bir pervaneli pompayı göz önüne alalım (Şek. 4.5.1) ve motor karakteristiğinin (4.4.17) deki gibi



Şekil 4.5.1 Motor - Pompa Sistemi

$$M_d(\omega) \cong M_k\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right] \tag{4.5.2}$$

şeklinde, pompa karakteristiğinin ise -c=0 ile- (4.4.20) deki gibi

$$M_w(\omega) \cong M_N\left[0.1+0.9\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^2\right] \tag{4.5.3}$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Bu makinanın (4.3.14) teki

$$\frac{1}{2}\Im(q)\cdot\frac{d(\dot{q}^2)}{dq}+C(q)\cdot(\dot{q}^2)=Q_ç(q,\dot{q},t)-Q_w(q,\dot{q},t) \tag{4.5.4}$$

hareket denklemi yazılmak istenirse, bu makinada özel olarak $\Im(q)=I=\text{sabit}\,,C(q)=0$ olduğu dikkate alınır, q=φ, $\dot{q}=\omega$ denilir ve (4.5.2,3) eşitlikleri (4.5.4) te yerine konulursa hareket denklemi

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi}+\frac{2}{I}\left(\frac{M_k}{\omega_s^2}+0.9\frac{M_N}{\omega_N^2}\right)\cdot\omega^2=\frac{2}{I}\left(M_k-0.1M_N\right) \tag{4.5.5}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki I, pompa ve motora ait dönen kısımların toplam eylemsizlik momentini göstermektedir ve motorla pompa arasında bir redüktör bulunmadığı varsayılmıştır. ω^2 için birinci mertebeden, sabit katsayılı, sağ taraflı bir diferansiyel denklem olan (4.5.5) denklemi kolayca çözülebilir ve makinanın hareketi bu çözüm yardımıyla incelenebilir. Homojen ve özel çözümlerin toplamı şeklindeki bu çözüm, C_0 başlangıç koşulları cinsinden belirlenecek bir sabit olmak üzere

$$\omega^2(\varphi)=\frac{M_k-0.1M_N}{\left(\frac{M_k}{\omega_s^2}+0.9\frac{M_N}{\omega_N^2}\right)}+C_0\cdot\exp\left[-\frac{2}{I}\left(\frac{M_k}{\omega_s^2}+0.9\frac{M_N}{\omega_N^2}\right)\cdot\varphi\right] \tag{4.5.6}$$

şeklindedir. Şimdi ilkin makinanın yol alma evresinde olacakları görmek üzere sükunetten başlayan bir harekete ilişkin, örneğin φ(0)=0, ω(0)=0 şeklinde başlangıç koşulları göz önüne alınır ve C_0 buna göre belirlenirse (4.5.6) dan

$$\omega(\varphi)=\sqrt{\frac{M_k-0.1M_N}{\left(\frac{M_k}{\omega_s^2}+0.9\frac{M_N}{\omega_N^2}\right)}\cdot\left\{1-\exp\left[-\frac{2}{I}\left(\frac{M_k}{\omega_s^2}+0.9\frac{M_N}{\omega_N^2}\right)\cdot\varphi\right]\right\}} \qquad (4.5.7)$$

elde edilir. (4.5.7) ifadesi bu makinanın yol alma evresinde nasıl davrandığını açıkça ortaya koymaktadır. Hız, $\varphi=0$ iken sıfırdan başlayıp $\varphi\rightarrow\infty$ iken asimptotik olarak

$$\overline{\omega}=\omega_S\omega_N\sqrt{\frac{M_k-0.1M_N}{\omega_N^2M_k+0.9\omega_s^2M_N}} \qquad (4.5.8)$$

değerine yakınsamaktadır. (4.5.2) ifadesindeki M_d çalıştırma momenti ile (4.5.3) ifadesindeki M_w iş momentinin eşitlendiği hız olduğu hemen görülen bu hız (Şek. 4.5.2-a) makinanın rejim hızıdır. (4.5.8) eşitliğinin ortaya koyduğu bir özellik olarak, bir rejim halinin oluşabilmesi için $M_k>0.1M_N$ koşulunun sağlanması gerektiğine, bunun da ilk hareketin oluşabilmesi için sıfır hızdaki motor momentinin aynı hızdaki direnç momentini yenmesi koşulundan başka bir şey olmadığına işaret edelim.

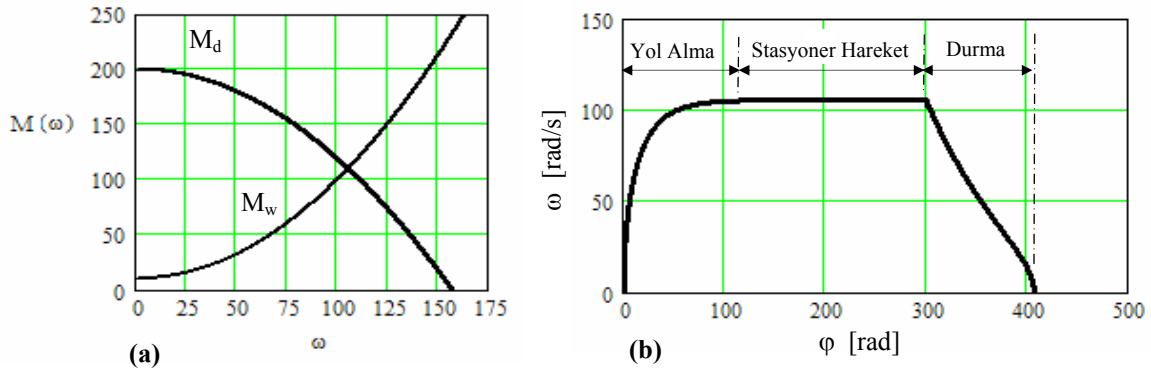
Şimdi de makinanın durma hareketi incelenmek istensin. Makina durdurulmak istendiğinde motor kapatılmış ve çalıştırma momenti devreden çıkartılmış olacaktır. Buna göre durma evresinde hareket, (4.5.6) dan $M_k=0$ ile

$$\omega^2(\varphi)=-\frac{\omega_N^2}{9}+C_0\cdot\exp\left[-\frac{2}{I}\left(0.9\frac{M_N}{\omega_N^2}\right)\cdot\varphi\right] \qquad (4.5.9)$$

şeklindedir. Motorun kapatılma anında $\varphi=\varphi_d$, $\omega=\overline{\omega}$ olduğu kabul edilir ve C_0 bu başlangıç koşullarını sağlayacak biçimde hesaplanırsa

$$\omega(\varphi)=\sqrt{-\frac{\omega_N^2}{9}+\left(\overline{\omega}^2+\frac{\omega_N^2}{9}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1.8M_N}{I.\omega_N^2}\cdot(\varphi-\varphi_d)\right)} \qquad (4.5.10)$$

elde edilir. Buna göre durma evresinde hız, sıfıra düşünceye kadar üstel olarak azalacaktır.



Şekil 4.5.2 **(a)** Rejim Oluşma Noktası, **(b)** Hareketin Evreleri

Şekil 4.5.2-b de bu makinanın, M_k=200 Nm, ω_s=50π rad/s, M_N=100 Nm, ω_N=100 rad/s, I=0.8 kgm^2, φ_d=300 rad sayısal değerleri kullanılarak, (4.5.7) ve (4.5.10) yardımıyla çizdirilmiş ω−φ diyagramı görülmektedir. Diyagramda, makinanın yol alma, stasyoner hareket ve durma evreleri işaretlenmiştir. Bu diyagramdan, hareketi incelenen makinanın dinamik davranışının bazı temel özellikleri hemen fark edilmektedir. Dikkati çeken ilk özellik makinanın kendiliğinden bir rejim haline yerleşmesidir. Her makinada bulunmadığını az sonra göreceğimiz bu özellik, üzerlerine etkiyen genelleştirilmiş kuvvet hızın fonksiyonu olan makinalara özgü bir özelliktir. Dikkat çeken ve yine her makinada bulunmadığını az sonra göreceğimiz ikinci bir özellik de, hareketin hiç bir evresinde ve bu arada stasyoner hareket evresinde hızın bir dalgalanma göstermemesidir. Bu özellik de, ne $\Im$ genelleştirilmiş eylemsizliği ne de Q genelleştirilmiş kuvveti konumun fonksiyonu olan, yani davranışları tamamen konumdan bağımsız olan makinalara özgü bir özelliktir.

5.5.2.2 Konuma ve Hıza Bağlı Genelleştirilmiş Kuvvet Hali: $Q = Q(q, \dot{q})$

İkinci bir örnek olarak karakteristiği yine (4.5.2) deki gibi olan bir elektrik motorunun çalıştırdığı bir taşlama makinasını göz önüne alalım (Şek. 4.5.3). Taşın, sabit olduklarını varsayacağımız F ve R taşlama kuvvetlerinin etkisi altında olduğunu ve taş-mil bağlantısında çok küçük bir e merkez kaçıklığı bulunduğunu düşünelim. Şekil yardımıyla iş kuvveti

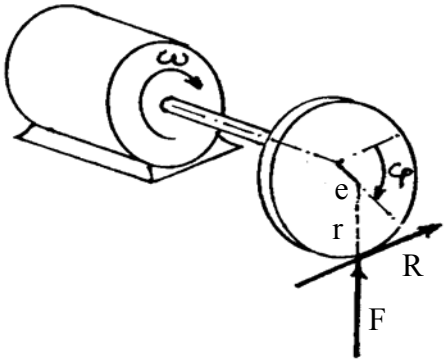
$$M_W = Fe\cos\varphi + R(r + e\sin\varphi) \qquad (4.5.11)$$

şeklinde belirlendikten sonra (4.5.2) ve (4.5.11) ile (4.5.4) hareket denklemine

gidilirse, $\Im(q) = I = \text{sabit} \rightarrow C(q) = 0$, $q=\varphi$, $\dot{q} = \omega$ ile

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} + \frac{2M_k}{I\omega_s^2}\cdot\omega^2 = \frac{2(M_k - R.r)}{I} - \frac{2e}{I}(F\cos\varphi + R\sin\varphi) \qquad (4.5.12)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem de kolayca çözülebilir. Bu çözüm, C_o başlangıç koşulları cinsinden belirlenecek bir sabit olmak üzere



Şekil 4.5.3 Motor - Taş Sistemi

$$\omega^2(\varphi) = \left(1 - \frac{R.r}{M_k}\right) \cdot \omega_s^2 + C_0 \exp\left(-\frac{2M_k}{I \cdot \omega_s^2} \cdot \varphi\right)$$
$$+ \frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_k^2}\left[\left(I\omega_s^2 R - 2M_k F\right)\cos\varphi - \left(I\omega_s^2 F + 2M_k R\right)\sin\varphi\right] \quad (4.5.13)$$

şeklindedir. Şimdi makinanın yol alma evresinde olacakları görmek üzere başlangıç koşulları $\varphi(0)=0$, $\omega(0)=0$ olarak alınır ve C_0 buna göre belirlenirse

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\left(1 - \frac{R.r}{M_k}\right) \cdot \omega_s^2 + \left[\frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_k^2}\left(2M_k F - I\omega_s^2 R\right) - \left(1 - \frac{R.r}{M_k}\right) \cdot \omega_s^2\right] \exp\left(-\frac{2M_k}{I \cdot \omega_s^2} \cdot \varphi\right)}$$
$$\overline{+ \frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_k^2}\left[\left(I\omega_s^2 R - 2M_k F\right)\cos\varphi - \left(I\omega_s^2 F + 2M_k R\right)\sin\varphi\right]} \quad (4.5.14)$$

elde edilir. (4.5.14) ifadesi bu makinanın yol alma evresinde nasıl davrandığını açıkça ortaya koymaktadır. Hız, $\varphi=0$ iken sıfırdan başlayıp $\varphi \to \infty$ iken asimptotik olarak

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\left(1 - \frac{R.r}{M_k}\right) \cdot \omega_s^2 + \frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_k^2}\left[\left(I\omega_s^2 R - 2M_k F\right)\cos\varphi - \left(I\omega_s^2 F + 2M_k R\right)\sin\varphi\right]}$$
$$(4.5.15)$$

düzenine yerleşmektedir. Bunun ise

$$\overline{\omega} = \sqrt{\left(1 - \frac{R.r}{M_k}\right)} \cdot \omega_s \quad (4.5.16)$$

ortalama değeri civarında dalgalanan bir hız değişimini gösterdiği ortadadır.

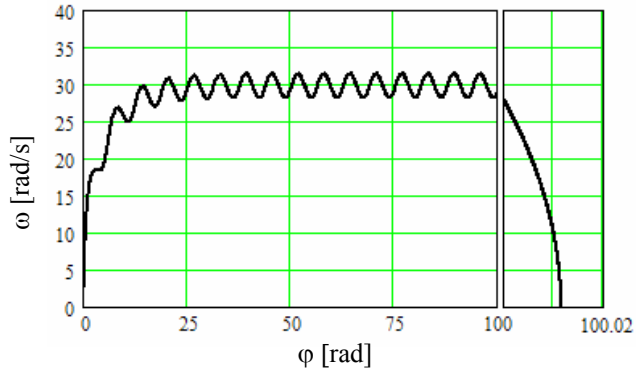
Şimdi de durma evresinde olacakları görmek isteyelim. Bu evrede motor kapatılmış olacağından, hareket denklemi (4.5.12) den motor momentine ilişkin terimlerin sıfır alınmasıyla

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} = -\frac{2R.r}{I} - \frac{2e}{I}\left(F\cos\varphi + R\sin\varphi\right) \quad (4.5.17)$$

şeklinde yazılabilir. Çözümü ise

$$\omega^2(\varphi) = C_0 - \frac{2Rr}{I} \cdot \varphi - \frac{2e}{I}\left(F\sin\varphi - R\cos\varphi\right) \quad (4.5.18)$$

şeklindedir. Motorun kapatıldığı anda $\varphi=\varphi_d$, $\omega=\omega_d$ olduğu kabul edilir ve C_0 buna göre hesaplanırsa, durma evresindeki harekette hızın



Şekil 4.5.4 Hareketin Evreleri

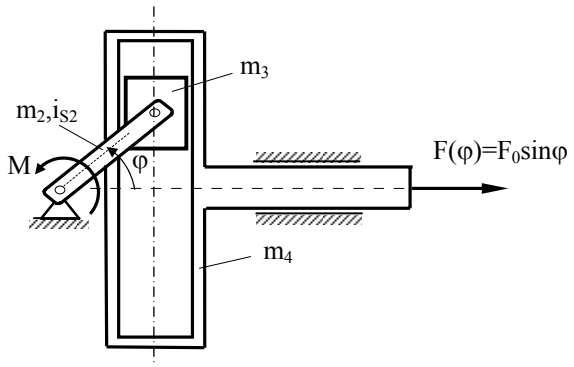
$$\omega(\varphi) = \sqrt{\omega_d^2 - \frac{2Rr}{I}(\varphi - \varphi_d) - \frac{2e}{I}\left[F(\sin\varphi - \sin\varphi_d) - R(\cos\varphi - \cos\varphi_d)\right]} \tag{4.5.19}$$

şeklinde değişeceği anlaşılır. Buna göre hız ω_d değerinden sıfır olana kadar, dalgalanarak azalacaktır.

Bu makinanın hareketiyle ilgili olarak burada elde edilen sonuçlar Şekil 4.5.4 te, M_k=20 Nm, ω_s=30π rad/s, F=1500 N, R=120 N, I=0.03 kg.m^2, r=15 cm, e=1 mm, φ_d=100 rad sayısal değerlerine karşılık gelen ω–φ diyagramında gösterilmiştir. Bu diyagramdan, makinanın kendiliğinden bir rejime yerleştiği ve hareketin her evresinde hız dalgalanmalarının söz konusu olduğu görülmektedir. Rejime yerleşme, genelleştirilmiş kuvvetin hıza bağlı oluşunun; hız dalgalanmaları ise bu kuvvetin konuma bağlı oluşunun bir sonucudur.

4.5.2.3 Yalnızca Konuma Bağlı Genelleştirilmiş Kuvvet Hali: Q = Q(q)

Son bir örnek olarak 2 numaralı uzvu sabit M momentinin, 4 numaralı uzvu ise F(φ)=F_0sinφ kuvvetinin etkisi altında bulunan, harmonik hareket mekanizması esaslı bir makinayı göz önüne alalım (Şek. 4.5.5). Makinanın hareketli uzuvlarının kütleleri m_2, m_3 ve m_4 olarak, 2 numaralı uzvun S_2 kütle merkezine göre eylemsizlik yarıçapı ise i_{S2} olarak verilmiş olsun.



Şekil 4.5.5 Harmonik Hareket Mekanizması Esaslı Makina

Problem 4.3.1 den bu makinanın genelleştirilmiş eylemsizliğinin

$$\Im(\varphi) = m_2 i_{S_2}^2 + r^2(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 \sin^2\varphi) \tag{4.5.20}$$

ya da ifadenin sabit kısmı $\bar{I}$ ile gösterilerek

$$\Im(\varphi) = \bar{I} + m_4 r^2 \sin^2\varphi \;;\quad \bar{I} = m_2 i_{S_2}^2 + r^2(\frac{m_2}{4} + m_3) \tag{4.5.21}$$

şeklinde, genelleştirilmiş kuvvetin ise

$$M(\varphi) = M - F_0 r \sin^2\varphi \tag{4.5.22}$$

şeklinde yazılabileceği bilinmektedir. Genelleştirilmiş kuvvetin yalnızca konuma bağlı olduğu bu makinada hız değişiminin (4.3.16) denklemi yardımıyla hesaplanması uygun olacaktır. Bu amaçla, $q=\varphi$, $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ denilerek bu denklem

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{2}\Im(\varphi)\omega^2\right] = M(\varphi) \tag{4.5.23}$$

şeklinde yeniden yazılıp (4.5.21) ve (4.5.22) ifadeleri burada yerlerine konulursa

$$d\left[\frac{1}{2}\left(\bar{I} + m_4 r^2 \sin^2\varphi\right)\cdot\omega^2\right] = \left(M - F_o r \sin^2\varphi\right)\cdot d\varphi \tag{4.5.24}$$

elde edilir. Buradan, $\varphi(0)=\varphi_0$, $\omega(0)=\omega_0$ dan, φ, ω ya kadar integrasyonla da

$$\left(\bar{I} + m_4 r^2 \sin^2\varphi\right)\cdot\omega^2\Big|_{\varphi_0,\omega_0}^{\varphi,\omega} = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(M - F_o r \sin^2\varphi\right)\cdot d\varphi \tag{4.5.25}$$

ya da gerekli hesaplar yapılarak

$$\omega^2(\varphi) = \frac{\left(\bar{I}+m_4 r^2 \sin^2\varphi_o\right)\omega_o^2 + (2M - F_o r)\cdot(\varphi-\varphi_o) + \frac{F_o r}{2}(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_o)}{\bar{I}+m_4 r^2 \sin^2\varphi} \tag{4.5.26}$$

bulunur. Bu ifadenin incelenmesinden, $2M>F_o r$ olmadıkça bu makinanın yol alamayacağı, bu koşulun sağlanması halinde ise bu kez de rejime giremeyeceği ve hızının sürekli artacağı anlaşılır. Bu koşulun ne anlama geldiğinin görülebilmesi için, φ bakımından π peryoduyla peryodik olan (4.5.22) deki genelleştirilmiş kuvvetin bir peryod boyunca yapacağı işi veren

$$\Delta W = \int_0^{\pi} \left(M - F_0 r \sin^2 \varphi\right) \cdot d\varphi = \left(M - \frac{1}{2} F_o r\right)\pi \qquad (4.5.27)$$

ifadesinin dikkate alınması yeterlidir. Makinanın yol alma evresinde genelleştirilmiş kuvvetin pozitif iş yapması, bunun için de $2M>F_or$ koşulunun sağlanması gereklidir. Buna karşılık bir rejim oluşabilmesi için ise genelleştirilmiş kuvvetin yapacağı net işin sıfır olması, bunun için de $2M=F_or$ koşulunun sağlanması gerekir. Buradan şu sonuç çıkmaktadır: Bu makina, verilmiş bir M ve F_o ile yol alabiliyorsa rejime giremez, rejime girebiliyorsa yol alamaz. Bu, genelleştirilmiş kuvveti yalnızca konumun fonksiyonu olan makinaların ortak bir özelliğidir. Bu özellikleri yüzünden bu makinalar, bundan önceki örneklerdeki genelleştirilmiş kuvvetleri hıza bağlı makinalar gibi kendiliklerinden rejime giremezler. Bu makinalarda yol alma evresinden rejim evresine geçiş ancak dışarıdan çalıştırma ya da iş kuvvetlerine ya da bunların her ikisine birden yapılacak bir müdahaleyle gerçekleşebilir. Uygulamada bunu yapmanın bir yolu, yol verme evresinde iş kuvvetlerini tamamen ya da kısmen devre dışı bırakmak, yani makinaya boşta ya da yarım yükle kalkış yaptırmak ve makina arzu edilen hıza ulaştıktan sonra bu kuvvetleri devreye sokarak rejim oluşturmaktır. Ancak burada hemen şunu da belirtelim ki genelleştirilmiş kuvveti yalnızca konumun fonksiyonu olan makina kavramı bir soyutlamadan ibarettir ve gerçek her makinada hıza bağlı kuvvet üreten bir unsur mutlaka vardır. Bu yüzden buradaki değerlendirmelerin, gerçek makinalar için ancak ana hatlarıyla geçerli olabileceğinin unutulmaması gerekir.

Şimdi bu değerlendirmelerden sonra incelenen probleme geri dönülür ve yol alma evresinde iş kuvvetinin tamamen devre dışı olduğu ($F_o=0$) ve bu evrenin başlangıcında $\varphi_o=0$, $\omega_o=0$ olduğunu varsayılırsa, bu değerlerle (4.5.26) denklemine dönülerek makinanın yol alma evresindeki hız değişimi için

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2M\varphi}{\bar{I}+m_4 r^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (4.5.28)$$

elde edilir. Bu ifadenin incelenmesinden bu evrede hızın, paydadaki genelleştirilmiş eylemsizliğin peryodik oluşunun bir sonucu olarak, π peryodlu dalgalanmalarla artacağı anlaşılır.

Stasyoner harekete geçilmek istenen anda iş kuvveti devreye sokulmalı ve bu kuvvet, rejim için gerekli olduğunu yukarıda belirlediğimiz

$$F_o = \frac{2M}{r} \qquad (4.5.29)$$

koşulunu sağlamalıdır. (Bu koşulu sağlamak üzere rejime geçiş anında F_o, M ikilisinin her ikisinin de ayarlanması mümkün ise de biz M nin yol alma evresindeki değerini koruduğunu ve F_o ın ona uyarlandığını varsayalım.) Bu andaki konum ve hızın da φ_1 ve ω_1 değerlerine sahip oldukları varsayılırsa bu değerlerle ve (4.5.29) eşitliğiyle (4.5.26) ya dönülerek, stasyoner hareket evresindeki hız değişimi için

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{\left(\bar{I}+m_4 r^2 \sin^2 \varphi_1\right)\omega_1^2 + \frac{F_o r}{2}\left(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1\right)}{\bar{I}+m_4 r^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (4.5.30)$$

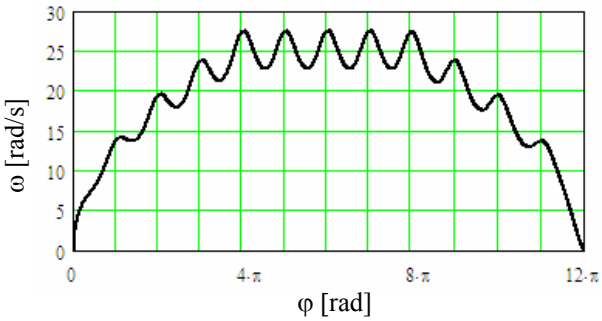
elde edilir. Buradan stasyoner hareket evresinde de hızın, hem genelleştirilmiş eylemsizliğin, hem de genelleştirilmiş kuvvetin peryodik oluşunun bir sonucu olarak, ikisinin ortak peryodu olan π peryoduyla peryodik dalgalanmalar göstereceği anlaşılır.

Durma evresine geçiş için çalıştırma kuvvetinin devreden çıkartılması yeterlidir (M=0). Geçiş anında konum ve hızın φ_2 ve ω_2 değerlerine sahip oldukları varsayılır ve bu değerlerle (4.5.26) ya dönülürse durma evresindeki hız değişimi için de

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{\left(\bar{I}+m_4 r^2 \sin^2 \varphi_2\right)\omega_2^2 - F_o r\cdot(\varphi-\varphi_2) + \frac{F_o r}{2}\left(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_2\right)}{\bar{I}+m_4 r^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (4.5.31)$$

elde edilir. Buradan hızın, genelleştirilmiş kuvvet ve eylemsizliğin peryodik oluşu yüzünden, sıfır değerine kadar peryodik dalgalanmalarla azalacağı anlaşılmaktadır.

Burada incelenen makinanın hareketinde hız değişimi, $\bar{I} = 0.1\,\text{kg.m}^2$, m_4=2 kg, r=15 cm, M=3 N.m, F_o=40 N, $\varphi_1=4\pi$ rad, $\varphi_2=8\pi$ rad değerlerine karşılık gelen bir sayısal örnek için Şekil 4.5.6 da gösterilmiştir.



Şekil 4.5.6 Hareketin Evreleri

5 HAREKET DENKLEMİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ• MAKİNA DİNAMİĞİNİN ANA PROBLEMLERİ

5.1 GENEL

Bilindiği gibi mekanik sistemlerin dinamik davranışları, Newton'un ikinci hareket yasasının doğrudan bir sonucu olarak, konumun zamana göre ikinci mertebeden diferansiyel denklemleri olan hareket denklemleriyle tanımlanır.

Dinamikte hareket denklemleri birbirinden farklı iki amaç için kullanılabilir. Bunlardan ilkinde mekanik sistemin tüm parametreleri, üzerine etkiyen tüm kuvvetler ve sistemin herhangi bir t_o anındaki durumu (konum ve hızı) bellidir. Amaç sistemin gelecekteki davranışının, yani her $t>t_o$ anındaki durumunun öngörülmesi ya da başka bir deyişle hareketinin simülasyonunun gerçekleştirilmesidir. Hareketin diferansiyel denklemlerinin çözülmesini gerektiren bu probleme *dinamiğin düz problemi* adı verilir. Olası ikinci amaç, sistemin belirli bir hareketi gerçekleştirebilmesi ya da hareketinin belli bazı özelliklere sahip olabilmesi için sistem parametrelerinin almaları gereken değerlerin ya da sisteme uygulanması gereken kuvvetlerin belirlenmesidir. Genellikle sistem davranışlarının kontrolü ya da optimizasyonu çerçevesinde karşılaşılan ve hareketin diferansiyel denklemlerinin çözülmesini gerektirmeyen bu tip problemlere de *dinamiğin ters problemleri* adı verilir.

Dinamiğin genel programı içerisinde yer alan bu problem tipleri makina dinamiği özelinde de karşılıklarını bulur. Aşağıda makina dinamiğinin ana problemleri, makina dinamiğinin düz ve ters problemleri olmak üzere iki ana başlık altında ele alınacaktır.

5.2 MAKİNA DİNAMİĞİNİN DÜZ PROBLEMİ • HAREKET DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

5.2.1 PROBLEMİN TANITILMASI

Makina dinamiğinin düz problemi denildiğinde, makinanın tüm boyutları, tüm uzuvlarının eylemsizlik özellikleri, makina üzerine etkiyen tüm kuvvetler ve genelleştirilmiş koordinat ve genelleştirilmiş hızın belli bir t_o anındaki $q(t_o) = q_o$, $\dot{q}(t_o) = \dot{q}_o$ değerleri verilmişken, makina hareketini yönettiği bilinen

$$\Im(q)\cdot\ddot{q} + C(q)\cdot\dot{q}^2 = Q(q,\dot{q},t) \qquad (5.2.1)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denkleminin çözülerek $q=q(t) \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(t) \rightarrow \ddot{q} = \ddot{q}(t)$ fonksiyonlarının elde edilmesi anlaşılır. Ancak hemen görüldüğü gibi (5.2.1) denklemi, $\Im(q)$ genelleştirilmiş eylemsizliğinin sabit olduğu ve $Q(q,\dot{q},t)$ genelleştirilmiş kuvvetinin q ve $\dot{q}$ argümanlarının lineer bir fonksiyonu olduğu kimi çok özel haller dışında lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir. Oysa, bilindiği gibi, ender bazı örnekler dışında lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü bugün için bilinmemektedir. Öte yandan, Bölüm 3 ten anımsanacağı gibi, $\Im(q)$ genelleştirilmiş eylemsizliğinin, buna bağlı olarak $C(q) = \frac{1}{2}\frac{d\Im(q)}{dq}$ merkezcil katsayısının ve Bölüm 4 ten anımsanacağı gibi $Q(q,\dot{q},t)$ genelleştirilmiş kuvvetinin analitik olarak ifade edilebilmesi için makinanın kinematik çözümlemesinin analitik yoldan gerçekleştirilebilmesi gereklidir. Oysa, bilindiği gibi, bu da ancak çok basit yapıdaki az sayıda makina için olanaklıdır. Buradan, (5.2.1) denkleminin çoğu makina için hiç yazılamayacağı, yazılabildiğinde de çoğu kez analitik olarak çözülemeyeceği anlaşılmaktadır. Bu sorunların her ikisini birden aşabilmek için, (5.2.1) denkleminin sayısal çözümüne yönelmekten başka çıkar yol yoktur. Biz de, bir makinanın düz dinamik problemini çözme göreviyle karşı karşıya kalan her mühendisin önce bu denklemin yazılması ve analitik olarak çözülmesi olanaklarını araştırması gereğine işaret etmekle birlikte, burada bunun olanaklı olduğu hallerin bir sıralamasını verme gayretine hiç girmeyelim[1] ve doğrudan doğruya her durumda geçerli olan sayısal çözüm seçeneğine yönelelim.

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için bir çok yöntem bilinmektedir. Bu yöntemler, en önemlilerini Hamming Yöntemi ile Adams Grubu (Adams-Moulton, Adams-Bashforth vb.) Yöntemlerin oluşturduğu çok adımlı iteratif yöntemler ve en önemlilerini Runge-Kutta Grubu Yöntemlerin oluşturduğu tek adımlı yöntemler olmak üzere başlıca iki sınıfa ayrılırlar. Bütün bu yöntemlerin teker teker ele alınıp incelenmesi bu dersin çerçevesini aşacağı için, burada, makina dinamiği uygulamalarında en çok kullanılan yöntem grubu olan Runge-Kutta yöntemlerinden birini kısaca tanıtıp bu yöntemin makina dinamiğinin düz problemine uygulanışına değinmekle yetineceğiz.

5.2.2 BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ

x bağımlı değişkeninin t bağımsız değişkenine göre

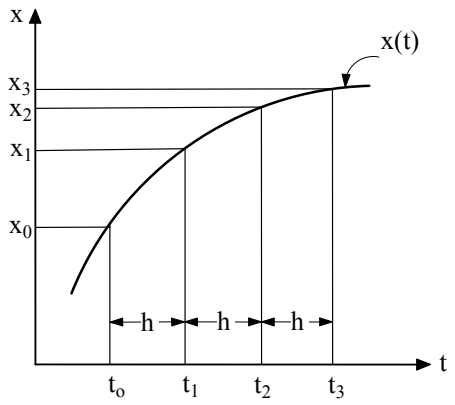
$$\dot{x} = f(x,t) \tag{5.2.2}$$

şeklindeki birinci mertebeden diferansiyel denklemi ile

$$x(t_o) = x_o \tag{5.2.3}$$

başlangıç koşulunun oluşturduğu ve amacı buradan x=x(t) nin hesaplanması olan *başlangıç değer problemi* göz önüne alınsın. Runge-Kutta grubu yöntemler, bu

[1] Anımsanacağı gibi Bölüm 5.5 te, (5.2.1) e alternatif oluşturan (5.3.14) ve (5.3.16) diferansiyel denklemlerinin analitik yoldan çözümüne ilişkin bazı örnekler verilmişti.



Şekil 5.2.1 Runge - Kutta Yöntemi

problemin çözümünün $t_1=t_o+h$ noktasında alacağı $x_1=x(t_1)=x(t_o+h)$ sayısal değerinin yaklaşık hesabı için bir algoritma sunarlar. Bu algoritmanın tekrar tekrar uygulanmasıyla kapalı formdaki $x(t); t \geq t_o$ çözümü yerine, x(t) nin birbirini h adımlık aralıklarla izleyen t noktalarındaki $x_o = x(t_o) \rightarrow \quad x_1 = x(t_o + h)$, $x_2 = x(t_o + 2h)$, $x_3 = x(t_o + 3h)$, … sayısal değerlerine, yani problemin nokta nokta çözümüne ulaşılır (Şek. 5.2.1).

Runge-Kutta yöntem grubuna giren çok sayıda yöntem bulunmakla birlikte biz burada bunların en popüleri olan *4. Mertebeden Klasik Runge-Kutta Yöntemi*ni ele alalım. Konumuzun dışında kaldığı için çıkartılışını burada vermeyeceğimiz bu yönteme göre $x_1=x(t_o+h)$ değeri, birbiri peşisıra hesaplanabilen

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_o, t_o) \\ k_2 &= f(x_o + \tfrac{1}{2}h.k_1, t_o + \tfrac{1}{2}h) \\ k_3 &= f(x_o + \tfrac{1}{2}h.k_2, t_o + \tfrac{1}{2}h) \\ k_4 &= f(x_o + h.k_3, t_o + h) \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

şeklinde tanımlı 4 katsayı yardımıyla

$$x_1 = x(t_o + h) = x_o + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{5.2.5}$$

şeklinde hesaplanır.

5.2.3 MAKİNA HAREKET DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Yukarıda tanıtılan 4. Mertebeden Klasik Runge-Kutta yöntemi makina hareket denkleminin çözümünde kullanılabilir. Ancak bunun için ilkin 2. Mertebeden bir diferansiyel denklem olan bu denklemin birinci mertebeden diferansiyel denklem biçimine getirilerek yöntemin uygulama alanına sokulması gerekir. Bu, (5.2.1) makina hareket denkleminde q genelleştirilmiş koordinatı ile $\dot{q}$ genelleştirilmiş hızı iki ayrı bilinmeyen olarak düşünülüp

$$u=q\ ,\quad v=\dot{q} \tag{5.2.6}$$

şeklinde, bunlara karşılık gelen iki yeni bilinmeyen tanımlanarak yapılabilir. Böyle yapıldığında (5.2.1) ve (5.2.6) dan

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= \frac{Q(u,v,t)-C(u)\cdot v^2}{\Im(u)} \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

yazılabilir. Böylece 1 adet 2. mertebeden diferansiyel denklem olan hareket denklemi, 2 adet 1. mertebeden diferansiyel denklemden oluşan bir diferansiyel denklem takımına dönüşmüş olmaktadır. Bilinmeyenleri, sistemin durum değişkenleri olan q ve $\dot{q}$ dan ibaret olduğundan (5.2.7) denklem takımının sistemin durum uzayındaki tasvirini oluşturduğu söylenir. İstenirse (5.2.7) yerine,

$$\begin{aligned} f_u(u,v,t) &= v \\ f_v(u,v,t) &= \frac{Q(u,v,t)-C(u)\cdot v^2}{\Im(u)} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

fonksiyonları tanımlanarak

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f_u(u,v,t) \\ \dot{v} &= f_v(u,v,t) \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

da yazılabilir. (5.2.9) denklemine Runge-Kutta yöntemi kolayca uygulanabilir. (5.2.4) ve (5.2.5) bağıntılarından yararlanılarak ve oradaki t_o dan t_1 e geçiş özel adımı yerine t_i den t_{i+1} e geçiş genel adımı düşünülerek bu yapılırsa, ardışık olarak hesaplanabilen

$$\begin{aligned} k_{u1} &= f_u(u_i,v_i,t_i) \\ k_{v1} &= f_v(u_i,v_i,t_i) \\ k_{u2} &= f_u(u_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{u1}, v_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{v1}, t_i+\tfrac{1}{2}h) \\ k_{v2} &= f_v(u_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{u1}, v_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{v1}, t_i+\tfrac{1}{2}h) \\ k_{u3} &= f_u(u_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{u2}, v_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{v2}, t_i+\tfrac{1}{2}h) \\ k_{v3} &= f_v(u_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{u2}, v_i+\tfrac{1}{2}h\cdot k_{v2}, t_i+\tfrac{1}{2}h) \\ k_{u4} &= f_u(u_i+h\cdot k_{u3}, v_i+h\cdot k_{v3}, t_i+h) \\ k_{v4} &= f_v(u_i+h\cdot k_{u3}, v_i+h\cdot k_{v3}, t_i+h) \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

katsayıları cinsinden

$$u_{i+1} = u(t_i + h) = u_i + \frac{1}{6}h(k_{u1} + 2k_{u2} + 2k_{u3} + k_{u4})$$

$$v_{i+1} = v(t_i + h) = v_i + \frac{1}{6}h(k_{v1} + 2k_{v2} + 2k_{v3} + k_{v4}) \qquad (5.2.11)$$

elde edilir. Bu bağıntılar, t_i anındaki durum bilinirken $t_{i+1}=t_i+h$ anındaki durumun hesaplanmasını sağlamaktadır. (5.2.10) ve (5.2.12) eşitlikleri (5.2.9) esas alınarak çıkartıldığından genel mahiyette olup her tür $f_u(u,v,t)$ ve $f_v(u,v,t)$ fonksiyonu için geçerlidir. Burada $f_u(u,v,t) = v$ yerine konulur ve (5.2.6) tanımları kaldırılırsa, bizim problemimizde geçerli olan, daha yalın

$$k_1 = f_v(q_i, \dot{q}_i, t_i)$$

$$k_2 = f_v(q_i + \tfrac{1}{2}h \cdot \dot{q}_i, \dot{q}_i + \tfrac{1}{2}h \cdot k_1, t_i + \tfrac{1}{2}h)$$

$$k_3 = f_v(q_i + \tfrac{1}{2}h \cdot \dot{q}_i + \tfrac{1}{4}h^2 k_1, \dot{q}_i + \tfrac{1}{2}h \cdot k_2, t_i + \tfrac{1}{2}h) \qquad (5.2.12)$$

$$k_4 = f_v(q_i + h \cdot \dot{q}_i + \tfrac{1}{2}h^2 k_2, \dot{q}_i + h \cdot k_3, t_i + h)$$

ve

$$q_{i+1} = q_i + h \cdot \dot{q}_i + \frac{1}{6}h^2(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$\dot{q}_{i+1} = \dot{q}_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (5.2.13)$$

ifadeleri de yazılabilir. Bu ifadeler, makina hareket denkleminin h zaman adımlarıyla adım adım çözümünde kullanılır. Dikkat edilirse bu çözümün gerçekleştirilebilmesi için (5.2.8) deki f_v fonksiyonunun, dolayısıyla da (5.2.1) makina hareket denkleminin kapalı formda yazılmış olması gerekmemektedir. Buna bağlı olarak makinanın kinematik çözümlemesinin analitik yoldan gerçekleştirilmiş olmasına da gerek bulunmamaktadır. Gerek duyulan tek şey f_v nin, q, $\dot{q}$ ve t argümanlarının belli değer takımlarına ((5.2.12) eşitliklerinin sağ taraflarında yer alan 4 değer takımı) karşılık gelen sayısal değerlerinden ibarettir. Bu sayısal değerlerin hesaplanabilmesi için (5.2.1) de yer alan $Q(q,\dot{q},t)$, $\Im(q)$ ve $C(q)$ fonksiyonlarının aynı argümanlar ile hesaplanmış sayısal değerleri, bunların hesaplanabilmesi için ise, (3.2.16), (4.2.5) ve (4.3.10) tanımlarından da görüleceği gibi, makinanın söz konusu q konumu için gerçekleştirilmiş sayısal konum, hız ve ivme çözümlemesinin sonuçları yeterlidir.

Burada şunu da belirtelim ki yukarıdaki hesap ancak belli bir yaklaşıklıkla geçerlidir. Bu yüzden hesabın her h adımı belli bir hata oranı içerir. Bir kural olarak h adımı ne kadar büyükse hesabın her adımında yapılan hata da o kadar büyüktür. Adım sayısı arttıkça bu hatalar birikerek büyük birikimli hatalara yol açabilir. Bu sorunla bağlantılı olarak, hesabın her adımında yapılan hatanın da hesaplanmasına olanak veren ve bu sayede hatanın kontrol altında tutulmasını sağlayan özel Runge-Kutta yöntemleri de geliştirilmiş olmakla birlikte burada bu konuda ayrıntıya girilmeyecektir.

5.3 MAKİNA DİNAMİĞİNİN TERS PROBLEMİ • ÇALIŞTIRMA KUVVETİNİN HESABI

Makina dinamiğinin ters problemi denildiğinde, makinanın tüm boyutları, tüm uzuvlarının eylemsizlik özellikleri, makina üzerine etkiyen kuvvetlerden çalıştırma kuvvetleri dışındakilerin tamamı ve makinanın yapması istenen harekette genelleştirilmiş koordinatın q=q(t) ifadesi verilmişken, bunu sağlamak üzere makinaya uygulanması gereken $Q_ç(t)$ çalıştırma kuvvetinin hesaplanması anlaşılır.

Bu problemin çözümü için

$$\Im(q)\cdot\ddot{q}+C(q)\cdot\dot{q}^2=Q(q,\dot{q},t) \qquad (5.3.1)$$

makina hareket denkleminde, genelleştirilmiş kuvvetin (5.5.1) deki

$$Q(q,\dot{q},t)=Q_ç(q,\dot{q},t)+Q_k(q)-Q_s(q,\dot{q})-Q_w(q,\dot{q},t) \qquad (5.3.2)$$

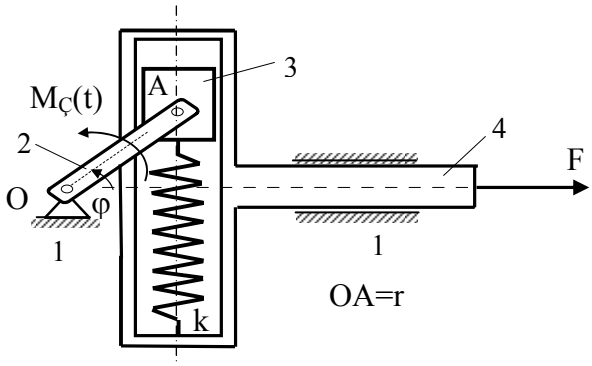
ifadesinin yerine konulması, ve buradan çalıştırma kuvvetinin

$$Q_ç(t)=\Im(q)\cdot\ddot{q}+C(q)\cdot\dot{q}^2-Q_k(q)+Q_s(q,\dot{q})+Q_w(q,\dot{q},t) \qquad (5.3.3)$$

şeklinde çekilmesi yeterlidir. Burada arzu edilen q(t) ifadesiyle, buradan türev alınarak bulunacak $\dot{q}(t)$ ve $\ddot{q}(t)$ ifadelerinin yerlerine konulmasıyla çalıştırma kuvveti kolayca Q=Q(t) şeklinde hesaplanabilir. Basit yapıya sahip bazı makinalarda bu hesap analitik olarak gerçekleştirilebilir ise de genelde -bir dizi t değeri için- nokta nokta hesap yapılmak zorunda kalınır. Böyle bir hesapta $Q(q,\dot{q},t)$, $\Im(q)$ ve C(q) nün hesabında (4.2.16), (5.2.5) ve (5.3.10) denklemlerinin esas alınması gerekir.

ÖRNEK PROBLEMLER

Problem 5.3.1



Şekil Pr.5.3.1-1

Şekildeki harmonik hareket mekanizması esaslı makinanın 4 numaralı uzvu F=100 N kuvvetinin etkisi altındadır. Makinanın hareketli uzuvlarının kütleleri m_2=1 kg, m_3=0.5 kg, m_4=2 kg olarak, 2 numaralı uzvun boyu ise r=0.2 m olarak bilindiğine ve φ=0 iken k=1200 N/m yayı gerilmesiz olduğuna göre, 2 numaralı uzvu ω=10 rad/s sabit hızıyla çevirebilmek için bu uzva uygulanması gereken $M_ç(t)$ çalıştırma momentini hesaplayınız.

Çözüm:

Daha önce Örnek Problem 4.3.1 de ele alınmış olan bu makinada, q←φ, Q ← M gösterilimleriyle

$$\Im(\varphi) = m_2 i_{S_2}^2 + r^2\left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 \sin^2\varphi\right) \qquad \text{(i)}$$

$$C(\varphi) = m_4 r^2 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{m_4 r^2}{2}\sin 2\varphi \qquad \text{(ii)}$$

$$M_k(\varphi) = -\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)\cdot gr\cos\varphi - \frac{kr^2}{2}\sin 2\varphi \qquad \text{(iii)}$$

$$M_w(\varphi) = Fr\sin\varphi \qquad \text{(iv)}$$

$$M_s = 0 \qquad \text{(v)}$$

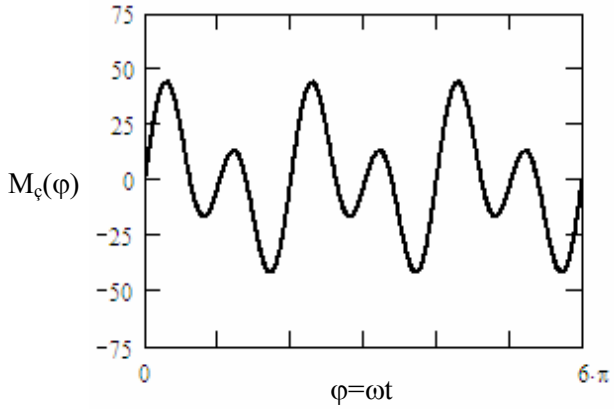
olduğu gösterilebilir. Öte yandan, 2 numaralı uzvun sabit ω hızıyla dönmesi istendiğine göre, -t=0 anında φ=0 olduğu kabulüyle-

$$\varphi=\omega t,\quad \dot{\varphi} = \omega\,,\quad \ddot{\varphi} = 0 \qquad \text{(vi)}$$

olmalıdır. (i-vi) eşitliklerinin (5.3.3) denkleminde değerlendirilmesiyle

$$M_ç(t) = \tfrac{1}{2}\left(m_4\omega^2 + k\right)\cdot r^2\sin 2\omega t + \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)\cdot gr\cos\omega t + Fr\sin\omega t \qquad \text{(vii)}$$

ya da sayısal değerler kullanılarak

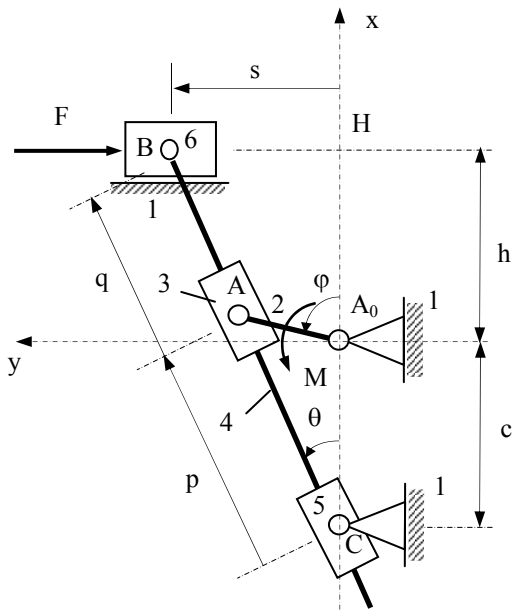


Şekil Pr.5.3.1-2

$$M_ç(t) = 28\sin 20t + 1.962\cos 10t + 20\sin 10t \quad [N.m] \qquad \text{(viii)}$$

hesaplanır. Yukarıdaki şekilde, hesaplanan $M_ç$ nin φ=ωt ile değişimi gösterilmiştir.

Problem 5.3.2



Şekil Pr. 5.3.2-1 Planya Tezgahı

Şekildeki planya tezgahının m_6=20 kg kütleye sahip koçu, sağa gidişte serbestçe hareket ederken sola gidişte sabit F kuvvetinin etkisi altında kalmaktadır. Makinanın boyutları r=0.15 m, c=0.40 m, h=0.20 m olarak verildiğine ve koç dışındaki uzuvların kütlelerinin göz ardı edilmesi istendiğine göre 2 numaralı uzvu sabit ω açısal hızıyla döndürebilmek için bu uzva uygulanması gereken çalıştırma momentini

a) F=0, ω=0.8 rad/s,
b) F=2000 N, ω=0.8 rad/s,
c) F=2000 N, ω=5 rad/s halleri için, makinanın φ konumuna bağlı olarak hesaplayınız.

Çözüm:

Bu makinada, q←φ, $\dot{q} \leftarrow \omega$, $\ddot{q} \leftarrow \alpha$, Q ← M gösterilimleriyle ve α=0, M_k=0, M_s=0 olduğuna dikkat edilerek (5.3.3) denklemi

$$M_ç(\varphi) = C(\varphi)\cdot\omega^2 + M_W(\varphi) \qquad \text{(i)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada C(φ) (5.3.10) denklemine göre

$$C(\varphi) = m_6 g'_6(\varphi) g''_6(\varphi) \qquad \text{(ii)}$$

şeklinde hesaplanmalıdır. Öte yandan F_w iş kuvveti (5.4.18) uyarınca şekildeki F_r direnç kuvvetinin ters işaretlisi olacak, ayrıca bu kuvvet yalnızca sola yönelik hareket sırasında, yani $\dot{s}$ hızının pozitif olduğu durumlarda etkiyecektir. Bütün bunlar dikkate alındığında, sgn işaret fonksiyonu kullanılarak bu kuvvet

$$\mathbf{F}_W(\varphi) = \frac{1+\mathrm{sgn}(\dot{s})}{2} F \cdot \mathbf{j} = \frac{1+\mathrm{sgn}[g'_6(\varphi)]}{2} F \cdot \mathbf{j} \qquad \text{(iii)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna karşılık gelen genelleştirilmiş kuvvet ise (4.2.16) bağıntısı uyarınca

$$M_W(\varphi) = \frac{1+\mathrm{sgn}[g'_6(\varphi)]}{2} \cdot F \cdot g'_6(\varphi) \qquad \text{(iv)}$$

şeklinde olacaktır. Sonuç olarak (ii) ve (iv) ile (i) ye dönülerek

$$M_ç(\varphi) = \left[m_6 g''_6(\varphi)\omega^2 + \frac{1+\mathrm{sgn}[g'_6(\varphi)]}{2} \cdot F\right] \cdot g'_6(\varphi) \qquad \text{(v)}$$

elde edilir. Öte yandan, daha önce Problem 4.2.4 te ele alınmış olan bu makinada çevrim kapama denklemlerinin

$$\begin{aligned} f_1(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\cos\varphi - p\cos\theta + c = 0 \\ f_2(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\sin\varphi - p\sin\theta = 0 \\ f_3(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\cos\varphi + q\cos\theta - h = 0 \\ f_4(\varphi, p, \theta, q, s) &= r\sin\varphi + q\sin\theta - s = 0 \end{aligned} \qquad \text{(vi)}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Buradan hareketle, (3.2.22) ve (3.2.24) uyarıca yapılan hesaplar sonucunda

$$g'_6(\varphi) = \frac{r(p+q)}{p} \cdot \frac{\cos(\varphi-\theta)}{\cos\theta} \qquad \text{(vii)}$$

ve

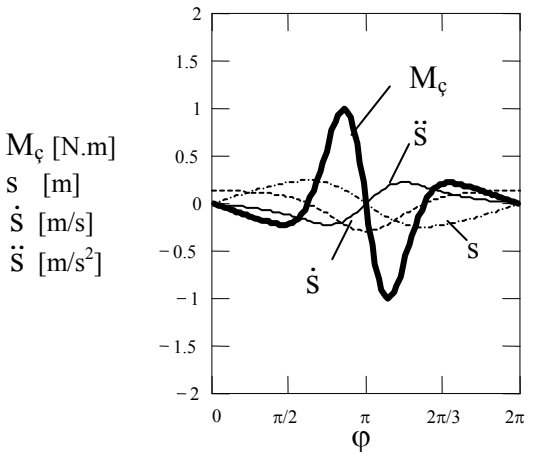
$$g''_6(\varphi) = \frac{r(p+q)}{p^2} \cdot \frac{r\sin\varphi\cos(\varphi-\theta) - p\cos\theta\sin(\varphi-\theta)}{\cos^2\theta} \qquad \text{(viii)}$$

olduğu gösterilebilir.

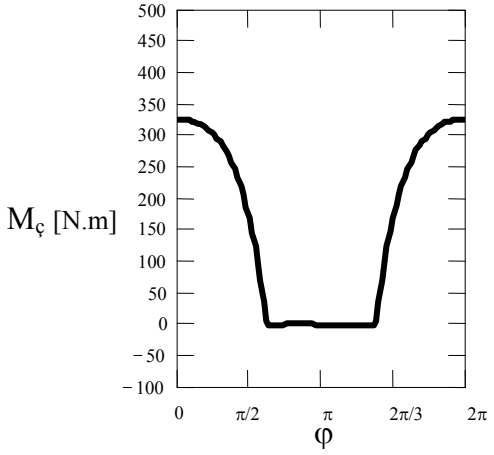
Artık (vi) denklemlerinin çeşitli φ değerleri için çözülmesiyle elde edilecek p, q ve θ değerlerinin (vii) ve (viii) de, bunların da (v) te yerlerine konulmasıyla sonuca gidilebilir.

Bu yoldan elde edilen sonuçlar Şekil Pr.5.3.2-2 a, b ve c de verilmiştir. Şekil a da, gereken çalıştırma momentinin yanısıra, bu momentin değişimiyle koçun hareketi arasında ilişki kurmaya olanak vermek üzere koçun konum, hız ve ivmesinin φ ile değişimi de gösterilmiştir. Şekil b den, ω=0.8 rad/s olması halinde, eylemsizlik kuvvetinin çalıştırma momenti üzerindeki etkisinin, F ninkinin yanında göz ardı edilebilecek mertebede kaldığı görülmektedir. Buna karşılık ω=5 rad/s olması halinde bu etki, Şekil c den görüldüğü gibi belirgin hale gelmektedir.

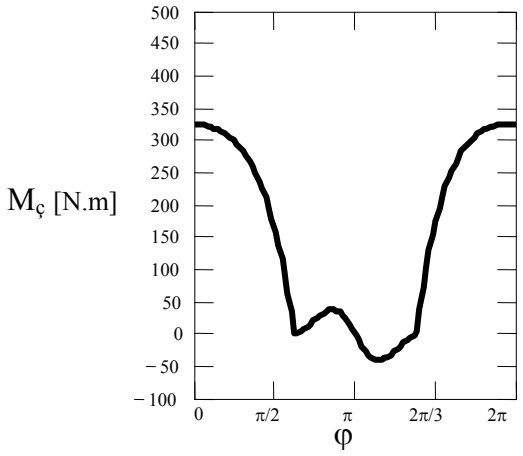
Ayrıca bu şekillerden koç hızının negatif olduğu sürenin pozitif olduğu süreye göre oldukça kısa olduğu, yani koçun sola doğru yavaş gidip sağa doğru hızlı döndüğü de görülebilmektedir. Bu da bu tip mekanizmaların niçin *çabuk dönüş mekanizması* adıyla anıldığını açıklamaktadır.



(a) F=0, ω=0.8 rad/s



(b) F=2000 N, ω=0.8 rad/s



(c) F=2000, ω=5 rad/s

Şekil Pr. 5.3.2-2 Hesap sonuçları

6 MAKİNA HAREKETİNDE HIZ DALGALANMALARI VE GİDERME YÖNTEMLERİ

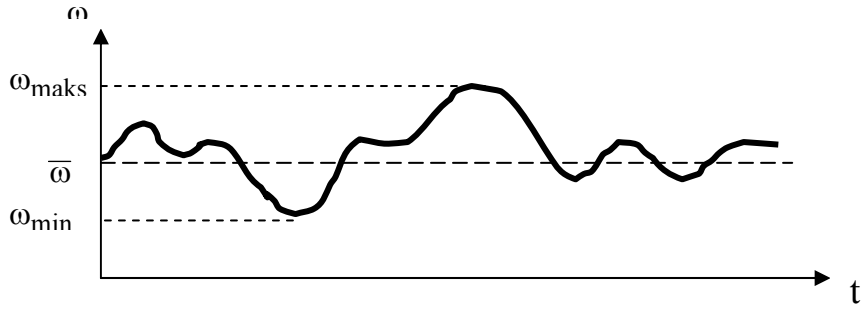
6.1 HIZ DALGALANMALARI • DALGALANMA KATSAYISI

Makinaların bir çoğunda daimi dönme hareketi yapan ve *mil* adı verilen bir uzuv bulunur. İçten yanmalı motorlar ve pistonlu pompalardaki krank milleri, döner kam mekanizmalarındaki kam mili, türbinlerdeki türbin mili vb. bunun iyi bilinen örneklerini oluşturur. Bu makinaların görevlerini gereği gibi yerine getirebilmeleri, çoğu kez, milin sabit hızla dönmesini gerektirir. Oysa Bölüm 4.5 te incelenen örneklerden, makinanın Q genelleştirilmiş kuvveti ve/veya $\Im$ genelleştirilmiş eylemsizliği konumun peryodik unsurlar içeren bir fonksiyonu ise, makina milinin sabit bir hızla değil, bir ortalama değer etrafında dalgalanan bir hızla döneceği bilinmektedir. Bu, bir çok makina için, özellikle stasyoner hareket evresinde, istenmeyen hatta kabul edilemez bir durumdur. Bu bölümde işte bu sorun ve giderme yöntemleri üzerinde durulacaktır.

Herhangi bir olayı bilimsel anlamda inceleyebilmek için önce ona ölçülebilir bir büyüklük eşleştirmek gerektiği bilinen bir gerçektir. Hız dalgalanmaları için böyle bir büyüklük olarak, stasyoner hareket evresinde mil hızının aldığı en yüksek ve en düşük değerler arasındaki farkın ortalama mil hızına oranından ibaret olan, boyutsuz *hız dalgalanma katsayısı* tanımlanmıştır (Şek. 6.1.1):

$$\delta = \frac{\omega_{maks} - \omega_{min}}{\overline{\omega}} \qquad (6.1.1)$$

Kolayca anlaşılacağı gibi $\delta = 0$ hızın hiç dalgalanmadığını (tam düzgün hareket), büyük δ değerleri ise büyük hız dalgalanmalarını gösterir. Bazen hız dalgalanma katsayısı yerine, onun tersi olarak



Şekil 6.1.1 Hız Dalgalanmaları

$$d = \frac{1}{\delta} = \frac{\overline{\omega}}{\omega_{maks} - \omega_{min}} \tag{6.1.2}$$

şeklinde tanımlanan *hız düzgünlük katsayısı* da kullanılır. Uygulamalı hesaplarda çoğu kez gerçek $\overline{\omega}$ ortalama hızı yerine

$$\overline{\omega} \cong \frac{\omega_{maks} + \omega_{min}}{2} \tag{6.1.3}$$

yaklaşıklığı kullanılır. Böyle yapıldığında dalgalanma katsayısının tanımı da

$$\delta = 2\frac{\omega_{maks} - \omega_{min}}{\omega_{maks} + \omega_{min}} \tag{6.1.4}$$

şeklini alır.

Bir makinada tam düzgün hareket elde edilmesi, yani δ=0 yapılması hem zor hem de gereksizdir. Bunun yerine çoğu kez, hız dalgalanma katsayısının kabul edilebilir bir değere çekilmesiyle yetinilir. Tablo 6.1 de, çeşitli makina sınıfları için δ nın kabul edilebilir değerleri gösterilmiştir.

Tablo 6.1 Dalgalanma Katsayısının Önerilen Değerleri

MAKİNA TİPİ	δ
Dövücüler, Kırıcılar	1/5
Beton Karıştırıcıları	1/12
Gemi Uskurları	1/20 - 1/40
Pompalar, Giyotinler, Karıştırıcılar	1/20 - 1/50
Takım Tezgahları, Öğütücüler	1/35 - 1/50
Pistonlu Kompresörler	1/50 - 1/100
Alternatif Akım Üreteçleri	1/300
Doğru Akım Üreteçleri (Aydınlatmada)	1/200 (1/500)
Taşıt Motorları (Ralantide)	1/5
Taşıt Motorları (Normal Devir Sayısında)	1/150 - 1/300
Pistonlu Uçak Motorları	1/1000

6.2 HIZ DALGALANMALARINI GİDERME YÖNTEMLERİ

6.2.1 GENEL DEĞERLENDİRMELER

Makinalardaki hız dalgalanmalarını gidermek üzere neler yapılabileceğini görmek için olaya makina hareket denklemi ışığında bakılması yararlı olacaktır. Bu amaçla

$$\frac{1}{2}\Im(q)\frac{d(\dot{q}^2)}{dq} + C(q)\cdot\dot{q}^2 = Q(q,\dot{q},t) \;\; ; \quad C(q) = \frac{1}{2}\frac{d\Im(q)}{dq} \tag{6.2.1}$$

hareket denklemi anımsansın. Burada q genelleştirilmiş koordinatı olarak makinanın düzgün hızla dönmesi istenen milinin φ açısal konumu alınsın. Buna bağlı olarak $\dot{q}$ genelleştirilmiş hızı $\omega = \dot{\varphi}$ ile, Q genelleştirilmiş kuvveti de -bu durumda bir moment söz konusu olacağı için- M ile gösterilsin. Ayrıca, düzgün hız ancak stasyoner hareket evresinde söz konusu olabileceğine göre bu durumda M nin t ile değişmeyeceği dikkate alınarak $M=M(\varphi,\omega)$ yazılsın. Yine, makinanın genelleştirilmiş eylemsizliği $\Im(\varphi)$ özel olarak *makinanın mile indirgenmiş kütlesel eylemsizlik momenti* diye anılsın ve bünyesindeki sabit ve değişken kısımları ayıran bir gösterilimle

$$\Im(\varphi) = \bar{I} + \tilde{I}(\varphi) \tag{6.2.2}$$

şeklinde ifade edilsin. Bu gösterilimlerle (6.2.1) denklemi

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\varphi} = \frac{M(\varphi,\omega) - C(\varphi)\cdot\omega^2}{\bar{I}+\tilde{I}(\varphi)} \quad ; \quad C(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{d\tilde{I}(\varphi)}{d\varphi} \tag{6.2.3}$$

verir. Dikkat edilirse bu eşitliğin sol tarafı ilgilenmekte olduğumuz hız değişimlerini temsil etmektedir ve tam düzgün hareket halinde sıfır olmalıdır. Buradan, makina milinin belli bir $\omega = \bar{\omega} =$ sabit hızıyla düzgün olarak dönebilmesi için

$$\frac{M(\varphi,\bar{\omega}) - C(\varphi)\cdot\bar{\omega}^2}{\bar{I}+\tilde{I}(\varphi)} \equiv 0 \tag{6.2.4}$$

olması gerektiği anlaşılır.

(6.2.3) ve (6.2.4) eşitliklerinin incelenmesinden şu genel sonuçlara varılır:

i) Makina milinin $\bar{\omega}$ hızıyla tam düzgün olarak dönebilmesi için

$$M(\varphi,\bar{\omega}) - C(\varphi)\cdot\bar{\omega}^2 \equiv 0 \quad \rightarrow \quad M(\varphi,\bar{\omega}) - \frac{1}{2}\frac{d\tilde{I}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\bar{\omega}^2 \equiv 0 \tag{6.2.5}$$

olmalıdır.

Bu koşulun anlamını kavrayabilmek için önce mile indirgenmiş eylemsizlik momenti konumla değişmeyen makinalar özel halinin göz önüne alınması yararlı olabilir. Bu özel durumda $C(\varphi)=0$ olacağından (6.2.5) özel olarak

$$M(\varphi,\bar{\omega}) \equiv 0 \tag{6.2.6}$$

şeklini alır. Bu, kolay anlaşılır bir sonuçtur: Makina milinde hız değişimi olmaması için bu mile etkiyen net moment her an sıfır olmalıdır.

Buradan edinilen görüşle (6.2.5) genel eşitliklerine dönülürse, bu eşitliklerin sol yanındaki ikinci terimin makinanın mile indirgenmiş kütlesel eylemsizlik

momentinin değişken oluşundan kaynaklanan bir momenti temsil etmesi gerektiği hemen anlaşılır. Gerçekten de bu terim, mil sabit $\bar{\omega}$ hızıyla dönerken, kütlesel eylemsizlik momentinin değişken oluşu yüzünden doğacak olan eylemsizlik kuvvetlerinin φ koordinatına indirgenmiş eşdeğer momentinden başka bir şey değildir. Bu moment

$$M_e(\varphi, \bar{\omega}) = -\frac{1}{2}\frac{d\tilde{I}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \bar{\omega}^2 = -C(\varphi) \cdot \bar{\omega}^2 \qquad (6.2.7)$$

şeklinde göserilirse, düzgün hareket koşulu olarak (6.2.5) yerine

$$m(\varphi, \bar{\omega}) = M(\varphi, \bar{\omega}) + M_e(\varphi, \bar{\omega}) \equiv 0 \qquad (6.2.8)$$

yazılabilir. Buna göre (6.2.5) koşulunun ifade ettiği gerçeğin, makina milinin $\bar{\omega}$ hızıyla düzgün olarak dönebilmesi için mile bu hızda etkiyen gerçek ve kurgusal eylemsizlik momentlerinin toplamının her an sıfır etmesi gerektiği gerçeğinden başka bir şey olmadığı anlaşılmaktadır.

ii) Makinanın mile indirgenmiş kütlesel eylemsizlik momentinin sabit kısmı $\bar{I}$ ne kadar büyükse makinadaki hız değişimleri o kadar küçük olur. (6.2.3) eşitliğine şöyle bir göz atmakla hemen çıkartılabilen bu sonuç, eylemsizliğin cisimlerin hız değişimlerine karşı koyma özelliğinden başka bir şey olmadığı anımsanırsa kolay anlaşılan hatta beklenen bir sonuç olarak görünür.

Bu değerlendirmeler, makinalardaki hız dalgalanmalarını gidermenin başlıca iki yolunun bulunacağını ortaya koymaktadır. Bunlardan ilki, makina genelleştirilmiş kuvveti $M(\varphi, \bar{\omega})$ ile kütlesel eylemsizlik momenti $\Im(\varphi) = \bar{I} + \tilde{I}(\varphi)$ arasında, (6.2.5) eşitliği gerçeklenecek biçimde bir uyum sağlanması, ikincisi ise makina milinin kütlesel eylemsizlik momentinin arttırılarak $\bar{I}$ nin büyütülmesidir. Aşağıda bu iki yol ayrı ayrı ele alınacaktır.

6.2.2 $M(\varphi, \bar{\omega})$ İLE $\Im(\varphi)$ ARASINDA UYUM SAĞLANMASI

Yukarıda görüldüğü gibi, makina milinin $\bar{\omega}$ hızıyla tam düzgün olarak dönmesini sağlamanın yolu, $M(\varphi, \bar{\omega})$ ile $\Im(\varphi) = \bar{I} + \tilde{I}(\varphi)$ arasında,

$$M(\varphi, \bar{\omega}) - \frac{1}{2}\frac{d\tilde{I}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \bar{\omega}^2 \equiv 0 \qquad (6.2.9)$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde bir uyum sağlanmasıdır. Hem genelleştirilmiş kuvveti hem genelleştirilmiş eylemsizliği konumun fonksiyonu olan bir makinada böyle bir uyumun kendiliğinden bulunmasının çok küçük bir olasılık olduğu ortadadır. Düzgün

çalışmanın çok büyük önem taşıdığı makinalarda, $M(\varphi, \bar{\omega})$ ve/veya $\Im(\varphi)$ değiştirilerek bu uyumu sağlamanın yolları aranabilir.

$M(\varphi, \bar{\omega})$ yi değiştirmenin uygulamada baş vurulan bir yolu, makinaya, $M(\varphi, \bar{\omega})$ nin fazla geldiği konumlarda harekete karşı koyarak sıkışan ve potansiyel enerji depolayan; $M(\varphi, \bar{\omega})$ nin eksik geldiği konumlarda ise harekete destek olarak bu enerjiyi iade eden mekanik, pnömatik vb. yay elemanları eklemektir. Bu tür elemanlara *kompansatör* adı verilir.

$\Im(\varphi)$ yi değiştirmenin yolu ise, makinaya, arzu edilen $\Im(\varphi)$ ye sahip olacak biçimde tasarlanmış mekanizmalar eklemektir. Arzu edilen $\Im(\varphi)$ ye sahip olacak biçimde tasarlanması en kolay mekanizma tipi olduğu için bu amaçla en çok yürek mekanizmaları kullanılır.

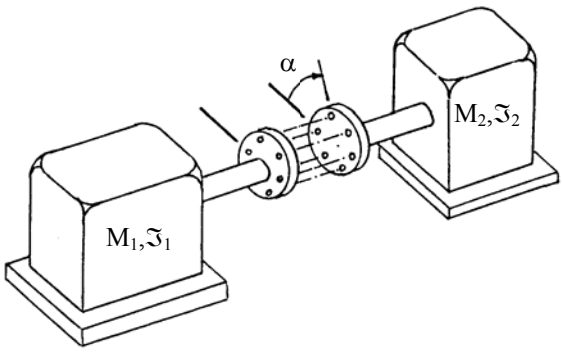
Hemen anlaşılacağı gibi, yukarıda anılan yolların her ikisi de ancak çok özel durumlarda göze alınabilecek, incelikli ve masraflı yollardır. Biz de burada bu yolların ayrıntılı bir incelemesine girişmeyeceğiz. Fakat $M(\varphi, \bar{\omega})$ ile $\Im(\varphi)$ arasında tam değilse de göreli bir uyum sağlanmasına, yani hareketin düzgünlüğünün göreli olarak iyileştirilmesine olanak verebilen çok basit bir yoldan söz etmeden geçmeyelim. Makinaların bir çoğu eş çalışan bir çok mekanizmadan oluşur. Örneğin Şekil 6.2.1 deki gibi iki mekanizmadan oluşan bir makina göz önüne alınırsa makinanın toplam genelleştirilmiş kuvvet ve eylemsizliği bu iki mekanizmanınkilerin toplamı olarak

$$M(\varphi, \bar{\omega}) = M_1(\varphi, \bar{\omega}) + M_2(\varphi, \bar{\omega}) \ , \ \Im(\varphi) = \Im_1(\varphi) + \Im_2(\varphi) \qquad (6.2.10\ a)$$

şeklinde olacaktır. İki mekanizmanın bağlanma açısının α kadar kaydırılması halinde ise (Şek. 6.2.1)

$$M'(\varphi, \bar{\omega}) = M_1(\varphi, \bar{\omega}) + M_2(\varphi + \alpha, \bar{\omega}) \ , \ \Im'(\varphi) = \Im_1(\varphi) + \Im_2(\varphi + \alpha) \qquad (6.2.10\ b)$$

olur. $M(\varphi, \bar{\omega})$ - $\Im(\varphi)$ ikilisi arasındaki uyumla $M'(\varphi, \bar{\omega})$ - $\Im'(\varphi)$ ikilisi arasındaki



Şekil 6.2.1 Makinanın Kısımları Arasındaki Faz Farkının Değiştirilmesi

uyumun birbirinden çok farklı olabileceği ortadadır. Buradan, makina kısımları arasındaki faz farkının değiştirilmesinin daha düzgün bir çalışma elde edilmesini sağlayabileceği anlaşılır. Her ne kadar bunun bir garantisi yok ise de, imal edilmiş bir makinada düzgünlük arttırıcı diğer önlemlere baş vurmadan önce bu basit yolun denenmesinde yarar vardır.

6.2.3 MİLİN KÜTLESEL EYLEMSİZLİK MOMENTİNİN ARTTIRILMASI• EYLEMSİZLİK ÇARKI

6.2.3.1 Genel Bilgiler

Yukarıda,

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\varphi} = \frac{M(\varphi,\omega) - C(\varphi)\cdot\omega^2}{\bar{I} + \tilde{I}(\varphi)} \qquad (6.2.11)$$

bağıntısı uyarınca, makinanın mile indirgenmiş kütlesel eylemsizlik momentinin sabit kısmı $\bar{I}$ nin büyümesinin hız değişimlerini küçülteceği belirlenmişti. Tam düzgün hareket için $\bar{I} \to \infty$ olması gerektiğine dikkat edilirse bu yoldan tam düzgün hareket elde edilmesinin olanaksız olduğu belli olmakla birlikte, kabul edilebilir bir $\bar{I}$ değeri ile hız dalgalanma katsayısı δ nın kabul edilebilir bir değere çekilebilmesi olanaklıdır ve bu, makinalardaki hız dalgalanmalarını gidermenin en yaygın baş vurulan mühendislik çözümünü oluşturur. Bu amaçla makina millerine büyük kütlesel eylemsizlik momentine sahip çarklar bağlanır. Bunlara *eylemsizlik çarkı* ya da *volan* adı verilir. En az malzemeyle (en az maliyet, en az ek ağırlık) dönme eksenine göre en büyük eylemsizlik momenti katkısı elde etmek üzere, eylemsizlik çarklarının, dönme ekseninden en uzak noktalarda malzeme yoğunlaşması sağlayacak biçimde tasarlanması esastır. Ancak göbek civarında malzeme eksiltilmesi merkezkaç kuvvet etkisine karşı dayanımı azaltacağı için yüksek hızla dönecek çarkların tasarımında buna da dikkat edilmesi gerekir. Harcanan malzeme ve hacmin maliyetini düşürmek için, iyi bir mühendislik çözümünde eylemsizlik çarklarına her zaman ikinci bir görev daha yüklenir. Şek. 6.2.2 de, bir otomobil motorunun krank miline bağlanan ve aynı zamanda dişli çark olarak görev yapan bir eylemsizlik çarkı gösterilmiştir.

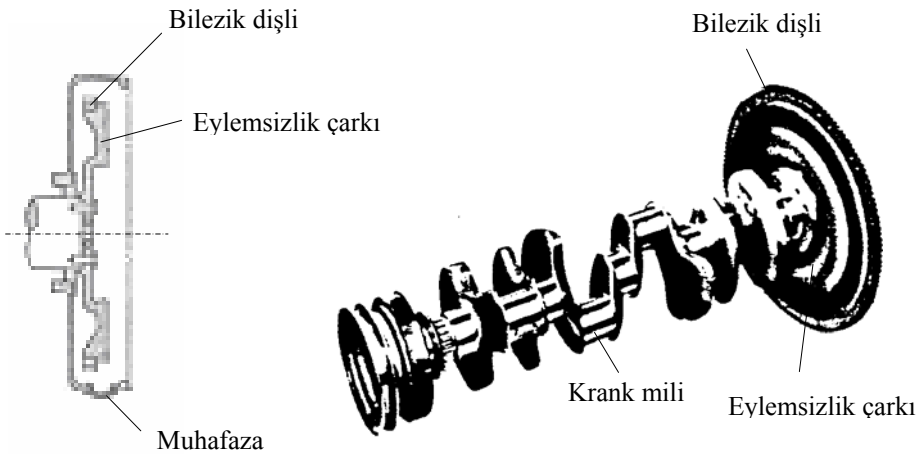
Mile, kütlesel eylemsizlik momenti I_v olan bir eylemsizlik çarkı bağlandığında

$$\Im(\varphi) = I_V + \bar{I} + \tilde{I}(\varphi) \qquad (6.2.12)$$

olacağından (6.2.11)

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\varphi} = \frac{M(\varphi,\omega) - C(\varphi)\cdot\omega^2}{I_V + \bar{I} + \tilde{I}(\varphi)} \qquad (6.2.13)$$

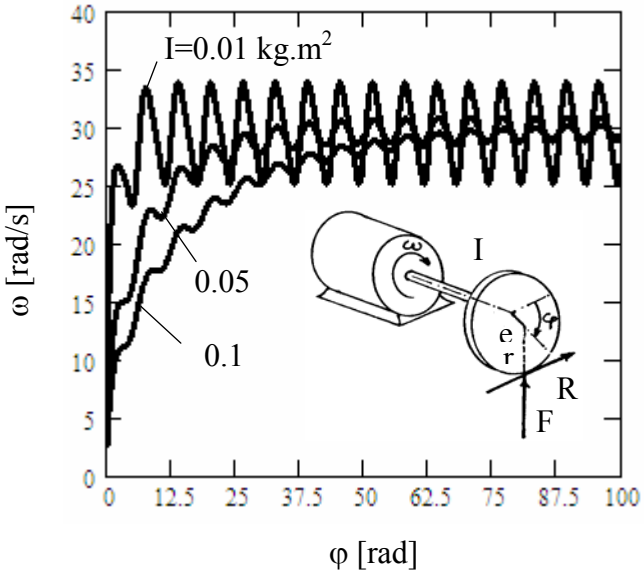
şeklini alır. Kuramsal olarak, I_v nin yeterince büyük seçilmesiyle hız değişimleri istenildiği kadar küçük kılınabilir ise de uygulamada I_v nin keyfi olarak büyütülmesi olanaksızdır. Bunun, makinanın hacim, ağırlık ve maliyetinin sınırlı tutulması gibi



Şekil 6.2.2 Bir Otomobil Motorunun Krank Miline Bağlı Eylemsizlik Çarkı

pratik gerekçeleri yanında bir de dinamik gerekçesi vardır. Büyüyen eylemsizlik, makinanın yol alma evresinde nominal hıza ulaşma süresinin, durma evresinde ise durma süresinin uzamasına yol açar. Şekil 6.2.3 te, Bölüm 4.5.2.2 de incelenmiş olan taşlama makinasının yol alma ve stasyoner hareket evreleri, farklı I değerleri için çizdirilmiştir. Bu şekilden, artan I nin hız dalgalanmasını azaltırken yol alma süresini uzatışı açıkça görülmektedir.

Bütün bu nedenlerle, eylemsizlik çarkının, δ dalgalanma katsayısını kabul edilebilir değere çekmek için yeterli olandan daha büyük seçilmemesi gerekir. Aşağıda, gerekli eylemsizlik çarkının hesaplanması problemi ele alınacaktır.



Şekil 6.2.3 Eylemsizlik Çarkının Etkisi

6.2.3.2 Eylemsizlik Çarkı Hesabı

Eylemsizlik çarkı hesabı denildiğinde, bir makina milinin belli bir $\overline{\omega}$ ortalama hızıyla dönerken hız dalgalanma katsayısının verilmiş bir δ değerini almasını sağlamak üzere bu mile bağlanması gereken eylemsizlik çarkının I_v kütlesel eylemsizlik momentinin hesabı anlaşılır.

Kuşkusuz makina hareket denkleminin analitik ya da sayısal yoldan çözülmesi yani makina hareketinin simülasyonunun gerçekleştirilmesi halinde (Şekil 6.2.3 teki gibi), ek bir hesaba gerek duyulmaksızın bir kaç deneme yanılmayla gerekli I_v nin belirlenmesi her zaman olanaklıdır. Ancak biz burada eylemsizlik çarkı hesabının daha spesifik bir yolu üzerinde durmak istiyoruz.

Bu amaçla (6.2.13) bağıntısı ele alınır, burada sabit terime I_v nin katılmasıyla, değişken terimin sabit terimler yanında küçük kalacağına dayanılarak $I_v + \bar{I} + \tilde{I}(\varphi) \cong I_v + \bar{I}$ yaklaşıklığı, ayrıca eylemsizlik çarkı kullanıldığında mil hızının ortalama değerden sapmalarının göz ardı edilebilir mertebede kalacağına dayanılarak $\omega \cong \overline{\omega}$ yaklaşıklığı yapılırsa

$$\frac{1}{2}\left(I_v + \bar{I}\right)\cdot d\omega^2 = m(\varphi,\overline{\omega})\cdot d\varphi \qquad (6.2.14)$$

yazılabilir. Burada

$$m(\varphi,\overline{\omega}) = M(\varphi,\overline{\omega}) - C(\varphi)\cdot\overline{\omega}^2 \qquad (6.2.15)$$

makinaya $\overline{\omega}$ hızında etkiyen tüm (gerçek ve kurgusal) kuvvetlerin mile indirgenmiş eşdeğer momentini temsil etmektedir. (6.2.14) eşitliğinin her iki yanı, hızın minimum olduğu durumdan ($\varphi_{min}, \omega_{min}$ diyelim) hızın maksimum olduğu duruma ($\varphi_{maks}, \omega_{maks}$ diyelim) kadar integre edilerek

$$\frac{1}{2}\left(I_v + \bar{I}\right)\cdot\int_{\omega_{min}^2}^{\omega_{maks}^2} d\omega^2 = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{maks}} m(\varphi,\overline{\omega})\cdot d\varphi \qquad (6.2.16)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı, (6.1.1) ve (6.1.3) tanımlarının da anımsanmasıyla

$$\frac{1}{2}\left(I_v + \bar{I}\right)\cdot\left(\omega_{maks}^2 - \omega_{min}^2\right) = \left(I_v + \bar{I}\right)\cdot\left(\omega_{maks} - \omega_{min}\right)\frac{\left(\omega_{maks} + \omega_{min}\right)}{2} = \left(I_v + \bar{I}\right)\cdot\delta\cdot\overline{\omega}^2 \qquad (6.2.17)$$

verir. Sağ taraf ise $m(\varphi,\overline{\omega})$ momentinin, hız minimumdan maksimuma ulaşıncaya kadar yaptığı işten başka bir şey değildir. Bu iş

$$\Delta W = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{maks}} m(\varphi, \overline{\omega}) \cdot d\varphi \qquad (6.2.18)$$

şeklinde gösterilirse, (6.2.17) ve (6.2.18) ile (6.2.16) ya dönülerek

$$I_V = \frac{\Delta W}{\delta \cdot \overline{\omega}^2} - \overline{I} \qquad (6.2.19)$$

elde edilir. Bu bağıntı, eylemsizlik çarkı hesabının aranan bağıntısıdır. ΔW nin belirlenebildiği her problemde, buradan, makinanın $\overline{\omega}$ ortalama hızıyla ve dalgalanma katsayısı δ olacak biçimde çalışmasını sağlamak üzere mile bağlanması gereken eylemsizlik çarkının I_v kütlesel eylemsizlik momenti hesaplanabilir.

ΔW nin belirlenmesinde karşı karşıya kalınan en büyük sorun, hızın minimum ve maksimum olduğu makina konumlarının belirlenmesi sorunudur. Esasında stasyoner hareket evresinde makina hareketi genellikle φ konumuna göre peryodik olduğundan, $\phi = 2k\pi$ peryodu içerisindeki hız ekstremumlarının bulunması yeterlidir. Hızın bir peryod içerisinde tek bir minimuma ve tek bir maksimuma sahip olduğu problemlerde bu ekstremumların ortaya çıktığı konumlar genellikle kolayca belirlenebilir ise de bir peryod içerisinde bir çok yerel minimum ve maksimumun bulunduğu problemlerde hesapta gerekli olan genel minimum ve genel maksimumun belirlenmesi zorlu bir problem oluşturur. Böyle durumlarda kullanılmak üzere yarı grafik yarı analitik bir yöntem geliştirilmiştir. Şimdi *Radinger Yöntemi* adı verilen bu yöntemi ele alalım.

Radinger Yöntemi:

Hızın ekstremum olduğu makina konumlarında, ekstremumun gerek koşulu olarak

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} = 0 \qquad (6.2.20)$$

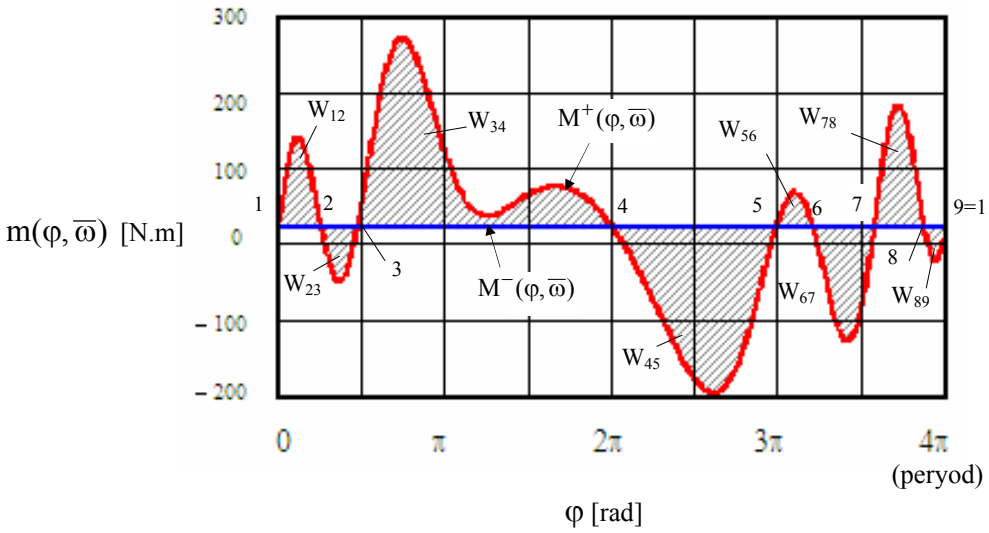
olmalıdır. Oysa (6.2.14) e göre bu

$$m(\varphi, \overline{\omega}) = 0 \qquad (6.2.21)$$

olmasını gerektirir. (4.5.1) ve (6.2.8) bağıntıları yardımıyla $m(\varphi, \overline{\omega})$ bileşenlerine ayrılarak yazılırsa bu koşul

$$m(\varphi, \overline{\omega}) = \left[M_ç(\varphi, \overline{\omega}) + M_k(\varphi) + M_e(\varphi, \overline{\omega})\right] - \left[M_S(\varphi, \overline{\omega}) + M_W(\varphi, \overline{\omega})\right] = 0 \qquad (6.2.22)$$

ya da buradaki pozitif ve negatif terimler



Şekil 6.2.4 Radinger Yöntemi

$$M^{+}(\varphi,\overline{\omega}) = \left[M_{ç}(\varphi,\overline{\omega}) + M_{k}(\varphi) + M_{e}(\varphi,\overline{\omega})\right]$$

$$M^{-}(\varphi,\overline{\omega}) = \left[M_{S}(\varphi,\overline{\omega}) + M_{W}(\varphi,\overline{\omega})\right] \qquad (6.2.23)$$

şeklinde gruplanarak

$$m(\varphi,\overline{\omega}) = M^{+}(\varphi,\overline{\omega}) - M^{-}(\varphi,\overline{\omega}) = 0 \qquad (6.2.24)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $M^{+}(\varphi,\overline{\omega})$ ve $M^{-}(\varphi,\overline{\omega})$ momentlerinin makina hareketinin bir peryoduna karşılık gelen kısımları aynı M-φ diyagramına çizilirse (Şek. 6.2.4), iki eğrinin kesişme noktaları (6.2.24) eşitliğinin sağlandığı, dolayısıyla da hızın ekstremum olduğu φ konumlarını belirler. Bu konumlar φ_1, φ_2, …, φ_n (peryodiklikten $\varphi_n \equiv \varphi_1$) olsun. Ayrıca bu iki eğri arasında hapsolan alanın da $M^{+}(\varphi,\overline{\omega})$ nın üstte olduğu bölgelerde pozitif, $M^{-}(\varphi,\overline{\omega})$ nin üstte olduğu bölgelerde negatif olmak üzere $m(\varphi,\overline{\omega})$ momentinin yaptığı $\int m(\varphi,\overline{\omega}) \cdot d\varphi = \int \left[M^{+}(\varphi,\overline{\omega}) - M^{-}(\varphi,\overline{\omega})\right] \cdot d\varphi$ işini göstereceği açıktır. Buna göre $m(\varphi,\overline{\omega})$ momentinin, hızın ekstremum değer aldığı ardışık φ_j-φ_{j+1} noktaları arasında yaptığı işler, ölçekli diyagram üzerinden ölçülerek W_{12}, W_{23}, … şeklinde belirlenebilir. Bunlara *iş fazlalıkları* adı verilir. Kolayca anlaşılacağı gibi pozitif bir $W_{j(j+1)}$ iş fazlalığı, φ_j de bir yerel hız minimumu, φ_{j+1} de ise bir yerel hız maksimumu bulunduğunu; negatif bir $W_{j(j+1)}$ iş fazlalığı ise, φ_j de bir yerel hız maksimumu, φ_{j+1} de bir yerel hız minimumu bulunduğunu gösterir. Genel minimum ve maksimumun ortaya çıktığı konumları bulmak için

$$
\begin{aligned}
&W_{12} \\
&W_{13} = W_{12} + W_{23} \\
&W_{14} = W_{13} + W_{34} \qquad\qquad (6.2.25) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&W_{1(n-1)} = W_{1(n-2)} + W_{(n-2)(n-1)} \\
&W_{1n} = W_{1(n-1)} + W_{(n-1)n} = 0 \qquad \text{(peryodiklikten)}
\end{aligned}
$$

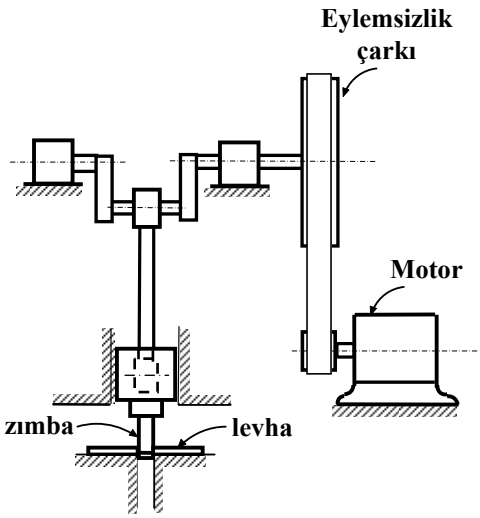
*birikimli iş fazlalıkları*nın hesaplanıp birbiriyle karşılaştırılması yeterlidir. Bunlardan en büyük değere sahip olanı W_{1M}, en küçük değere sahip olanı ise W_{1m} olsun. Buradan hızın genel maksimumunun φ_M noktasında; genel minimumunun ise φ_m noktasında ortaya çıkacağı anlaşılır. Eylemsizlik çarkı hesabında gerekli olan ΔW de artık kolayca

$$\Delta W = W_{1M} - W_{1m} \qquad (6.2.26)$$

şeklinde hesaplanır.

ÖRNEK PROBLEMLER

Problem 6.2.1



Şekil Pr. 6.2.1-1 Zımba Makinası

Şekilde krank-biyel mekanizması esaslı bir zımba makinası gösterilmiştir. Makina bir kayış-kasnak mekanizması yardımıyla bir elektrik motoru tarafından, krank mili $\bar{n} = 120$ d/dak ortalama hızıyla dönecek biçimde çalıştırılacaktır. Krank milinin her devrinde bir zımbalama işlemi yapılacak, bu işlem devrin 1/6 sı kadar sürecek ve zımbalanacak malzemenin cinsine, et kalınlığına ve açılacak deliğin çapına bağlı olarak en çok $W_{zım} = 3600$ N.m lik bir iş yapılmasını gerektirecektir. Krank miline bağlı kasnağın aynı zamanda bir eylemsizlik çarkı olarak değerlendirilmesi düşünülmektedir. Motor ve makinanın kasnak dışındaki uzuvları dikkate alındığında, makinanın mile indirgenmiş eylemsizlik momentinin sabit kısmı $\bar{I} = 25$ kg.m^2 olarak bilindiğine ve mil hızındaki dalgalanmaların $\pm$ 12 d/dak sınırları içerisinde kalması istendiğine göre kasnağın kütlesel eylemsizlik momenti I_v ne olmalıdır?

Çözüm:

İlk bakışta zorlu bir problem gibi görülen bu problem kimi kabul ve yaklaşıklıklar çerçevesinde çok basit bir biçimde çözülebilir. Bu amaçla ilkin, bu makina özelinde iş ve çalıştırma momentleri yanında göz ardı edilebilir mertebede

kalacakları düşüncesi ile, olası sönüm kuvvetlerine, ağırlık kuvvetlerine ve sabit hızdaki eylemsizlik kuvvetlerine ilişkin momentleri ihmal etmeyi kararlaştıralım: $M_s = 0$, $M_k = 0$, $M_e = 0$. Böylece geriye sadece makinadan enerji çeken iş momenti ile makinaya enerji veren çalıştırma momenti kalır. Buna göre bir rejim oluşması için motorun makinaya her devirde, zımbalama için gereken $W_{zım}$ işine eşit enerji vermesi gerekir. Öte yandan makina milinin ortalama hızı

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi\bar{n}}{60} = \frac{2\pi 120}{60} = 4\pi \text{ rad/s} \qquad \text{(i)}$$

olduğuna göre her devir

$$T = \frac{2\pi}{\varpi} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5 \text{ s} \qquad \text{(ii)}$$

sürecektir. Böylece, kullanılacak motorun ortalama gücünün

$$G_m = \frac{W_{zım}}{T} = \frac{3600}{0.5} = 7200 \text{ watt} \qquad \text{(iii)}$$

olması gerektiği anlaşılır. Bu makinada en düşük mil hızının zımbalama işleminin bitiş anı civarında, en yüksek mil hızının ise bu işlemin başlama anı civarında ortaya çıkacağı açıktır. Zımbalama işleminin ise 1/6 devir süreceği bilinmektedir. Eylemsizlik çarkı sayesinde mil hızının yaklaşık olarak sabit kalacağı düşünülürse bu T/6 kadarlık bir süre demektir. Buna göre eylemsizlik çarkı hesabında gerekli olan ΔW enerjisi, bir zımbalamanın sonundan yeni zımbalamanın başlangıcına kadar geçecek olan 5T/6 kadarlık sürede tek başına etkiyen motorun sisteme vereceği enerjiden ibarettir. Mil hızının sabit kalacağı kabulünün, aynı zamanda, elektrik motorunun moment ve gücünün de yaklaşık olarak sabit kalacağı anlamına geldiği düşünülürse bu enerji

$$\Delta W = \frac{5}{6} T \cdot G_m = \frac{5}{6} \cdot 0.5 \cdot 7200 = 3000 \text{ J} \qquad \text{(iv)}$$

şeklinde hesaplanabilir. Öte yandan, hız dalgalanma katsayısının istenen değeri de

$$\delta = \frac{n_{maks} - n_{min}}{\bar{n}} = \frac{(\bar{n}+12)-(\bar{n}-12)}{\bar{n}} = \frac{24}{\bar{n}} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} \qquad \text{(v)}$$

olarak bellidir. Bu verilerle eylemsizlik çarkı olarak kullanılacak kasnağın kütlesel eylemsizlik momenti

$$I_v = \frac{\Delta W}{\delta \cdot \varpi^2} - \bar{I} = \frac{3000}{1/5 \cdot (4\pi)^2} - 25 \cong 70 \text{ kg.m}^2 \qquad \text{(vi)}$$

olarak hesaplanır.

Bu makinada eylemsizlik çarkının gördüğü işlev üzerine biraz düşünülecek olursa, motorun zımbalama işlemi dışında verdiği enerjiyi kinetik enerji biçiminde depolayan ve bu işlem sırasındaki ani hız düşümü sırasında sisteme iade eden bir enerji deposu olarak görev yaptığı anlaşılır. Eylemsizlik çarkları, bu işlevleriyle, incelenen zımba makinasında olduğu gibi çalışmasının kısa bir evresinde büyük enerji harcaması gerektiren makinalarda yaygın olarak kullanılır ve bir yandan bu makinaların düzgün çalışmasını sağlarken bir yandan da motordan enerji alımını zamana yayarak gerekli motor gücünü küçültürler.

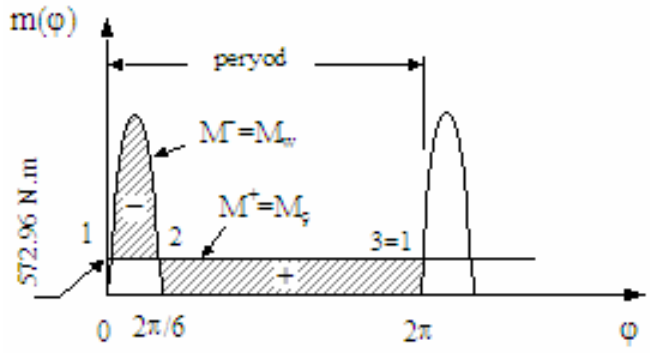
Bu problemi kapatmadan, burada yapılan hesabın Radinger Yöntemi ile ilişkisinin kurulması da öğretici olabilir. Çözümde yapılan $G_m = \text{sabit}$, $\omega = \varpi = \text{sabit}$ kabullerinin, motorun verdiği çalıştırma momentinin de

$$M_ç = \frac{G_m}{\varpi} = \frac{7200}{4\pi} = 572.96 \text{ N.m} \qquad \text{(vii)}$$

değerinde sabit kalması anlamına geldiğine dikkat edilir, bunun yanısıra $M_s = 0$, $M_k = 0$ ve $M_e = 0$ kabullerinin de yapıldığı anımsanırsa bu problemde

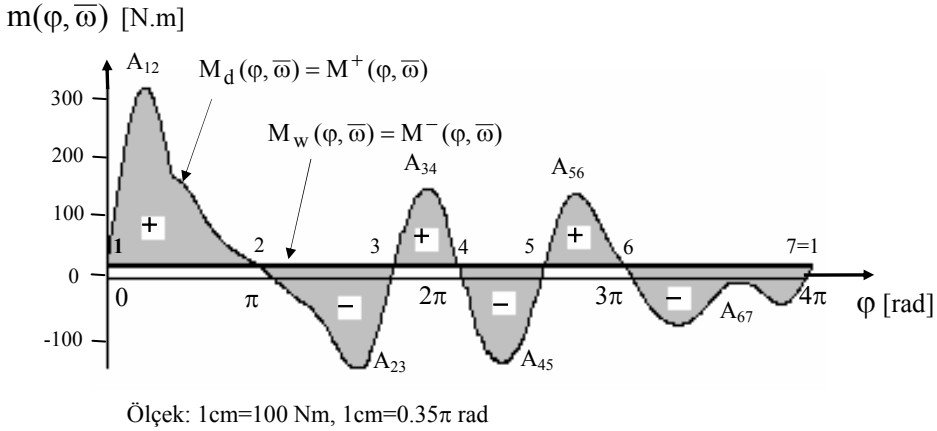
$$M^+(\varphi, \overline{\omega}) = M_ç = 572.96 \text{ N.m}, \quad M^-(\varphi, \overline{\omega}) = M_w \qquad \text{(viii)}$$

alınmış olduğu anlaşılır. Bu momentlere karşılık gelen $m(\varphi)$ diyagramı Şek. Pr.6.2.1-2 de verilmiştir. Bu diyagram yardımıyla Radinger yöntemi kullanılarak yapılacak hesabın yukarıdaki ile aynı sonucu vereceği kolayca görülebilir.



Şekil Pr.6.2.1-2

Problem 6.2.2



Şekil Pr.6.2.2

Şekilde, sabit direnç momenti etkisi altında çalışan tek silindirli, 4 zamanlı bir benzin motorunun, krank milinin $\bar{n} = 3500$ d/dak ortalama hızıyla dönmesi haline ilişkin döndürme ve iş momenti diyagramlarının bir peryodluk kısmı gösterilmiştir. Bu motorun çalışması sırasında hız dalgalanma katsayısının $\delta = 1/250$ olması istendiğine, motorun mile indirgenmiş eylemsizlik momentinin sabit kısmı $\bar{I} = 0.35$ kg.m^2 olarak bilindiğine ve şekilden, iş fazlalıklarının alan karşılıkları

$$A_{12} = +2.94 \text{ cm}^2 \qquad A_{23} = -1.75 \text{ cm}^2 \qquad A_{34} = +0.81 \text{ cm}^2$$

$$A_{45} = -1.38 \text{ cm}^2 \qquad A_{56} = +0.88 \text{ cm}^2 \qquad A_{67} = -1.50 \text{ cm}^2$$

şeklinde belirlendiğine göre krank miline bağlanması gereken eylemsizlik çarkını hesaplayınız.

Çözüm:

Verilenlerden, birikimli iş fazlalıklarının alan karşılıkları

$A_{12} = +2.94 \text{ cm}^2$ ……..... → $\mathbf{A_{1M}}$

$$A_{13} = A_{12} + A_{2-} = +2.94 - 1.75 = +1.19 \text{ cm}^2$$

$$A_{14} = A_{13} + A_{34} = +1.19 + 0.81 = +2.00 \text{ cm}^2$$

$$A_{15} = A_{14} + A_{45} = +2.00 - 1.38 = +0.62 \text{ cm}^2 \qquad \text{(i)}$$

$$A_{1-6} = A_{1-5} + A_{5-6} = +0.62 + 0.88 = +1.50 \text{ cm}^2$$

$$A_{17} = A_{16} + A_{67} = +1.50 - 1.50 = 0 \ \text{cm}^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \mathbf{A_{1m}}$$

şeklinde hesaplanır. Birikimli iş fazlalıklarının karşılaştırılmasından, en yüksek hızın en büyük birikimli iş fazlalığına karşılık gelen 2 noktasında, en düşük hızın ise en küçük birikimli iş fazlalığına karşılık gelen 7=1 noktasında ortaya çıkacağı anlaşılmaktadır. Şekil ölçeği yardımıyla enerji/alan ölçeğinin

$$k_{ea} \cong \frac{100\text{Nm}}{\text{cm}} \times \frac{0.35\pi\text{rad}}{\text{cm}} = 35\pi \ \ \text{J/cm}^2 \qquad \text{(ii)}$$

olduğuna da dikkat edilerek eylemsizlik çarkı hesabına geçilirse

$$I_v = \frac{\Delta W}{\delta \cdot \varpi^2} - \bar{I} = \frac{W_{1M} - W_{1m}}{\delta \cdot \varpi^2} - \bar{I} = \frac{k_{ea}\left(A_{1M} - A_{1m}\right)}{\delta \cdot \left(\frac{\pi \cdot \bar{n}}{30}\right)^2} - \bar{I} \qquad \text{(iii)}$$

şeklinde hesap yapılarak

$$I_v = \frac{35\pi \cdot [+2.94 - 0]}{\frac{1}{250} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 3500}{30}\right)^2} - 0.35 = 0.25 \ \text{kg.m}^2 \qquad \text{(iv)}$$

bulunur.

Bu problemde olduğu gibi, içten yanmalı motorlarda, bu motorların verdiği dalgalı döndürme momentine karşın düzgün bir hareket elde edebilmek için, eylemsizlik çarkları kullanılır. Krank miline bağlanan bu çarklar, genellikle, kam mili, şarj dinamosu, soğutma pervanesi vb. gibi ikincil mekanizmalara güç ileten bir mekanizmanın da parçası olacak biçimde tasarlanırlar (Bkz. Şek. 6.2.2).

7 MAKİNALARDA KUVVET ÇÖZÜMLEMESİ

7.1 GENEL BELİRLEMELER

Makinalarda kuvvet çözümlemesi denildiğinde, makina uzuvlarının, bağlantı halinde bulundukları eleman çiftlerinde birbirlerine uyguladıkları etkileşim kuvvetlerinin hesabı anlaşılır. Bu kuvvetlerin hesabı, hem bağlantı elemanlarının hem de makina uzuvlarının dayanıma göre boyutlandırılmasında büyük önem taşır. Kuvvetlerin hesaplanmak yerine tahmin edilmesine dayalı bir boyutlandırma, düşük tahmin halinde makinanın harap olmasına, yüksek tahmin halinde ise gereksiz yere ağır, hantal ve pahalı makinaların ortaya çıkmasına yol açar. Bu yüzden, özellikle seri üretilecek makinalarda, bu makinaların benzerleriyle rekabet edebilmesi isteniyorsa gerekli dayanıma sahip en hafif makinanın tasarlanması, bunun için de kuvvet çözümlemesi bir zorunluluktur.

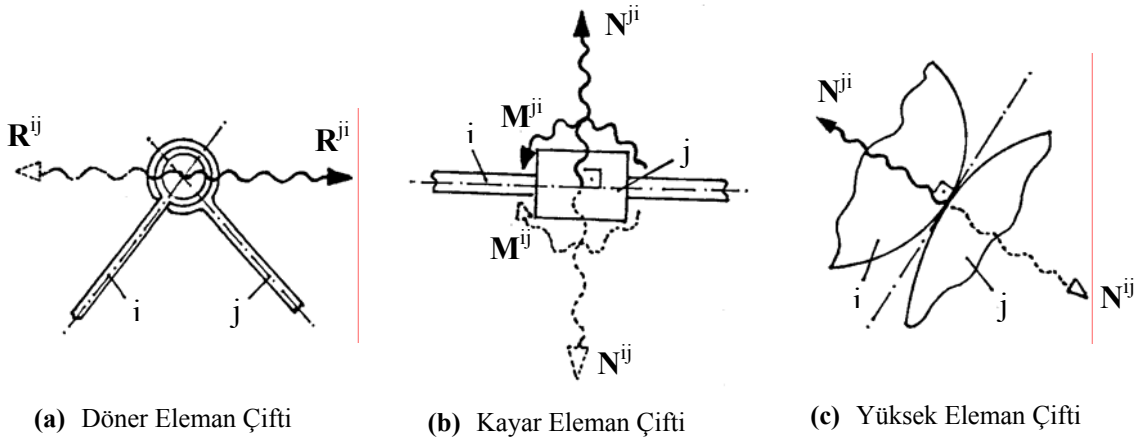
Bilindiği gibi makina uzuvlarının eleman çiftlerinde birbirlerine uyguladıkları kuvvetler kısıt kuvvetleridir. Makina dinamiği incelemelerinde şu ana kadar kullanmış olduğumuz analitik mekaniğe özgü yöntemler ise bu kuvvetleri hesap dışında bırakma üstünlüğüne sahip oldukları için yeğlenmiş olan yöntemlerdir. Amacın doğrudan doğruya bu kuvvetlerin hesaplanması olduğu şu anda bu üstünlüğün bir kusura dönüşeceği ortadadır. Bu yüzden, makinalarda kuvvet çözümlemesi problemi, vektörel mekaniğe özgü yöntemlerle ele alınır. Burada da böyle yapılacaktır.

Daha önce olduğu gibi kuvvet çözümlemesinde de inceleme ideal, holonomik kısıtlara sahip, düzlemsel hareket yapan düzlemsel uzuvlardan oluşan tek serbestlik dereceli makinalarla sınırlı tutulacaktır.

7.2 KUVVET ÇÖZÜMLEMESİ PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

Makinalarda iki hareketli uzvu birbirine bağlayan adi eleman çiftlerine *mafsal*, hareketli bir uzvu hareketsiz uzva bağlayan adi eleman çiftlerine ise *yatak* adı verilir. Bununla bağlantılı olarak adi eleman çiftlerinde ortaya çıkan kısıt kuvvetleri de *mafsal ve yatak kuvvetleri* olarak adlandırılır. Düzlemsel makinalarda döner ve kayar olmak üzere yalnızca iki tip adi eleman çifti bulunabilir. Şimdi, kısaca, bu iki tip mafsal/yatakta ortaya çıkacak kısıt kuvvetlerine göz atalım:

Döner mafsal/yataklarda (Şek. 7.2.1-a) bir araya gelen i ve j uzuvları birbirlerine, etki çizgileri ideal sürtünmesiz kısıt halinde mafsal/yatak ekseninden geçen, şiddet, doğrultu ve yönleri önceden bilinmeyen $\mathbf{R}^{ij}$ ve $\mathbf{R}^{ji} = -\mathbf{R}^{ij}$ kuvvetleri uygularlar. (Burada ve izleyen bölümlerde, $\mathbf{R}^{ij}$ gösterilimi, i. uzvun j. uzva uyguladığı tepki kuvvetini göstermekte kullanılacaktır.) Buna göre, her döner mafsal/yatakta, kuvvet çözümlemesi problemi bakımından bir vektörel bilinmeyen söz konusu olacaktır. Düzlemsel makinalarda düzlemsel vektörler söz konusu olduğundan bu iki skaler bilinmeyen demektir.

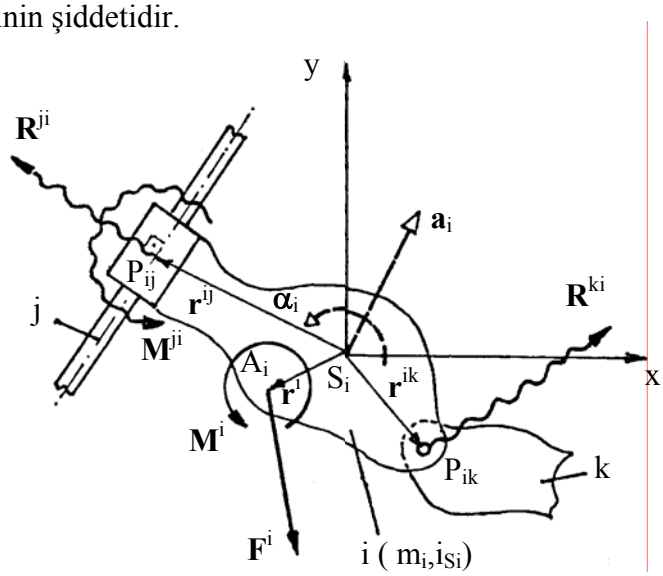


(a) Döner Eleman Çifti **(b)** Kayar Eleman Çifti **(c)** Yüksek Eleman Çifti

Şekil 7.2.1 Makinalarda Kısıt Kuvvetleri

Kayar mafsal/yataklarda (Şek. 7.2.1-b) ise iki uzuv genelde en az iki noktada temas halindedir. Dolayısıyla birbirlerine uygulayacakları etkileşim kuvvetleri de en az iki kuvvetten oluşan bir kuvvet sistemi şeklindedir. Böyle kuvvet sistemlerinin keyfi seçilecek bir P noktasına indirgenerek, P'ye etkiyen bir $\mathbf{N}^{ij}$ $(\mathbf{N}^{ji} = -\mathbf{N}^{ij})$ bileşkesi ve P çevresindeki momenti $\mathbf{M}^{ij}$ $(\mathbf{M}^{ji} = -\mathbf{M}^{ij})$ olan bir kuvvet çiftiyle temsil edilebileceği bilinmektedir. İdeal sürtünmesiz kısıtlara sahip düzlemsel makinalarda $\mathbf{N}^{ij}$ vektörünün doğrultusu, hareket düzlemi içerisinde, kayma doğrultusuna dik olarak, $\mathbf{M}^{ij}$ vektörünün doğrultusu ise hareket düzlemine dik olarak bellidir. Buna göre kayar mafsal/yataklarda kuvvet çözümleme probleminin bilinmeyeni olarak yalnızca $\mathbf{N}^{ij}$ ve $\mathbf{M}^{ij}$ vektörlerinin işaretli şiddetleri kalır ki bu da iki skaler bilinmeyen demektir.

Öte yandan, yüksek eleman çiftlerinde de (Şek. 7.2.1-c) iki uzvun birbirlerine uygulayacakları $\mathbf{N}^{ij}$ $(\mathbf{N}^{ji} = -\mathbf{N}^{ij})$ etkileşim kuvvetlerinin doğrultusu, ideal sürtünmesiz kısıt halinde ortak normalin doğrultusu olarak bellidir. Buna göre yüksek eleman çiftlerinde kuvvet çözümleme probleminin tek bir skaler bilinmeyeni vardır. Bu da $\mathbf{N}^{ij}$ kuvvetinin şiddetidir.



Şekil 7.2.2 i-inci Makina Uzvunun Kuvvet Çözümlemesi

Bütün bu söylenilenlerden, ideal kısıtlara sahip düzlemsel bir makinada kuvvet çözümlemesi probleminin, e_1 makinadaki toplam adi eleman çifti sayısını, e_2 ise makinadaki toplam yüksek eleman çifti sayısını göstermek üzere

$$s = 2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \tag{7.2.1}$$

adet skaler bilinmeyen içereceği anlaşılmaktadır.

Çözümde kullanılacak denklemlere gelince, bunlar, düzlemsel hareket yapan düzlemsel birer rijid cisim olan makina uzuvlarının hareket denklemlerinden ibarettir. Bu denklemlerin nasıl yazılacağını görmek üzere Şekil 7.2.2 deki i. makina uzvunu göz önüne alalım ve bu uzvun, j. makina uzvuyla ortak bir eleman çiftine sahip olduğunu düşünelim. Bir kural olarak, ilgilendiğimiz uzvun kütle merkezi S_i yi başlangıç kabul eden S_i;x,y eksen takımlarında çalışmayı ve -varsa- uzva etkiyen $\mathbf{F}^i$, $\mathbf{M}^i$ gibi verilmiş kuvvet ve momentleri kesin çizimlerle gösterirken $\mathbf{R}^{ij}$ gibi hesaplanacak kısıt kuvvetlerini dalgalı çizimlerle göstermeyi kararlaştıralım.

Bunların yanısıra i. uzvun kütlesi m_i, kütle merkezinin ivmesi $\mathbf{a}_i = \ddot{x}_i \cdot \mathbf{i} + \ddot{y}_i \cdot \mathbf{j}$, kütle merkezine göre eylemsizlik yarıçapı i_{S_i}, açısal ivmesi α_i ile gösterilir, ayrıca, hesaplarda gerekli yer vektörleri $\mathbf{r} = r_x \cdot \mathbf{i} + r_y \cdot \mathbf{j}$, kuvvet vektörleri $\mathbf{F} = F_x \cdot \mathbf{i} + F_y \cdot \mathbf{j}$ şeklinde bileşenlerine ayrılarak düşünülür ve moment hesaplarında gerekli vektörel çarpımlar $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = r_x F_y - r_y F_x$ şeklinde ifade edilirse i. uzvun hareket denklemleri, kütle merkezinin hareketine ilişkin 2 denklem ve cismin kütle merkezi çevresinde dönmesine ilişkin 1 denklem olmak üzere

$$m_i \ddot{x}_i = F_x^i + \sum_j R_x^{ji} \tag{7.2.2}$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_y^i + \sum_j R_y^{ji} \tag{7.2.3}$$

$$m_i \cdot i_{S_i}^2 \cdot \alpha_i = M_i + r_x^i \cdot F_y^i - r_y^i \cdot F_x^i + \sum_j \left(r_x^{ij} \cdot R_y^{ji} - r_y^{ij} \cdot R_x^{ji} \right) + \sum_j M^{ji} \tag{7.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bir uzuv için üç skaler hareket denklemi söz konusu olduğuna göre, n uzuvlu bir makinanın n-1 adet hareketli uzvu için, toplam

$$d = 3 \cdot (n - 1) \tag{7.2.5}$$

denklem yazılabilecektir. Kuvvet çözümlemesi probleminin denklem-bilinmeyen dengesi için bu sayının (7.2.1) deki bilinmeyen sayısına eşit olması gerekir. Oysa tek serbestlik dereceli düzlemsel makinaların

$$f = 3 \cdot (n - 1) - (2 \cdot e_1 + e_2) = 1 \tag{7.2.6}$$

koşulunu sağladıkları bilinmektedir. Buna göre tek serbestlik dereceli düzlemsel makinalarda

$$d - s = 1 \qquad (7.2.7)$$

eşitliği geçerlidir. Yani kuvvet çözümleme probleminin denklem sayısı bilinmeyen sayısından bir fazladır. Bunun nedeni $d = 3 \cdot (n - 1)$ adet denklemin birbirinden bağımsız olmayıp, aralarında, makina hareket denklemi sağlanacak biçimde bir bağ bulunmasıdır. Kuramsal olarak, makina hareket denklemi kullanılarak denklem sayısı bir eksiltilebilir ise de bu kolay bir iş değildir. Uygulamada bunun yerine probleme ek bir bilinmeyen katarak bilinmeyen sayısıyla denklem sayısının bu yoldan denkleştirilmesi yeğlenir. Bu ek bilinmeyen makinanın çalıştırma kuvvetidir.

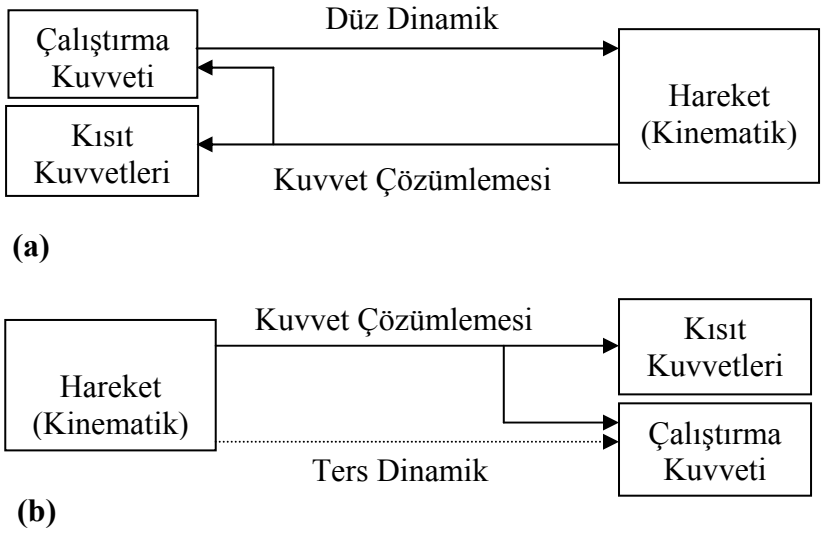
Öte yandan, makina bir bütün olarak ele alındığında kuvvet çözümleme probleminin bilinmeyen ve denklem sayısı birbirine eşit olmamakla birlikte, makinanın birbirine komşu uzuvlarından oluşturulacak küçük uzuv gruplarında bu eşitliğin sağlanması mümkündür. Böyle bir grupta uzuv sayısı n', üzerindeki kısıt kuvveti hesaplanacak adi eleman çifti sayısı e'_1, üzerindeki kısıt kuvveti hesaplanacak yüksek eleman çifti sayısı e'_2 ise, anılan eşitliğin sağlanma koşulunun

$$3 \cdot n' - (2 \cdot e'_1 + e'_2) = 0 \qquad (7.2.8)$$

olacağı açıktır. Bu koşulu sağlayan uzuv gruplarına *elemanter grup* adı verilir. Makinanın elemanter gruplara ayrılmasıyla, kuvvet çözümleme problemi, daha az bilinmeyen ve daha az denklemden oluşan kısmi problemlere ayrılarak çözülebilir.

Makinalarda kuvvet çözümlemesi probleminin çözülebilmesi için, (7.2.2-4) denklemlerinde $\mathbf{R}^{ij}$ kısıt kuvvetleri dışındaki tüm büyüklüklerin biliniyor olması gerekir. Yani tüm makina uzuvlarının eylemsizlik özellikleri (m_{i}, i_{S_i}), makinaya etkiyen -çalıştırma kuvveti dışındaki- tüm kuvvetler ($\mathbf{F}^i$, $\mathbf{M}^i$) ve makinanın kinematik çözümleme sonuçları elde olmalıdır. Bütün bunlar bilindiğinde (7.2.2-4) denklemleri $\mathbf{R}^{ij}$ bilinmeyenleri için bir lineer cebirsel denklem takımı görünümünü alır ve kolaylıkla çözülebilir. Hareket denklemi kapalı formda yazılıp çözülebilen basit yapıdaki bazı makinalarda kuvvet çözümlemesi de analitik yoldan gerçekleştirilebilir ise de, genelde bu problem, nokta-nokta çözülmesi gereken bir problem oluşturur.

Burada kısaca, kuvvet çözümlemesi probleminde girdi olarak kullanılacak kinematik çözümleme sonuçlarının nereden geleceği üzerinde durulması yerinde olacaktır. Ya diğer tüm veriler yanında makinaya etkiyen çalıştırma kuvveti de veridir ve makina dinamiğinin düz problemi çözülerek makinanın hareketi elde edilmiştir. Buradan elde edilen kinematik verileriyle kuvvet çözümlemesi problemi çözülür ve kısıt kuvvetlerinin yanısıra çalıştırma kuvveti yeniden hesaplanarak problem tamamlanır (Şek. 7.2.3-a). Ya da istenen bir hareket ve onun kinematiğine ilişkin bilgiden yola çıkılarak makina dinamiğinin ters problemi çözülecektir. Bu durumda eğer kuvvet çözümlemesi problemi çözülecekse, bu çözüm çalıştırma kuvvetini de üreteceğinden ters dinamik probleminin ayrıca çözülmesi gereksiz hale gelir (Şek. 7.2.3-b).



Şekil 7.2.3 Kuvvet Çözümleme Probleminde Olası İki Senaryo

Makinalarda kuvvet çözümlemesine ilişkin olarak yukarıda söylenilenlerin tamamı, bir statik denge konumunda hareketsiz duran makinalar için de geçerlidir. Bu halde, yukarıdaki (7.2.2-4) denklemleri yerine bu denklemlerde $\ddot{x}_i = \ddot{y}_i = \alpha_i = 0$ konularak elde edilen

$$0 = F_x^i + \sum_j R_x^{ji} \tag{7.2.9}$$

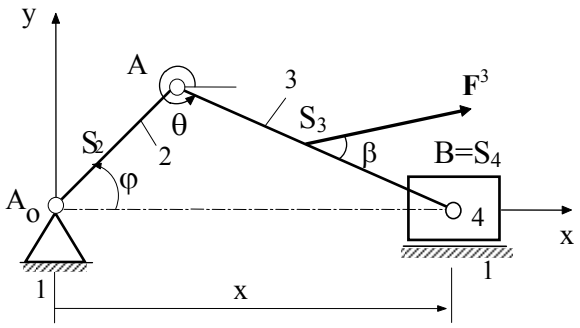
$$0 = F_y^i + \sum_j R_y^{ji} \tag{7.2.10}$$

$$0 = M_i + r_x^i \cdot F_y^i - r_y^i \cdot F_x^i + \sum_j \left(r_x^{ij} \cdot R_y^{ji} - r_y^{ij} \cdot R_x^{ji} \right) + \sum_j M^{ji} \tag{7.2.11}$$

denklemleri geçerli olacak ve çalıştırma kuvveti ile ilgili olarak söylenilenleri denge kuvveti için anlamak gerekecektir.

ÖRNEK PROBLEMLER

Problem 7.2.1



Şekil Pr.7.2.1-1

Şekildeki krank-biyel mekanizması esaslı makinanın krankı sabit ω=10 rad/s hızıyla döndürülmek istenmektedir. Makinada biyel, F^3 kuvvetinin etkisi altında bulunduğuna ve piston dışındaki uzuvların kütleleri göz ardı edildiğine göre, bütün mafsal ve yatak kuvvetlerinin ve bu hareketi sağlamak üzere kranka uygulanması gereken çalıştırma momentinin makinanın $\varphi=45^o$ ile tanımlanan konumundaki değerlerini hesaplayınız.

$A_oA=r_2=30$ cm, $AB=r_3=70$ cm, $A_oS_2=S_2A$, $AS_3=S_3B$, $m_4=2$ kg, $F^3=100$ N, $\beta=30^o$

Çözüm:

İlkin krankın $\varphi=45^o$, $\omega=10$ rad/s, $\alpha=0$ şeklinde verilen konum hız ve ivmesi için kinematik çözümleme gerçekleştirilerek

$$\theta = 342.36°,\ \dot{\theta} = \text{gereksiz},\ \ddot{\theta} = \text{gereksiz},$$
$$x = \text{gereksiz},\ \dot{x} = \text{gereksiz},\ \ddot{x} = -21.89\,\text{m/s}^2 \qquad \text{(i)}$$

hesaplansın. Ardından 3 ve 4 numaralı uzuvlardan oluşan uzuv grubunun bir elemanter grup olduğuna dikkat edilerek bu grup ele alınsın. Bu gruptaki 3 numaralı uzuv için, şekil yardımıyla ve $m_3 = 0$ ile

$$m_3\ddot{x}_3 = 0 = F_x^3 + R_x^{23} - R_x^{34}$$

$$m_3\ddot{y}_3 = 0 = F_y^3 + R_y^{23} - R_y^{34} \qquad \text{(ii)}$$

$$m_3 i_{S_3}^2 \ddot{\theta} = 0 = r_x^{32}R_y^{23} - r_y^{32}R_x^{23} - r_x^{34}R_y^{34} + r_y^{34}R_x^{34}$$

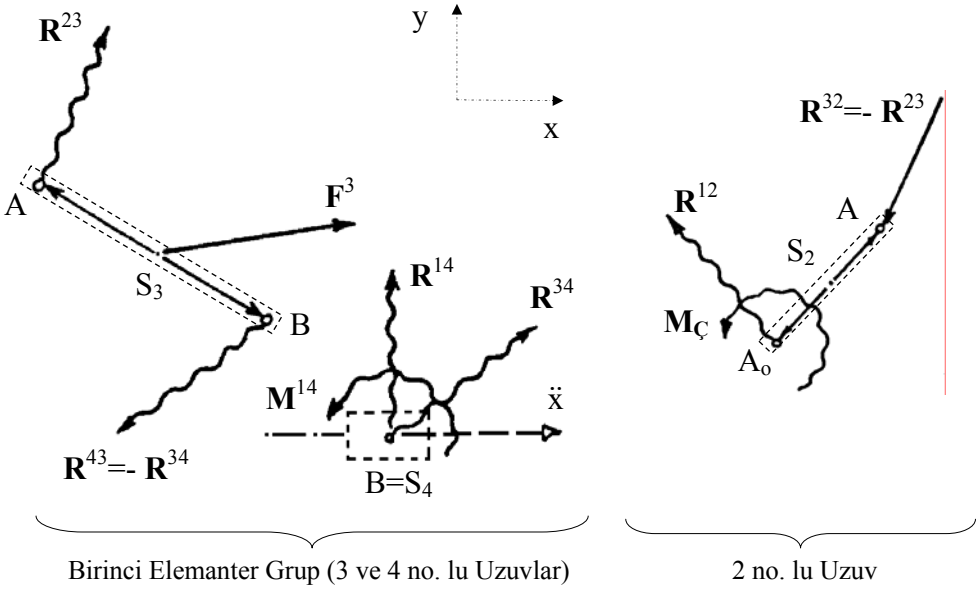
ve 4 numaralı uzuv için, $\ddot{y}_4 = \ddot{\theta}_4 = 0$ ile

$$m_4\ddot{x}_4 = m_4\ddot{x} = R_x^{34}$$

$$m_4\ddot{y}_4 = 0 = R^{14} + R_y^{34} \qquad \text{(iii)}$$

$$m_4 i_{S_4}^2 \ddot{\theta}_4 = 0 = M^{14}$$

elde edilir. İstenirse (ii) ve (iii) denklemleri matris-vektör gösterilimiyle



Şekil Pr.7.2.1-2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -r_y^{32} & r_x^{32} & r_y^{34} & -r_x^{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R_x^{23} \\ R_y^{23} \\ R_x^{34} \\ R_y^{34} \\ R^{14} \\ M^{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_x^3 \\ -F_y^3 \\ 0 \\ m_4\ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(iv)}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklem $R_x^{23}, R_y^{23}, R_x^{34}, Ry_x^{34}, R^{14}, M^{14}$ bilinmeyenleri için hemen çözülebilir ise de biz şimdilik devam edelim ve şekil yardımıyla makinadan geriye kalan 2 numaralı uzvu ele alalım. Bu uzuv için de $m_2 = 0$ ile

$$m_2\ddot{x}_2 = 0 = R_x^{12} - R_x^{23}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = 0 = R_y^{12} - R_y^{23} \qquad \text{(v)}$$

$$m_2 i_{S_2}^2 \alpha = 0 = M_ç - r_x^{23}R_y^{23} + r_y^{23}R_x^{23} + r_x^{21}R_y^{12} - r_y^{21}R_x^{12}$$

yazılabilir. Buradaki R_x^{23}, R_y^{23} bilinmeyenleri (iv) denklem takımından çözülerek burada bilinen olarak değerlendirilebilir. Böyle düşünülerek (v) denklemleri matris-vektör gösterilimiyle yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -r_y^{21} & r_x^{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R_x^{12} \\ R_y^{12} \\ M_ç \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_x^{23} \\ R_y^{23} \\ r_x^{23}R_y^{23} - r_y^{23}R_x^{23} \end{Bmatrix} \qquad \text{(vi)}$$

elde edilir. (iv) ve (vi) denklemleri, makinada kuvvet çözümlemesi probleminin elemanter gruplara ayırma yoluyla çözümünü temsil etmektedir. Hemen görüldüğü gibi bu yol izlendiğinde 9 bilinmeyen 9 denklemlik kuvvet çözümleme problemi 6 bilinmeyen 6 denklemlik ve 3 bilinmeyen 3 denklemlik iki kısma ayrılmış olmaktadır. Eğer problem elde çözülecekse bunun işi ne kadar kolaylaştıracağını belirtmek bile gereksizdir. Ancak çoğu kez problem bilgisayar yardımıyla çözülür ve elemanter gruplara ayırmanın ciddi bir gerekçesi kalmaz. Böyle durumlarda problem bir bütün olarak formüle edilebilir. Bizim problemimizde bu yapılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_y^{32} & r_x^{32} & r_y^{34} & -r_x^{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r_y^{23} & -r_x^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_y^{21} & r_x^{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R_x^{23} \\ R_y^{23} \\ R_x^{34} \\ R_y^{34} \\ R^{14} \\ M^{14} \\ R_x^{12} \\ R_y^{12} \\ M_ç \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_x^3 \\ -F_y^3 \\ 0 \\ m_4\ddot{x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(vii)}$$

elde edilir. Buradaki katsayılar matrisi ve sağ taraf vektörünün elemanları

$$\mathbf{r}^{21} = -\tfrac{r_2}{2}(\cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j}) \rightarrow r_x^{21} = -\tfrac{r_2}{2}\cos\varphi,\ r_y^{21} = -\tfrac{r_2}{2}\sin\varphi$$

$$\mathbf{r}^{23} = \tfrac{r_2}{2}(\cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j}) \rightarrow r_x^{23} = \tfrac{r_2}{2}\cos\varphi,\ r_y^{23} = \tfrac{r_2}{2}\sin\varphi$$

$$\mathbf{r}^{32} = -\tfrac{r_3}{2}(\cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}) \rightarrow r_x^{32} = -\tfrac{r_3}{2}\cos\theta,\ r_y^{32} = -\tfrac{r_3}{2}\sin\theta \qquad \text{(viii)}$$

$$\mathbf{r}^{34} = \tfrac{r_3}{2}(\cos\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}) \rightarrow r_x^{34} = \tfrac{r_3}{2}\cos\theta,\ r_y^{34} = \tfrac{r_3}{2}\sin\theta$$

$$\mathbf{F}^3 = F^3[\cos(\theta+\beta) \cdot \mathbf{i} + \sin(\theta+\beta) \cdot \mathbf{j}] \rightarrow F_x^3 = F^3\cos(\theta+\beta),\ F_y^3 = F^3\sin(\theta+\beta)$$

şeklinde bellidir. İstenirse bu değerler (vii) de yerlerine konularak kuvvet çözümlemesi probleminin her konumda geçerli bir formülasyonu elde edilebilir ise de biz burada φ=45° konumundaki çözümleme ile yetineceğiz. Bu amaçla (i) deki çözümleme sonuçlarıyla (viii) den

$$r_x^{21} = -10.606\text{cm},\ r_y^{21} = -10.606\text{cm},\ r_x^{23} = 10.606\text{cm},\ r_y^{23} = 10.606\text{cm}$$

$$r_x^{32} = -33.354\text{cm},\ r_y^{32} = 10.606\text{cm},\ r_x^{34} = 33.354\text{cm},\ r_y^{34} = -10.606\,\text{cm}$$

$$F_x^3 = 97.682\,\text{N}\,,\ F_y^3 = 21.405\,\text{N} \qquad \text{(ix)}$$

hesaplanıp (vii) ye dönülürse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10606 & 0.33354 & 0.10606 & 0.33354 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.10606 & -0.10606 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10606 & -0.10606 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R_x^{23} \\ R_y^{23} \\ R_x^{34} \\ R_y^{34} \\ R^{14} \\ M^{14} \\ R_x^{12} \\ R_y^{12} \\ M_ç \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -97.682 \\ -21.405 \\ 0 \\ -43.780 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(x)}$$

bunun çözülmesiyle de

$$R_x^{12} = -141.462\,\text{N},\ \ R_y^{12} = 18.749\,\text{N} \ \rightarrow$$

$$R^{12} = \sqrt{\left(R_x^{12}\right)^2 + \left(R_y^{12}\right)^2} = 142.699\,\text{N},\ \ \angle R^{12} = \tan^{-1}\left(\frac{R_y^{12}}{R_x^{12}}\right) = 172.45°$$

$$R_x^{23} = -141.462\,\text{N},\ \ R_y^{23} = 18.749\,\text{N} \ \rightarrow$$

$$R^{23} = \sqrt{\left(R_x^{23}\right)^2 + \left(R_y^{23}\right)^2} = 142.699\,\text{N},\ \angle R^{23} = \tan^{-1}\left(\frac{R_y^{23}}{R_x^{23}}\right) = 172.45°$$

$$R_x^{34} = -43.780\,\text{N},\ \ R_y^{34} = 40.154\,\text{N} \ \rightarrow$$

$$R^{34} = \sqrt{\left(R_x^{34}\right)^2 + \left(R_y^{34}\right)^2} = 59.406\,\text{N},\ \angle R^{34} = \tan^{-1}\left(\frac{R_y^{34}}{R_x^{34}}\right) = 137.47°$$

$$R^{14} = -40.154\,\text{N},\ M^{14} = 0\,,\ M_ç = 33.984\ \text{N.m}$$

elde edilir. Buradaki hesaplar çeşitli makina konumları için yinelenip her $\mathbf{R}^{ij}$ tepki kuvvetinin alacağı en büyük değer belirlendikten sonra bu kuvvetler hem mafsal ve yatakların hem de makina uzuvlarının dayanıma göre boyutlandırılmasında kullanılabilir.

Problem 7.2.2

Problem 7.2.1 i F^3=0 hali için yeniden ele alınız. Bu kez mafsal ve yatak kuvvetleri ve çalıştırma momentinin hesabı problemini bütün mekanizma konumlarında geçerli olacak biçimde formüle edip bu büyüklüklerin mekanizma konumu ile değişimini grafikler halinde veriniz.

Çözüm:

Problemin her φ mekanizma konumunda geçerli bir formülasyonu Pr.7.2.1-(viii) eşitliklerinin Pr.7.2.1-(vii) denkleminde yerlerine konulmasıyla elde edilebilir. Bu yapılırsa

$$\mathbf{A}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_3}{2}\sin\theta & -\frac{r_3}{2}\cos\theta & \frac{r_3}{2}\sin\theta & -\frac{r_3}{2}\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{r_2}{2}\sin\varphi & -\frac{r_2}{2}\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{2}\sin\varphi & -\frac{r_2}{2}\cos\varphi & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(i)}$$

$$\mathbf{r} = \left\{ R_x^{23} \quad R_y^{23} \quad R_x^{34} \quad R_y^{34} \quad R^{14} \quad M^{14} \quad R_x^{12} \quad R_y^{12} \quad M_ç \right\}^T \qquad \text{(ii)}$$

ve

$$\mathbf{f}(\varphi) = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad m_4\ddot{x} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \qquad \text{(iii)}$$

ile

$$\mathbf{A}(\varphi)\cdot\mathbf{r} = \mathbf{f}(\varphi) \qquad \text{(iv)}$$

elde edilir. Problemin bilinmeyenini oluşturan **r** vektörünün (iv) ten her φ değeri için hesaplanabilmesi, (i) deki θ ve (iii) deki $\ddot{x}$ nın her φ için yeniden hesaplanmasına bağlıdır. Bu ise mekanizmanın konum ve ivme çözümleme problemlerinin sayısal ya da analitik yoldan çözümünü gerektirir. Biz burada analitik yolu yeğleyelim ve krank-biyel mekanizmasının kinematik çözümlemesine ilişkin iyi bilinen

$$\theta(\varphi) = \sin^{-1}\left(\frac{e - r_2\sin(\varphi)}{r_3}\right) \qquad \text{(v)}$$

ve

$$\ddot{x}(\varphi) = g_4''(\varphi)\cdot\omega^2 + g_4'(\varphi)\cdot\alpha \qquad \text{(vi)}$$

ifadelerini anımsayalım[1]. Santrik bir krank-biyel söz konusu olduğuna göre e=0, krank sabit ω=10 rad/s açısal hızıyla döndüğüne göre de α=0 olacağına dikkat edilerek (v) ve (vi) eşitlikleri (i) ve (iii) de yerlerine konulursa artık her φ değeri için **r** (iv) denkleminden kolayca hesaplanabilir:

$$\mathbf{r}(\varphi) = \mathbf{A}(\varphi)^{-1} \cdot \mathbf{f}(\varphi) \qquad \text{(vii)}$$

Bu hesabın φ ye bağlı sonuçları Şekil Pr.7.2.2-a, b, c, d ve e de grafikler halinde gösterilmiştir. Hesap sonucuna göre

$$R_x(\varphi) = R_x^{23}(\varphi) = R_x^{34}(\varphi) = R_x^{12}(\varphi) = -R_x^{32}(\varphi) = -R_x^{43}(\varphi) = -R_x^{21}(\varphi)$$

ve

$$R_y(\varphi) = R_y^{23}(\varphi) = R_y^{34}(\varphi) = R_y^{12}(\varphi) = -R_y^{32}(\varphi) = -R_y^{43}(\varphi) = -R_y^{21}(\varphi) \qquad \text{(viii)}$$

olduğu anlaşıldığından, tüm döner mafsal ve yataklardaki tepki kuvveti bileşenlerinin φ ile değişimi Şekil a da tek bir grafik halinde verilmiştir.

Kuşkusuz, mafsalların mukavemete göre boyutlandırılması bakımından bu kuvvetlerin bileşenlerinden çok bileşke şiddetlerinin bilinmesine gerek vardır. Bu nedenle bileşenler yardımıyla bileşkenin şiddet ve doğrultusu da

$$R(\varphi) = \sqrt{R_x^2(\varphi) + R_y^2(\varphi)}, \quad \alpha(\varphi) = \tan^{-1}\frac{R_y(\varphi)}{R_x(\varphi)} \qquad \text{(ix)}$$

şeklinde hesaplanmış, R(φ) şiddetinin φ ile değişimi Şekil b de,

$$\mathbf{R}(\varphi)=R_x(\varphi)\mathbf{i}+R_y(\varphi)\mathbf{j}=R(\varphi)\cos\alpha(\varphi)\mathbf{i}+R(\varphi)\sin\alpha(\varphi)\mathbf{j} \qquad \text{(x)}$$

vektörünün kutupsal diyagramı ise Şekil c de gösterilmiştir. Bu şekillerden, döner mafsal tepkilerinin sıfır ile 86 N civarındaki bir maksimum değer arasında değişeceği anlaşılmaktadır. Buna göre mekanizmanın tüm döner eleman çiftlerindeki bağlantı elemanları bu maksimum kuvvete dayanacak biçimde boyutlandırılmalıdır.

Şekil d de ise kayar yatakta sabit uzvun pistona uygulayacağı tepkinin φ ile değişimi gösterilmiştir. Bu şekilden, herhangi bir moment tepkisinin söz konusu olmadığı ve tepkinin B noktasına etkiyen $R^{14}(\varphi)$ normal kuvvetinden ibaret olduğu anlaşılmaktadır. Bu kuvvet, yaklaşık ±18 N luk uç değerler arasında gezinmektedir.

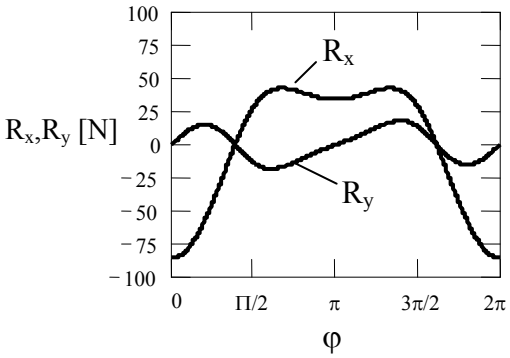
Son olarak, mekanizmanın verilen hareketini sağlamak için krank miline uygulanması gereken çalıştırma momentinin φ ile değişimi de Şekil e de

---

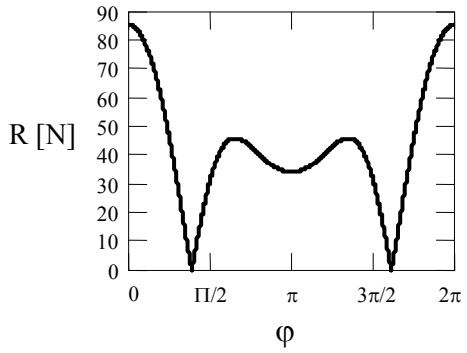
[1] $B = r_2\cos\varphi,\ C = r_2^2 + e^2 - r_3^2 - 2e\cdot r_2\sin\varphi \quad \rightarrow \quad x = B + \sqrt{B^2 - C}$

$z_1 = r_2(e\cos\varphi - x\sin\varphi),\ z_2 = x - r_2\cos\varphi \quad \rightarrow \quad g_4'(\varphi) = \frac{z_1}{z_2}$

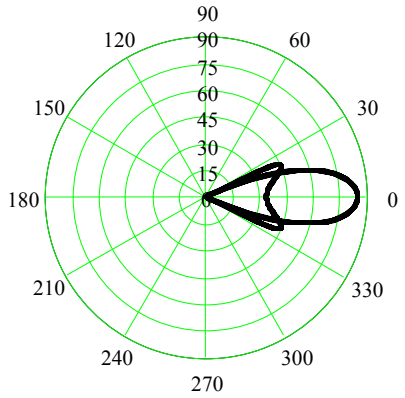
$z_1' = -r_2\cdot\left[(e + g_4')\sin\varphi + x\cos\varphi\right],\ z_2' = g_4' + r_2\sin\varphi \quad \rightarrow \quad g_4''(\varphi) = \frac{z_1'z_2 - z_1z_2'}{z_2^2}$



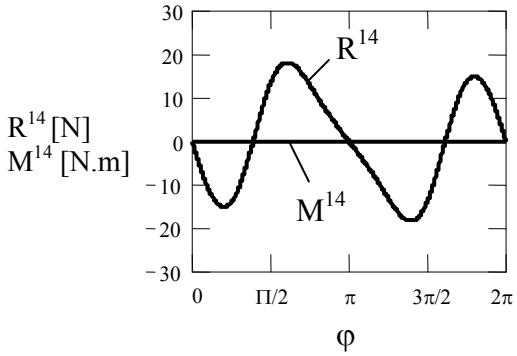
(a) Döner Mafsal ve Yatak Kuvvetlerinin Bileşenleri



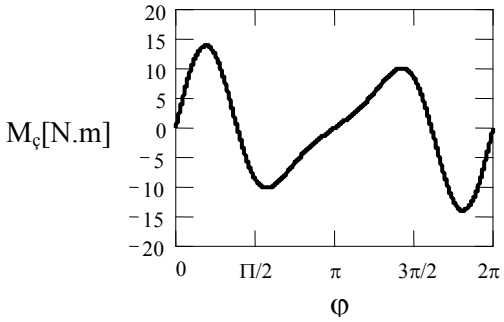
(b) Döner Mafsal ve Yatak Kuvvetlerinin Şiddeti



(c) Döner Mafsal ve Yatak Kuvvetlerinin Kutupsal Diyagramı



(d) Kayar Yatak Tepkisi



(e) Çalıştırma Momenti

Şekil Pr.7.2.2 Grafik Sonuçlar

gösterilmiştir. Bu şekilden de çalıştırma momentinin ±14 N.m uç değerleri arasında değişeceği görülmektedir. Krank ω=10 rad/s sabit hızıyla döndüğüne göre bunun G=M ω=14. 10=140 Watt lık bir motor gerektirdiğine dikkat çekelim.

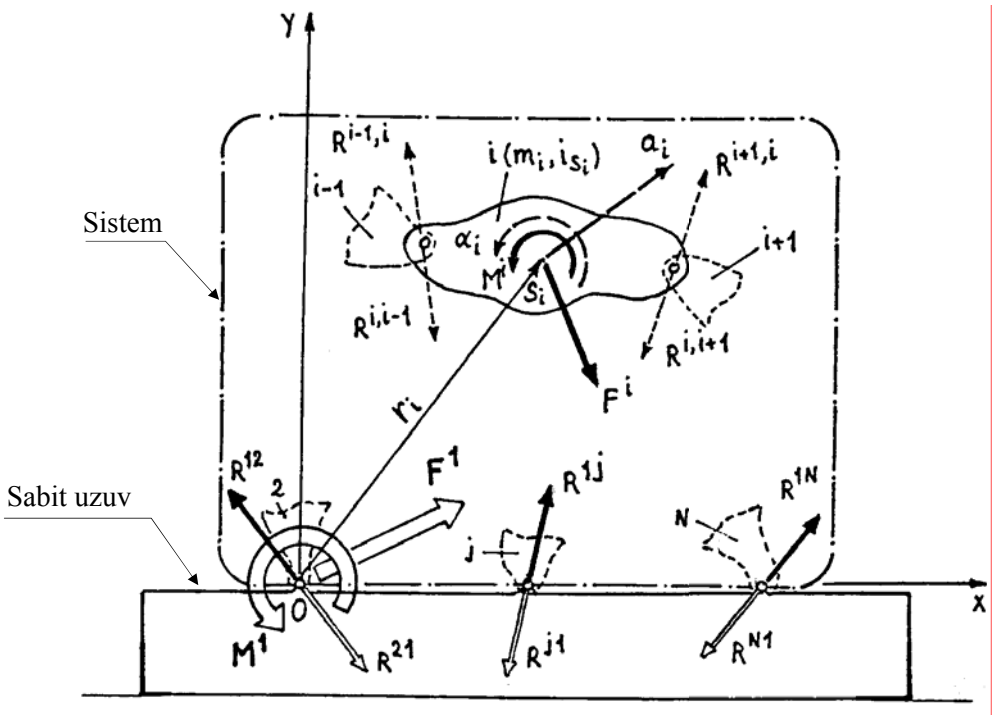
8 SARSMA KUVVETLERİ • MAKİNALARDA KÜTLE DENGELEMESİ

8.1 GENEL

Her makinanın sabit uzvu kendisiyle bağlantı halinde olan hareketli uzuvların, hareket sırasında şiddet, doğrultu ve yönleri değişen tepki kuvvetlerinin etkisi altında kalır. Stasyoner hareket evresinde genellikle peryodik bir değişim gösteren bu kuvvetlerin değişken kısımları, makinayı bulunduğu zemin üzerinde sarsmaya çalışır ve bu nedenle *sarsma kuvvetleri* diye adlandırılır. Görevi özellikle bunu gerektiren makinalar dışında hiç bir makinanın sarsıntılı çalışması istenmeyeceğine göre makinalarda sarsma kuvvetleri istenmeyen kuvvetlerdir. Bu kuvvetlerin yok edilmesine, ya da hiç değilse azaltılmasına çalışılır.

Bölüm 7 nin içeriğinden, bir makinada sabit uzva etkiyen kuvvetlerin, diğer kısıt kuvvetlerinin yanı sıra, makinanın genel kuvvet çözümlemesi çerçevesinde hesaplanabileceği bilinmektedir. Ancak bu bölümde, özellikle bu kuvvetlerin hesabına yönelik bir yol üzerinde durmak yerinde olacaktır.

Böyle bir yolu tanıtmaya geçmeden önce şu belirlemeyi yapalım: Kapalı kinematik zincirli bir makinada sabit uzuv en az iki noktada hareketli uzuvlarla temas halinde olduğundan sabit uzva etkiyen kuvvet en az iki kuvvetten oluşan bir kuvvet sistemi şeklindedir. Bu kuvvet sisteminin, sabit uzvun keyfi bir O noktasına etkiyen bir kuvvet ($\mathbf{F}^1$ diyelim) ve momenti bu kuvvetlerin O ya göre momentleri toplamına eşit olan bir kuvvet çiftiyle ($\mathbf{M}^1$ diyelim) temsil edilebileceği bilindiğine göre -ki, bilindiği gibi buna kuvvet sisteminin O noktasına indirgenmesi denir- biz teker teker kuvvetlerle ilgilenmeksizin doğrudan doğruya $\mathbf{F}^1$ ve $\mathbf{M}^1$ in hesabına yönelelim. Bu amaçla, makinanın tüm hareketli uzuvlarını içine alıp sabit uzvu dışarıda bırakan bir sistem tanımlansın (Şek. 8.1.1) ve sistemin kapsadığı hareketli uzuvları temsilen, kütlesi m_i, kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik yarıçapı i_{S_i}, açısal ivmesi α_i, kütle merkezinin yer vektörü $\mathbf{r}_i = x_i \cdot \mathbf{i} + y_i \cdot \mathbf{j}$, ivmesi $\mathbf{a}_i = \ddot{x}_i \cdot \mathbf{i} + \ddot{y}_i \cdot \mathbf{j}$, olarak bilinen ve kütle merkezine indirgenmiş olarak $\mathbf{F}^i = F_x \cdot \mathbf{i} + F_y \cdot \mathbf{j}$ bileşkesi ve $\mathbf{M}^i$ momenti ile temsil edilen dış kuvvetlerin etkisinde bulunan i. uzuv göz önüne alınsın. Hareketli uzuvlar arasındaki $\mathbf{R}^{i-1,i}$, $\mathbf{R}^{i+1,i}$ gibi tüm kısıt kuvvetlerinin sistem için iç kuvvetler, sabit uzvun hareketli uzuvlara uyguladığı (Şekildeki $\mathbf{R}^{12}$, $\mathbf{R}^{1j}$, $\mathbf{R}^{1N}$ gibi) kısıt kuvvetlerinin ise dış kuvvetler olduklarına ve bu sonuncuların, ilgilenmekte olduğumuz ($\mathbf{R}^{21}$, $\mathbf{R}^{j1}$, $\mathbf{R}^{N1}$ gibi) sabit uzva etkiyen kuvvetlerin ters işaretlisinden başka bir şey olmadıklarına; dolayısıyla O noktasına etkiyen $-\mathbf{F}^1$



Şekil 8.1.1 Sarsma Kuvvetlerinin Hesabı İçin Model

kuvveti ile momenti $-\mathbf{M}^1$ olan bir kuvvet çiftiyle temsil edilebileceklerine dikkat edilsin.

Bu belirlemelerle Newton'un ikinci hareket yasası eldeki sisteme uygulanır ve sistemin toplam hareket miktarının zamana göre türevi sisteme etkiyen dış kuvvetler toplamına eşitlenirse

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}^i - \mathbf{F}^1 \tag{8.1.1}$$

elde edilir. Ardından hareket miktarının momenti teoremi sisteme uygulanarak sistemin toplam hareket miktarının O noktasına göre momentinin zamana göre türevi sisteme etkiyen dış kuvvetlerin O ya göre momentleri toplamına eşitlenirse

$$\sum_i m_i i_{S_i}^2 \alpha_i \cdot \mathbf{k} + \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}_i) = \sum_i M^i \cdot \mathbf{k} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}^i - M^1 \cdot \mathbf{k} \tag{8.1.2}$$

yazılabilir. Bu denklemlerden, aranan $\mathbf{F}^1$ ve $\mathbf{M}^1$

$$\mathbf{F}^1 = \sum_i \mathbf{F}^i - \sum_i m_i \mathbf{a}_i \tag{8.1.3}$$

ve

$$M^1 \cdot \mathbf{k} = -\sum_i m_i i_{S_i}^2 \alpha_i \cdot \mathbf{k} - \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}_i) + \sum_i M^i \cdot \mathbf{k} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}^i \tag{8.1.4}$$

şeklinde çekilir. (8.1.3) teki $\mathbf{F}^1$ kuvvetinin değişken kısmı sarsma kuvveti, (8.1.4) teki $\mathbf{M}^1$ momentinin değişken kısmı ise sarsma momentidir. (8.1.3) ün sağ tarafındaki $\sum_i \mathbf{F}^i$ kuvvetinin içerisinde, ağırlık kuvvetleri gibi, değişken olmadıkları için sarsma kuvveti kapsamına girmeyecek kuvvetler yanında çalıştırma ve direnç kuvvetleri gibi değişken kısımlara sahip olabilecek ve sarsma kuvveti kapsamına girebilecek unsurlar da bulunmaktadır. Bu unsurların özel bir makinaya ilişkin sarsma kuvveti hesabında göz önüne alınmaları gerekli olabilir ise de, genel bir sarsma kuvveti hesabında $\sum_i \mathbf{F}^i$ yi tamamen dışarıda bırakan ve böylelikle sarsma kuvvetini her makinada ve her çalışma rejiminde farklı olabilecek unsurlardan soyutlayarak yalnızca makinanın yapısıyla ilişkilendiren bir sarsma kuvveti tanımı yeğlenmektedir. Bu tanıma göre bir makinada *sarsma kuvveti* denildiğinde

$$\mathbf{F}^S = \mathbf{F}^1 - \sum_i \mathbf{F}^i = -\sum_i m_i \mathbf{a}_i \tag{8.1.5}$$

şeklinde ifade edilen kuvvet, yani makina uzuvlarına etkiyen eylemsizlik kuvvetlerinin toplamından ibaret olan kuvvet anlaşılır. Aynı mantıkla *sarsma momenti* için de, eylemsizlik kuvvetlerinin O noktasına göre momentleri toplamından ibaret olan

$$\mathbf{M}^S = M^S \cdot \mathbf{k} = M^1 \cdot \mathbf{k} - \sum_i M^i \cdot \mathbf{k} - \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}^i = -\sum_i m_i i_{S_i}^2 \alpha_i \cdot \mathbf{k} - \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}_i) \tag{8.1.6}$$

tanımı esas alınır. İstenirse (8.1.5) ve (8.1.6) yerine skaler

$$F_x^S = -\sum_i m_i \ddot{x}_i \ , \quad F_y^S = -\sum_i m_i \ddot{y}_i \tag{8.1.7}$$

ve

$$M^S = -\sum_i m_i (i_{S_i}^2 \alpha_i + x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) \tag{8.1.8}$$

eşitlikleri de yazılabilir.

(8.1.5) ten hemen görüldüğü gibi, bir makinada sarsma kuvvetinin yok edilebilmesi için

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \tag{8.1.9}$$

olması gereklidir. Bu noktada, (2.2.4) teki kütle merkezi tanımından,

$$m_S = \sum_i m_i \tag{8.1.10}$$

hareketli uzuvlardan oluşan sistemin toplam kütlesi olmak üzere, sistemin kütle merkezinin ivmesi için

$$\mathbf{a}_S = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{m_S} \tag{8.1.11}$$

yazılabileceğine dikkat edilirse, (8.1.9) koşulu yerine

$$m_S \mathbf{a}_S = \mathbf{0} \tag{8.1.12}$$

yazılabileceği anlaşılır. Buradan, bir makinada (8.1.5) te tanımlanan anlamdaki sarsma kuvvetlerini yok etmenin yolu hemen anlaşılmaktadır: *Bir makinada sarsma kuvvetlerinin yok edilebilmesi için* $\mathbf{a}_S = \mathbf{0}$ *olmalı; yani uzuvlarının hareketine karşın makinanın kütle merkezi sabit kalmalıdır.* Makinalarda bunu sağlamak üzere hareketli uzuvların kütle dağılımlarının ayarlanması yoluna gidilir. Buna *makinalarda kütle dengelemesi* adı verilir.

Öte yandan, (8.1.6) ya göre, bir makinada sarsma momentinin yok edilmesi koşulunun da

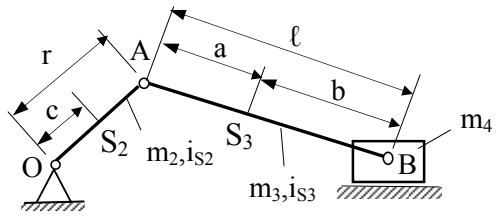
$$\sum_i m_i i_{S_i}^2 \alpha_i \cdot \mathbf{k} - \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}_i) = \mathbf{0} \rightarrow \sum_i m_i (i_{S_i}^2 \alpha_i + x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) = 0 \tag{8.1.13}$$

olduğu anlaşılmaktadır. Makinalarda sarsma kuvvetleri, kütle dengelemesi yoluyla nispeten kolay biçimde tamamen ya da kısmen giderilebilmekle birlikte sarsma momentlerinin giderilmesi genellikle karmaşık ve pahalı özel düzenlemeleri gerektirir.

8.2 KRANK-BİYEL ESASLI MAKİNALARDA KÜTLE DENGELEMESİ

Bu bölümde, makinalarda kütle dengelemesine bir örnek olmak üzere, pistonlu pompa ve kompresörlerden içten yanmalı motorlara kadar bir çok makinayı içine alan bir makina sınıfında: krank-biyel mekanizmasını esas alan makinalar sınıfında kütle dengelemesi problemi ele alınıp incelenecektir.

Böyle bir makina, kütle dengelemesinde gerekli olacak verileriyle birlikte Şekil 8.2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 8.2.1 Krank - Biyel Esaslı Makina

8.2.1 SARSMA KUVVETİNİN TAMAMEN YOK EDİLMESİ

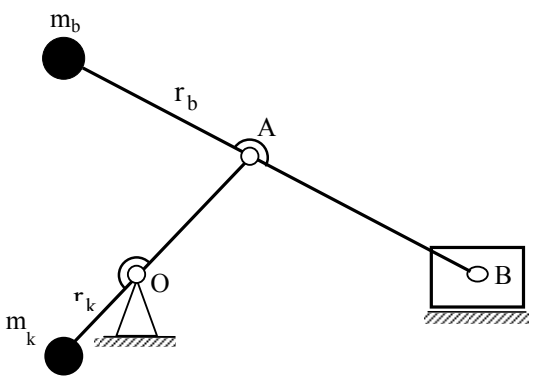
Bir makinada hareketli uzuvların kütle dağılımları, makina kütle merkezi hareketsiz kalacak biçimde ayarlanabilirse sarsma kuvvetinin tamamen yok edilebileceği bilinmektedir. Eldeki makinada tek hareketsiz nokta O noktası olduğuna göre yapılması gereken, makinanın hareketli kısımlarının kütle merkezini O noktasına taşımaktır. Bunu yapmak için ilkin biyel-piston sisteminin kütle merkezini A noktasına taşıyacak bir uygulamayla biyele

$$m_b \cdot r_b = m_3 \cdot a + m_4 \cdot \ell \qquad (8.2.1)$$

olacak biçimde bir m_b dengeleme kütlesinin eklenmesi, ardından da krank-biyel-piston sisteminin kütle merkezini O noktasına taşımak üzere kranka

$$m_k \cdot r_k = m_2 \cdot c + (m_b + m_3 + m_4) \cdot r = m_2 \cdot c + \left[m_3 \cdot (1 + \frac{a}{r_b}) + m_4 \cdot (1 + \frac{\ell}{r_b}) \right] \cdot r \qquad (8.2.2)$$

olacak biçimde bir m_k dengeleme kütlesinin eklenmesi yeterlidir (Bkz. Şek. 8.2.2). Bu yapılarak kolayca sarsma kuvvetlerinin tamamen yok edilmesi mükemmel sonucu elde edilecekmiş gibi görünmekle birlikte ne yazık ki bu sonuç yalnızca kağıt üzerinde geçerlidir. Çünkü bu çözümü uygulamaya geçirmek için kranka eklenmesi gereken m_k dengeleme kütlesi, ileride görüleceği gibi, uygun bir tasarımla kolayca yerleştirilebilmekle birlikte biyele eklenmesi gereken m_b dengeleme kütlesini yerleştirme probleminin (bu kütlenin hareketinin hacim gereksinimi bakımından) uygun bir konstrüktif çözümü yoktur. Bu yüzden, sarsma kuvvetlerinin en istenmediği makinalar olan içten yanmalı motorlarda bile burada ortaya konulan tam dengeleme yöntemi hiç uygulanmamakta, bunun yerine, ileride görüleceği gibi, kısmi dengeleme ile yetinilmektedir.



Şekil 8.2.2 Sarsma Kuvvetinin Tamamen Yok Edilmesi

8.2.2 SARSMA MOMENTİNİN YOK EDİLMESİ

Krank-biyel esaslı bir makinada sabit uzuvla temas halinde bulunan krank ve piston üzerinden sabit uzva etkiyen sarsma kuvvetleri sisteminin O noktasına indirgenmesi düşünülmüş olsun ve bu indirgemenin bir unsuru olarak, sarsma kuvvetlerinin O noktasına göre momentinden ibaret olan M_O^S sarsma momenti hesaplanmak istensin. Bu amaçla biyelin dinamik eşdeğer olarak, A, S_3 ve B noktalarına yerleştirilecek üç maddesel noktaya indirgendiği (Bkz. Bl. 2.2.4); dolayısıyla biyel ve pistonun, kütleleri

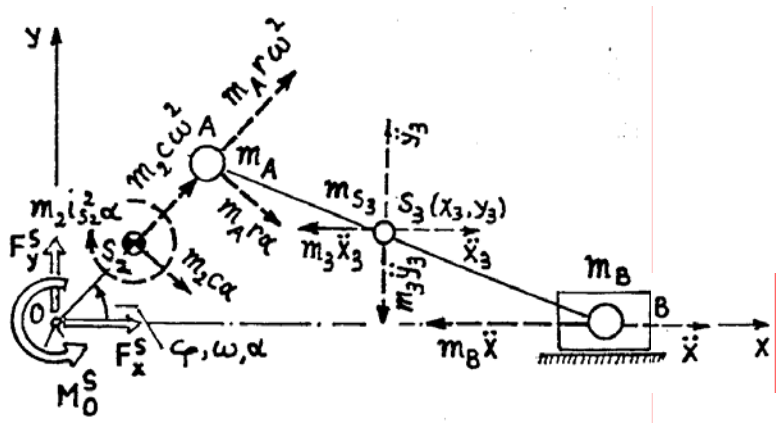
$$m_A = \frac{i_{S_3}^2}{a \cdot \ell} \cdot m_3 \ , \ m_B = \frac{i_{S_3}^2}{b \cdot \ell} \cdot m_3 + m_4 \ , \ m_{S_3} = \left(1 - \frac{i_{S_3}^2}{a \cdot b}\right) \cdot m_3 \qquad (8.2.3)$$

şeklinde hesaplanan üç maddesel noktayla temsil edildiği düşünülsün. Bu temsil esas alınarak Şekil 8.2.3 te gösterilmiş olan eylemsizlik kuvvetlerinin, O noktasına göre toplam momenti ifade edilirse, $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \alpha$ gösterilimiyle

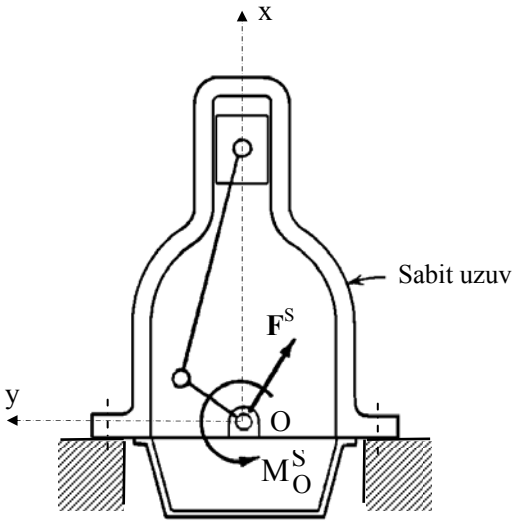
$$M_O^S = -\left[m_2 \cdot (i_{S_2}^2 + c^2) + m_A \cdot r^2\right] \cdot \alpha - m_{S_3} \cdot (x_3 \ddot{y}_3 - y_3 \ddot{x}_3) \qquad (8.2.4)$$

yazılabilir. Buradan, S_3 noktasının yer ve ivme vektörü bileşenlerinin açık ifadelerini yazmaya gerek kalmadan hemen şu sonuç çıkartılır: α=0 olması, yani krankın sabit bir ω açısal hızıyla dönmesi halinde -ki makinada eylemsizlik çarkı kullanılmışsa stasyoner hareket evresinde iyi bir yaklaşıklıkla bu durum söz konusu olacaktır- biyel kütle dağılımının $m_{S_3} = 0$ olacak biçimde ayarlanmasıyla sarsma kuvvetlerinin O ya göre toplam momenti sıfır yapılabilir. Bu ise (8.2.3) bağıntısından görüldüğü gibi, biyelin

$$a \cdot b = i_{S_3}^2 \qquad (8.2.5)$$



Şekil 8.2.3 Sarsma Kuvvet ve Momentinin Hesabı İçin Model



Şekil 8.2.4 Sarsma Kuvvet ve Momenti

olacak biçimde tasarlanmasını gerektirir. Bu durumda, yine (8.2.3) ten

$$m_A = \frac{b}{\ell} \cdot m_3 \ , \ m_B = \frac{a}{\ell} \cdot m_3 + m_4 \qquad (8.2.6)$$

olacağını not edelim. Uygulamada genellikle bu ayarlama yapılarak M_O^S=0 olması sağlanır.

Ancak burada hemen şunu belirtelim ki M_O^S=0 yapılmasının kendi başına çok bir önemi yoktur, çünkü sarsma kuvvetlerinin O ya göre momentlerinin yanısıra $\mathbf{F}^S$ bileşkeleri de sıfır yapılmamışsa, genelde, O dışındaki noktalara göre sıfırdan farklı bir moment söz konusu olacaktır (Bkz. Şek. 8.2.4). Oysa M_O^S=0 yapılmasının (8.2.5) te verilen koşulu ile $\mathbf{F}^S = \mathbf{0}$ yapılmasının (8.2.1) de verilen koşulu açıkça çelişiktir ve her ikisinin birden sağlanması olanaksızdır. Ne var ki (8.2.1) koşulunun yerine getirilmesi zaten tasarım bakımından uygun olmadığından burada bir karar verme zorluğu söz konusu değildir.

Burada son olarak $\alpha \neq 0$ halinde O noktasına göre sarsma momentinin kütle dengelemesi yoluyla sıfır yapılmasının mümkün olmadığını belirtelim fakat bunun kanıtlanması konusuna hiç girmeyelim.

8.2.3 SARSMA KUVVETİNİN KISMEN YOK EDİLMESİ

Yukarıda, krank-biyel esaslı makinalarda sarsma kuvvetinin kütle dengelemesi yoluyla tamamen yok edilmesinin tasarım bakımından olanaklı olmadığını belirtmiştik. Buna karşılık, uygun bir tasarımla bu kuvvet kısmen yok edilebilir. Şimdi bunun nasıl yapılacağını görmek üzere Şekil 8.2.3 teki makinayı göz önüne alalım ve bu makinada biyelin, A ve B noktalarına yerleştirilen

$$m_A^{(3)} = \frac{b}{\ell} \cdot m_3 \ , \quad m_B^{(3)} = \frac{a}{\ell} \cdot m_3 \tag{8.2.7}$$

maddesel noktalarıyla temsil edildiğini varsayalım. Bu iki maddesel noktadan oluşan sistem, kütlesi ve kütle merkezi biyelinkiyle aynı olduğundan, eylemsizlik kuvvetleri bakımından biyele eşdeğerdir. Sarsma kuvveti hesabında yeterli olduğu açık olan bu eşdeğerliğe *statik eşdeğerlik* denir. Özel olarak, biyelin (8.2.5) koşulunu sağlaması halinde, iki sistem arasında kütlesel eylemsizlik momenti denkliğinin de kendiliğinden oluşacağı ve statik eşdeğerlikle dinamik eşdeğerliğin özdeşleşeceği bilinmektedir [Bkz. (8.2.6)].

Böylece biyel ve pistonun A ve B deki

$$m_A = \frac{b}{\ell} \cdot m_3 \ , \ m_B = \frac{a}{\ell} \cdot m_3 + m_4 \tag{8.2.8}$$

maddesel noktalarına indirgenmiş olduğuna dikkat edilerek Şekil 8.2.3 yardımıyla eylemsizlik kuvvetlerinin x ve y bileşenleri ayrı ayrı göz önüne alınırsa, sarsma kuvvetinin bileşenleri için

$$\begin{aligned} F_x^S &= \left(m_2 \cdot \frac{c}{r} + m_A\right) \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi + \left(m_2 \cdot \frac{c}{r} + m_A\right) \cdot r \cdot \alpha \cdot \sin\varphi - m_B \ddot{x} \\ F_y^S &= \left(m_2 \cdot \frac{c}{r} + m_A\right) \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi - \left(m_2 \cdot \frac{c}{r} + m_A\right) \cdot r \cdot \alpha \cdot \cos\varphi \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu ifadeler sarsma kuvveti hesabı bakımından bütün makinaya, A da bulunan ve daimi dönme hareketi yapan bir maddesel nokta ile B de bulunan ve öteleme hareketi yapan bir maddesel noktadan ibaret bir sistem gözüyle bakılabileceğini göstermektedir. Bu bakışı gösterilime yansıtmak üzere

$$m_{dön} = \left(m_2 \cdot \frac{c}{r} + m_A\right) , \quad m_{öte} = m_B \tag{8.2.10}$$

şeklinde *dönen kütle* ve *ötelenen kütle* gösterilimlerine baş vurulur, ayrıca B noktasının $\ddot{x}$ ivmesi için Örnek Problem 5.3.2 de elde edilmiş olan

$$\ddot{x} = -(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi) \cdot r\omega^2 - (\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi) \cdot r\alpha \ ; \quad \lambda = \frac{r}{\ell} \tag{8.2.11}$$

yaklaşıklığı kullanılırsa (8.2.9) yerine

$$\begin{aligned} F_x^S &= \left[(m_{dön} + m_{öte})\cos\varphi + m_{öte}\lambda\cos 2\varphi\right] \cdot r\omega^2 \\ &\quad + \left[(m_{dön} + m_{öte})\sin\varphi + m_{öte}\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right] \cdot r\alpha \\ F_y^S &= m_{dön}\sin\varphi \cdot r\omega^2 - m_{dön}\cos\varphi \cdot r\alpha \end{aligned} \tag{8.2.12}$$

yazılabilir. Burada, φ nin harmonik fonksiyonları şeklinde olan terimler *birinci mertebeden sarsma kuvvetleri*, 2φ nin harmonik fonksiyonları şeklinde olan terimler ise *ikinci mertebeden sarsma kuvvetleri* diye adlandırılır. $\ddot{x}$ ivmesinin ifadesindeki yaklaşıklık daha ileri götürüldüğünde bu ifadeye ikinciden daha yüksek mertebeden harmonikler de katılır. Bunun sonucu olarak sarsma kuvveti ifadelerinde de ikinciden daha yüksek mertebeden sarsma kuvvetleri ortaya çıkar. Fakat artan mertebeyle katkı payı azalan bu terimlerin çok duyarlı hesap yapılmasını gerektiren özel durumlar dışında göz önüne alınmalarına gerek yoktur.

(8.2.12) ifadelerin incelenmesinden, sarsma kuvvetinin her iki bileşeninin de bütünüyle yok edilebilmesi için hem $m_{öte} = 0$ hem $m_{dön} = 0$ yapılması; yani ötelenen kütleye katkıda bulunan biyel-piston ikilisinin kütle merkezinin A noktasına taşınıp tüm sistemin tek bir dönen kütleye, sonra da bu dönen kütlenin O noktasına taşınıp tüm sistemin hareketsiz bir kütleye indirgenmesi gerektiği anlaşılır. Bu ise, Bölüm 8.2.1 de tartışılmış olan çözümden başka bir şey değildir ve tasarım bakımından uygulanamaz olduğu bilinmektedir.

Bunun yerine ne yapılabileceğini görmek üzere, tasarım bakımından sorunsuz bir uygulamayla krank miline

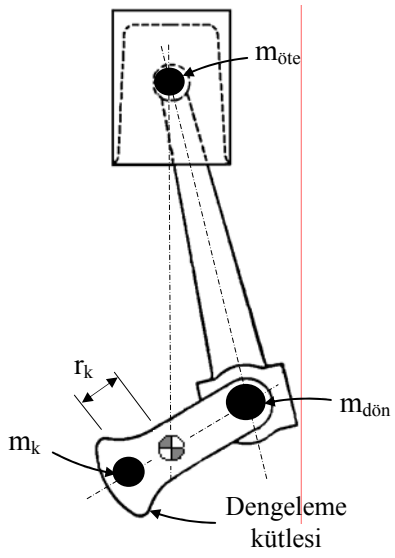
$$m_k r_k = (m_{dön} + \gamma \cdot m_{öte}) \cdot r \tag{8.2.13}$$

olacak biçimde bir dengeleme kütlesi (ya da *karşı kütle*) eklenmesi düşünülsün (Şek.8.2.5). Bu yapıldığında (8.2.12) yerine

$$F_x^S = m_{öte} \cdot \left[(1-\gamma)\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi\right] \cdot r\omega^2 + m_{öte} \cdot \left[(1-\gamma)\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right] \cdot r\alpha$$

$$F_y^S = -m_{öte}\gamma\sin\varphi \cdot r\omega^2 + m_{öte}\gamma\cos\varphi \cdot r\alpha \tag{8.2.14}$$

ya da $\alpha = 0$ (stasyoner hareket, eylemsizlik çarkı var) özel halinde



Şekil 8.2.5 Kranka Dengeleme Kütlesi Eklenmesi

$$F_x^S = m_{öte} \cdot [(1-\gamma)\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi] \cdot r\omega^2$$
$$F_y^S = -m_{öte}\gamma \sin\varphi \cdot r\omega^2 \qquad (8.2.15)$$

elde edileceği görülür. Dengeleme kütlesinin hesabına ötelenen kütlenin katılma oranını gösteren γ katsayısının farklı seçimleri, farklı sonuçlara yol açacaktır. Bu sonuçlar hakkında bir fikir edinmek üzere, (8.2.15) e göre şiddeti

$$F^S(\gamma,\varphi) = \sqrt{(F_x^S)^2 + (F_y^S)^2} = m_{öte} r\omega^2 \sqrt{[(1-\gamma)\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi]^2 + (\gamma\sin\varphi)^2} \qquad (8.2.16)$$

x ekseniyle yaptığı açı ise

$$\theta(\gamma,\varphi) = \tan^{-1}\left(\frac{F_y^S}{F_x^S}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{-\gamma\sin\varphi}{(1-\gamma)\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi}\right] \qquad (8.2.17)$$

şeklinde değişen sarsma kuvvetinin, φ 0° den 360° ye kadar değişirken farklı γ değerleri için alacağı görünümlerin *sarsma kuvveti kutupsal diyagramı* üzerinde karşılaştırılması uygun olur. Şekil 8.2.6 da, $\lambda = 0.25$, $m_{dön} r\omega^2 = m_{öte} r\omega^2 = 1N$ değerleri için, dengeleme yapılmamış hale ve γ=0; 1/4; 1/2; 2/3; 4/5; 1 olacak biçimde dengeleme yapılmış hallere ilişkin diyagramlar gösterilmiştir. Bu diyagramların incelenmesinden:

i) $0 \le \gamma \le 1$ olmak kaydıyla γ değeri ne olursa olsun, yapılacak dengelemenin sarsma kuvvetinin maksimum değerini dengeleme yapılmamış hale göre küçülteceği,

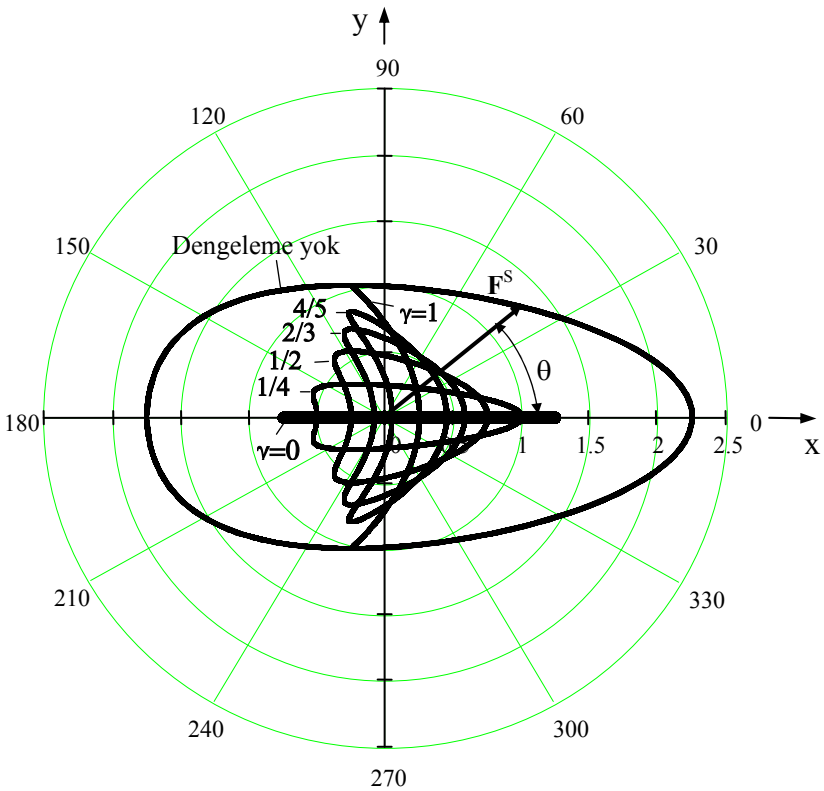
ii) γ=1 sınır halinin, sarsma kuvvetinin x bileşeninin azaltılması bakımından en iyi, fakat y bileşeninin azaltılması bakımından en kötü seçeneği oluşturduğu,

iii) γ=0 sınır halinin ise y bileşenini tamamen sıfırlayarak bu bileşenin azaltılması bakımından en iyi, fakat x bileşeninin azaltılması bakımından en kötü seçeneği oluşturduğu,

iv) Sarsma kuvvetinin bileşkesinin maksimum değerinin azaltılması bakımından en iyi seçeneğin $\gamma \approx 1/2$ alınması olduğu anlaşılır.

Sonuç olarak, düşünülen kütle dengelemesinin, gerçekten de, sarsma kuvvetlerinin bütünüyle değilse de kısmen giderilmesinde uygulanabilecek bir yöntem oluşturduğu görülmektedir. Uygulamada, tek bir krank-biyel mekanizmasından ibaret olan, tek silindirli içten yanmalı motor, tek pistonlu kompresör, vb. gibi makinalarda bu yöntem, $1/2 \le \gamma \le 2/3$ arasında seçilen bir γ değeriyle uygulanır.

Bu konuyu kapatmadan, sarsma kuvvetinin y bileşenini bütünüyle yok ettiği görülen γ=0 seçeneği üzerinde kısaca durulması yerinde olur. Bu durumda krank milinin düzgün hızla dönmesi hali için (8.2.15) ten



Şekil 8.2.6 Sarsma Kuvveti Kutupsal Diyagramı

$$F_x^S = m_{öte} r\omega^2 \cos\varphi + m_{öte}\lambda r\omega^2 \cos 2\varphi \qquad (8.2.18)$$

olacak, (8.2.14) ve (8.2.15) ten ise, krank mili düzgün hızla dönsün ya da dönmesin, her zaman $F_y^S = 0$ olacaktır. Sarsma kuvvetinin y bileşeninin yok oluşunun nedeni, (8.1.13) e göre

$$m_k r_k = m_{dön} r \qquad (8.2.19)$$

eşitliğinin sağlandığı bu dengelemenin, makinanın hareketli kısımlarının kütle merkezini x ekseni üzerinde gezinir hale getirmiş olmasıdır. Yukarıda tek bir krank-biyel mekanizmasından oluşan makinalarda yeğlenmediğini belirttiğimiz bu dengeleme iki bakımdan ilgi çekicidir. Bunlardan ilki, bu dengelemeyle birlikte biyele (8.2.5) koşulu sağlatılarak sarsma momenti dengelemesi de yapılması halinde x ekseni üzerindeki hiç bir noktaya göre sarsma momenti doğmamasıdır. Oysa x ekseni krank-biyel esaslı makinalar için genellikle bir simetri ekseni olduğundan (Bkz. Şekil 8.2.4) makinanın sabit uzvunun (gövde) kütle merkezi bu eksen üzerindedir. Böylece makinanın kütle merkezi çevresinde sarsma momenti etkimeyecek ve sarsma kuvvetleri makinayı sadece doğrusal ötelemeye zorlayacaktır. İkinci ilgi çekici özellik, bu dengelemeyle sarsma kuvvetlerinin doğrultusunun, x ekseninin doğrultusu olarak sabitlenmesidir. Bu, sarsma kuvvetlerinin dengelenebilmesi için basit bazı yöntemler geliştirilmesine olanak verir. Bu dengelemenin bu özelliklerinden, aşağıda görüleceği gibi, çok silindirli içten yanmalı motorların dengelenmesinde yararlanılmaktadır.

8.3 ÇOK SİLİNDİRLİ İÇTEN YANMALI MOTORLARDA SARSMA KUVVETLERİNİN DENGESİ

8.3.1 GENEL BİLGİLER

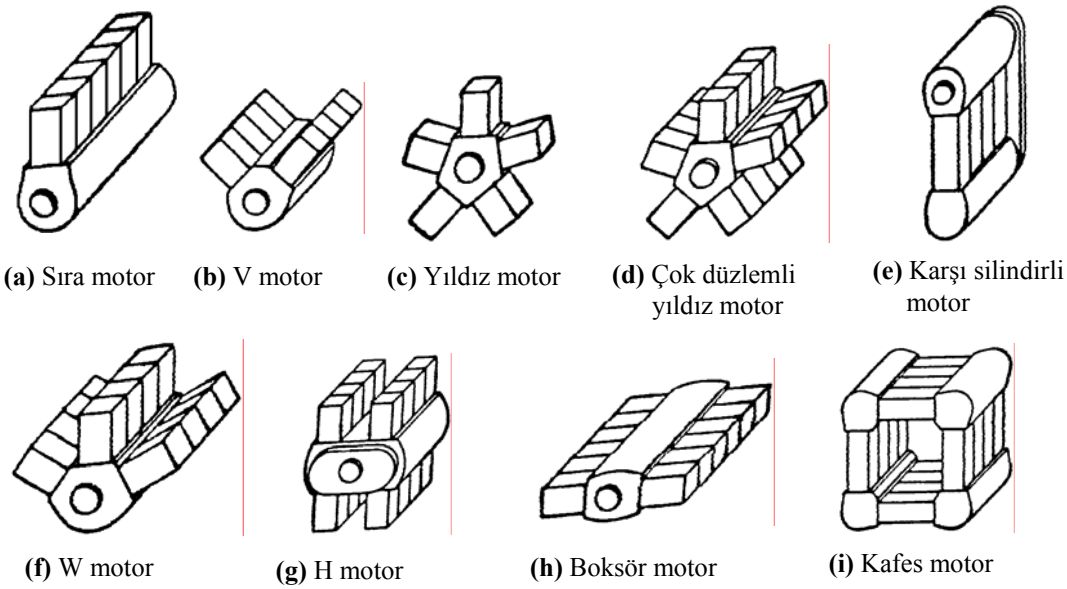
Özellikle kara, hava ve deniz taşıtlarında kulanılan içten yanmalı motorlarda doğacak sarsma kuvvetleri doğrudan doğruya taşıtın konfor ve güvenliğini etkilediğinden içten yanmalı motorlar, sarsma kuvvetlerinin yok edilmesi probleminin en önemli uygulama alanlarından birini oluşturur. Bu bölümde, makina mühendisliğinin büyük ayrıntıyla incelenmiş ve incelenmekte olan bu problemi üzerinde durulacaktır.

Çok silindirli içten yanmalı motorlar, silindirlerinin diziliş düzenine göre çeşitli tiplere ayrılır. Sıra motorlar, "V" motorlar, yıldız motorlar bu tiplerin en çok kullanılanlarıdır (Şek. 8.3.1).

Aşağıda, motorlarda sarsma kuvvetlerinin dengesi problemi, en yaygın kullanılan ve incelenmesi en kolay olan sıra motorlar özelinde ele alınacaktır. Burada diğer motor tiplerine yer verilmeyecek olmakla birlikte, sıra motorların incelenmesinden elde edilen deneyimle diğer motor tipleri de kolaylıkla incelenebilir.

8.3.2 SIRA MOTORLARIN DENGESİ

Birbiriyle özdeş n adet silindirli sıra bir motor göz önüne alınsın (Şek. 8.3.2), stasyoner hareket sırasında motora etkiyecek sarsma kuvvetleri sisteminin, krank ekseninin birinci silindir düzlemini kestiği O noktasına indirgenerek elde edilmesi düşünülsün ve şu belirlemeler yapılsın:



Şekil 8.3.1 Silindir Dizilişine Göre Motor Tipleri

i) Krank miline uygun bir eylemsizlik çarkı bağlanarak stasyoner hareket sırasında yaklaşık olarak sabit hızla dönmesi sağlanmıştır.

ii) Biyeller (8.2.5) koşulu sağlanacak biçimde tasarlanmış ve sabit hızla dönme halinde her bir silindir için z ekseni çevresindeki sarsma momenti yok edilmiştir. Buna göre stasyoner harekette motorun bütününde de bir *yalpa momenti* doğmaz: $M_z^S = 0$.

iii) Krank milinde (8.2.19) eşitliği sağlanacak biçimde karşı kütlelerle kütle dengelemesi yapılmıştır. Buna göre motorda y ekseni doğrultusunda bir sarsma kuvveti ve x ekseni çevresinde bir *dönme momenti* doğmaz: $F_y^S = 0$, $M_x^S = 0$. Buna karşılık, her silindirde, x ekseni doğrultusunda bir sarsma kuvveti ve buna bağlı olarak y ekseni çevresinde bir *yunuslama momenti* doğar. Stasyoner harekette i. silindirde doğan kuvvet, (8.2.18) uyarınca

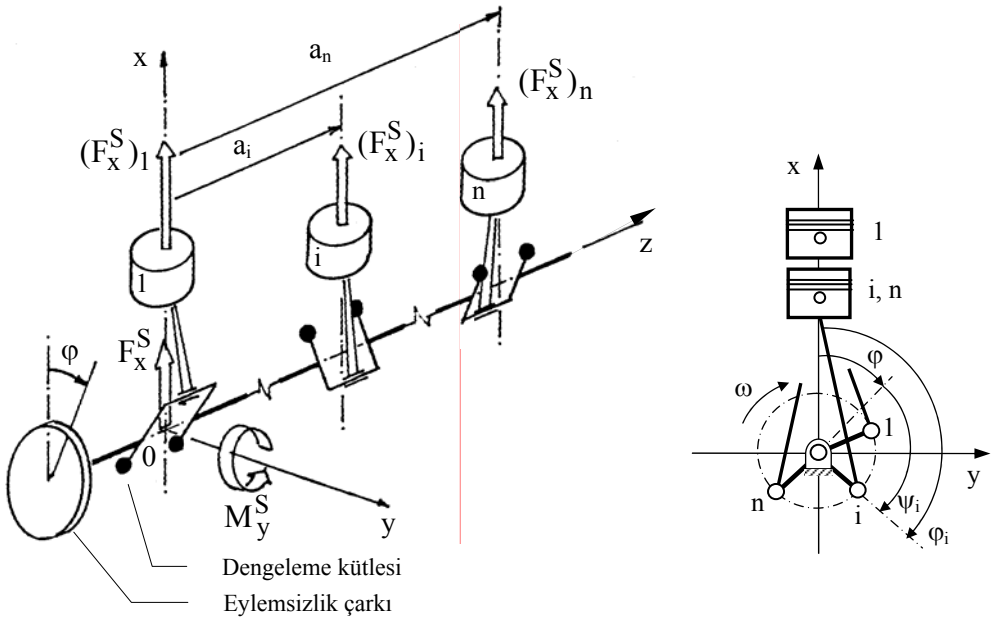
$$(F_x^S)_i = m_{öte} r\omega^2 \cos\varphi_i + m_{öte}\lambda r\omega^2 \cos 2\varphi_i \qquad (8.3.1)$$

şeklinde, bu kuvvetten dolayı O dan geçen y ekseni çevresinde doğacak moment de

$$(M_y^S)_i = m_{öte} r\omega^2 a_i \cos\varphi_i + m_{öte}\lambda r\omega^2 a_i \cos 2\varphi_i \qquad (8.3.2)$$

şeklinde bellidir.

iv) Her biri kendi φ_i açısıyla birbiriyle özdeş biçimde değişen bu kuvvet ve momentler, φ_i ler arasındaki ψ_i faz farklarının uygun ayarlanmasıyla kısmen ya da tamamen birbirine dengelettirilebilir. Bu da krank yıldızı tasarımının uygun yapılmasıyla sağlanabilir.



(**a**) Genel Görünüş (**b**) Krank Yıldızı

Şekil 8.3.2 Sıra Motor

İşte sıra motorlarda sarsma kuvvetlerinin dengelenmesi denildiğinde bu son belirlemenin değerlendirilmesi anlaşılır. Şimdi böyle bir dengelemenin koşullarını görebilmek için (8.3.1) ve (8.3.2) yardımıyla motora etkiyecek toplam sarsma kuvvet ve momenti ifade edilirse, φ krank milinin seçilmiş bir radyal referans hattının x ekseniyle yaptığı açı olmak üzere

$$\varphi_i = \varphi + \psi_i \tag{8.3.3}$$

yazılabileceği dikkate alınarak

$$F_x^S = \sum_{i=1}^{n}(F_x^S)_i = m_{öte} r\omega^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \cos(\varphi + \psi_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \cos 2(\varphi + \psi_i) \right] \tag{8.3.4}$$

ve

$$M_y^S = \sum_{i=1}^{n}(M_y^S)_i = m_{öte} r\omega^2 \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\varphi + \psi_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \cos 2(\varphi + \psi_i) \right] \tag{8.3.5}$$

veya burada $\cos(\varphi + \psi_i) = \cos\varphi \cos\psi_i - \sin\varphi \sin\psi_i$ denilerek

$$F_x^S = m_{öte} r\omega^2 \left\{ \left(\cos\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} \cos\psi_i - \sin\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} \sin\psi_i \right) + \lambda \cdot \left(\cos 2\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} \cos 2\psi_i - \sin 2\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} \sin 2\psi_i \right) \right\} \tag{8.3.6}$$

ve

$$M_y^S = m_{öte} r\omega^2 \left\{ \left(\cos\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cos\psi_i - \sin\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\psi_i \right) + \lambda \cdot \left(\cos 2\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cos 2\psi_i - \sin 2\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \sin 2\psi_i \right) \right\} \tag{8.3.7}$$

elde edilir. Buradan;

Birinci mertebeden sarsma kuvvetlerinin dengesi için:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\psi_i = 0 \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \sin\psi_i = 0 \tag{8.3.8}$$

İkinci mertebeden sarsma kuvvetlerinin dengesi için:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2\psi_i = 0 \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \sin 2\psi_i = 0 \tag{8.3.9}$$

Birinci mertebeden sarsma momentlerinin dengesi için:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cos\psi_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\psi_i = 0 \tag{8.3.10}$$

İkinci mertebeden sarsma momentlerinin dengesi için:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cos 2\psi_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \sin 2\psi_i = 0 \tag{8.3.11}$$

koşullarının sağlanması gerektiği anlaşılır. Hesaplarda birinci silindire ait krank kolunun açısal konumunun referans alınmasıyla, bu eşitliklerde

$$\varphi_1 = \varphi \rightarrow \psi_1 = 0 \tag{8.3.12}$$

yazılabileceği, motorda silindirler arası mesafelerin birbirine eşit (a diyelim) olması halinde de

$$a_i = (i-1)\cdot a \tag{8.3.13}$$

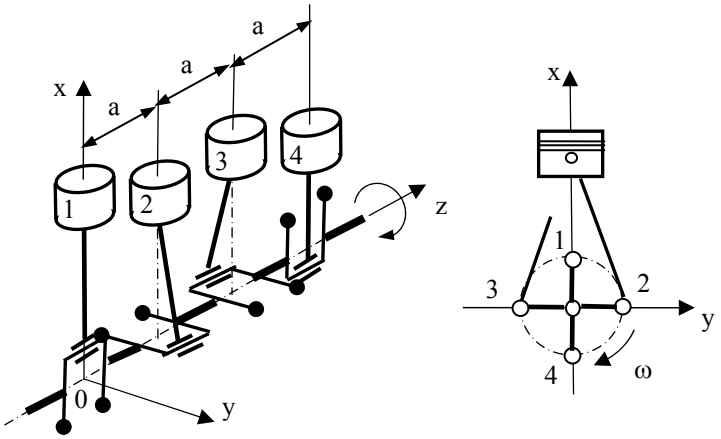
olacağı ortadadır.

Krank yıldızı tasarımında (8.3.8-11) koşullarının sağlanmasına dikkat edilerek motorlarda çeşitli silindirlerin sarsma kuvvet ve momentleri birbirine dengelettirilebilmektedir. Birinci ve ikinci mertebeden kuvvet ve momentlerin hepsinin birden dengelenememesi halinde -ki genellikle bu durum söz konusudur- ikinci mertebeden büyüklükler karşısında birinci mertebeden olanların dengesine ve momentler karşısında kuvvetlerin dengesine öncelik verilmelidir. Buradaki hesaplarda göz ardı edilmiş olmakla birlikte, yukarıda da belirtildiği gibi, özel önem taşıyan bir tasarımda daha yüksek mertebeden sarsma kuvvetlerinin dengesi de gözetilmelidir.

Burada şuna da işaret etmek yerinde olur ki içten yanmalı bir motorda krank yıldızı tasarımında dikkate alınması gereken tek şey, burada ele alınan eylemsizlik kuvvetlerinin dengesi değildir. Bölüm 4.4.2.1 den anımsanacağı gibi krank yıldızı tasarımı silindirlerdeki ateşleme düzenini, dolayısıyla da gaz kuvvetlerinin motora verdiği gücün çevrim boyunca dağılımının düzgünlüğünü belirler. Bu dağılımın düzgün olmaması moment ve hız dalgalanmalarını, buna bağlı olarak da kullanılması gereken eylemsizlik çarkını büyütecektir. Ayrıca moment dalgalanmaları, yukarıdaki hesaplarda göz önüne almadığımız bir unsur olarak, motorun z ekseni çevresinde bir sarsma momenti etkisi altında kalmasına yol açar. Bütün bu nedenlerle krank yıldızı tasarımı problemi, eylemsizlik kuvvetlerinin dengesi ve güç dağılımının düzgünlüğü ölçütleri arasında orta yolun bulunması problemine dönüşebilir.

ÖRNEK PROBLEMLER

Problem 8.3.1



Şekil Pr.8.3.1-1

Şekilde, krank yıldızı, krank kolları arasında 90° açı olacak biçimde tasarlanmış ve silindirleri eşit a aralıklarıyla sıralanmış 4 silindirli bir içten yanmalı motor gösterilmiştir. Bu motoru, krank milinin düzgün hızla dönmesi halindeki sarsma kuvvetlerinin dengesi bakımından inceleyiniz.

Çözüm:

İnceleme, bu motorda (8.3.8-11) eşitliklerinin sağlanıp sağlanmadığının kontrolünden ibarettir. Bu kontrolün aşağıdaki gibi bir tablonun doldurularak gerçekleştirilmesi kolaylık sağlayacaktır.

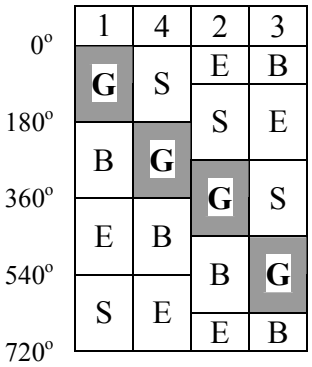
i	ψ_i	$\cos\psi_i$	$\sin\psi_i$	$2\psi_i$	$\cos 2\psi_i$	$\sin 2\psi_i$	a_i	$a_i\cos\psi_i$	$a_i\sin\psi_i$	$a_i\cos 2\psi_i$	$a_i\sin 2\psi_i$
1	0°	1	0	0°	1	0	0	0	0	0	0
2	90°	0	1	180°	-1	0	a	0	a	-a	0
3	270°	0	-1	540°	-1	0	2a	0	-2a	-2a	0
4	180°	-1	0	360°	1	0	3a	-3a	0	3a	0
Toplam		0	0		0	0		-3a	-a	0	0
		1. Mertebeden Kuvv. Dengeli			2. Mertebeden Kuvv. Dengeli			1. Mertebeden Mom. Dengesiz		2. Mertebeden Mom. Dengeli	

Bu incelemenin tabloda da belirtilen sonucuna göre, verilen krank yıldızı tasarımıyla bu motorda 1. ve 2. mertebeden sarsma kuvvetleri ile 2. mertebeden sarsma momentleri dengelenmiş, buna karşılık 1. mertebeden sarsma momentleri dengelenmemiş olmaktadır. (8.3.7) bağıntısı ve tablolanan sonuçlara göre dengelenmemiş kalan sarsma momentinin ifadesi

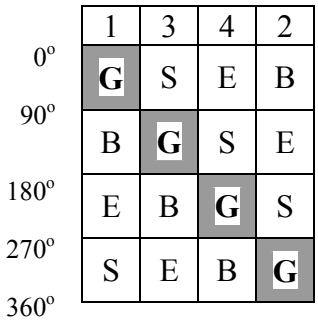
$$M_y^S = m_{öte} r\omega^2 a(-3\cos\varphi + \sin\varphi) \qquad \text{(i)}$$

olarak bellidir.

Verilen krank yıldızı tasarımının iyiliği hakkında bir karar verebilmek için, bu tasarımın motorda nasıl bir güç dağılımına yol açacağının da strok diyagramları yardımıyla incelenmesi gerekir. Bu amaçla motorun 2 ve 4 zamanlı olması halleri için ayrı ayrı oluşturulan strok diyagramlarının incelenmesinden bu tasarımın 2 zamanlı motor halinde düzgün bir güç dağılımına, buna karşılık 4 zamanlı motor halinde düzgün olmayan bir güç dağılımına yol açacağı anlaşılır.



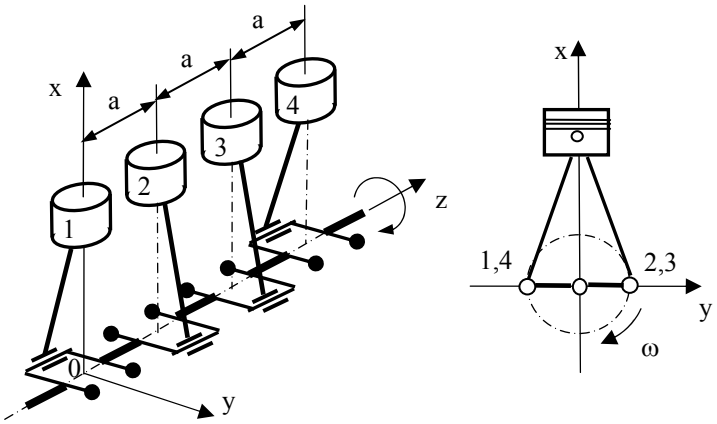
(a) 4 Zamanlı Motor Hali



(b) 2 Zamanlı Motor Hali

Şekil Pr.8.3.1-2 Strok Diyagramları

Problem 8.3.2



Şekil Pr.8.3.2-1

Şekilde, krank yıldızı, krank kolları arasında 180° açı olacak biçimde tasarlanmış ve silindirleri eşit a aralıklarıyla sıralanmış 4 silindirli bir içten yanmalı motor gösterilmiştir. Bu motoru, krank milinin düzgün hızla dönmesi halindeki sarsma kuvvetlerinin dengesi bakımından inceleyiniz.

Çözüm:

İnceleme aşağıdaki tablo doldurularak gerçekleştirilsin.

i	ψ_i	$\cos\psi_i$	$\sin\psi_i$	$2\psi_i$	$\cos 2\psi_i$	$\sin 2\psi_i$	a_i	$a_i\cos\psi_i$	$a_i\sin\psi_i$	$a_i\cos 2\psi_i$	$a_i\sin 2\psi_i$
1	0°	1	0	0°	1	0	0	0	0	0	0
2	180°	-1	0	360°	1	0	a	-a	0	a	0
3	180°	-1	0	360°	1	0	2a	-2a	0	2a	0
4	0°	1	0	0°	1	0	3a	3a	0	3a	0
Toplam		0	0		4	0		0	0	6a	0
		1. Mertebeden Kuvv. Dengeli			2. Mertebeden Kuvv. Dengesiz			1. Mertebeden Mom. Dengeli		2. Mertebeden Mom. Dengesiz	

Tabloda da belirtildiği gibi, verilen krank yıldızı tasarımıyla bu motorda 1. mertebeden sarsma kuvvetleri ile 1. mertebeden sarsma momentleri dengelenmiş, buna karşılık 2. mertebeden sarsma kuvvetleri ile 2. mertebeden sarsma momentleri

dengelenmemiş olmaktadır. (8.3.6) ile (8.3.7) bağıntıları ve tablolanan sonuçlara göre dengelenmemiş kalan sarsma kuvvet ve momentinin ifadeleri

$$F_x^S = 4m_{öte}\frac{r^2}{\ell}\omega^2\cos 2\varphi \qquad \text{(i)}$$

ve

$$M_y^S = 6m_{öte}\frac{r^2}{\ell}\omega^2 a\cos 2\varphi \qquad \text{(ii)}$$

olarak bellidir.

Bu krank yıldızı tasarımının motorda nasıl bir güç dağılımına yol açacağını görmek üzere motorun 2 ve 4 zamanlı olması halleri için ayrı ayrı strok diyagramları oluşturulursa, bu tasarımın 4 zamanlı motor halinde düzgün bir güç dağılımına, buna karşılık 2 zamanlı motor halinde düzgün olmayan bir güç dağılımına yol açacağı görülür.

	1	3	4	2
0°	**G**	S	E	B
180°	B	**G**	S	E
360°	E	B	**G**	S
540°	S	E	B	**G**
720°				

(a) 4 Zamanlı Motor Hali

	1	4	2	3
0°	**G**	**G**	E	E
90°	B	B	S	S
180°	E	E	**G**	**G**
270°	S	S	B	B
360°				

(b) 2 Zamanlı Motor Hali

Şekil Pr.8.3.2-2 Strok Diyagramları

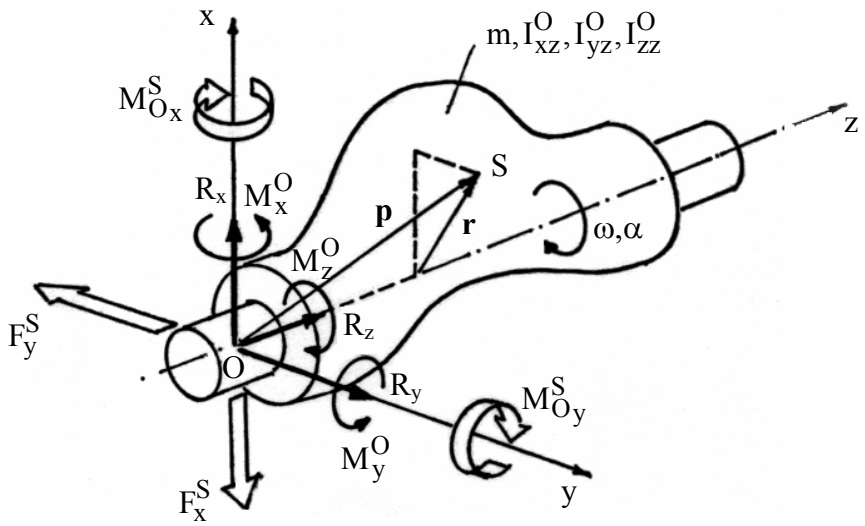
9 RİJİD ROTORLARDA KÜTLE DENGELEMESİ

9.1 ESASLAR

Makinaların, sabit bir eksen çevresinde dönen (daimi dönme hareketi yapan) uzuvlarına *rotor* adı verilir. Uygun kütle dağılımına sahip olmayan rotorlar, dönmeleri sırasında, makinanın sabit uzvuna *sarsma kuvvetleri* uygularlar. Rotorun kütle dağılımının düzenlenmesiyle bu kuvvetlerin yok edilmesi, ya da en azından azaltılması mümkündür. Buna *rotorda kütle dengelemesi,* ya da kısaca, *rotorun dengelenmesi* adı verilir.

Burada sözü edilen problemin, özünde, makinalarda sarsma kuvvetleri genel probleminin bir özel konusundan başka bir şey olmadığı ortadadır. Böyle olduğu halde problemin, bu konuya ayrılmış olan Bölüm 8 de ele alınmayıp ayrı bir bölüm halinde ele alınışının nedeni, biraz farklı bir kuramsal zemin gerektirmesidir. Problem, makina uzuvları hakkında yapageldiğimiz *düzlemsel rijid cisim* kabulü çerçevesinde incelenememekte ve daha önceki konulardan ayırıcı bir özellik olarak, rotorun üç boyutlu dinamiğinin formüle edilmesini gerektirmektedir.

Bunu yapmak üzere Şekil 9.1.1 deki rijid rotor göz önüne alınır ve z ekseni dönme ekseniyle çakışan, rotora bağlı (onunla birlikte dönen) O;xyz eksen takımında çalışılarak rotorun hareket denklemleri yazılmak istenirse, **R** rotora etkiyen tüm kuvvetlerin bileşkesini, $\mathbf{M}^O$ ise bunların O noktasına göre momentleri toplamını göstermek üzere kütle merkezinin hareketi için (2.3.3) denklemi uyarınca,



Şekil 9.1.1 Rijid Rotor

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_S \tag{9.1.1}$$

dönme hareketi için ise (2.3.5) denklemi uyarınca

$$\mathbf{M}^O = \mathbf{I}^O\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}^O\boldsymbol{\omega} \tag{9.1.2}$$

yazılabilir. Burada, dönme ekseninin z ekseni olarak seçilmesi yüzünden, açısal hız ve ivme vektörlerinin $\omega = \omega\mathbf{k}$ ve $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ şeklinde olduğuna dikkat edilir, ayrıca rotorun S kütle merkezinin yer vektörü $\mathbf{p} = x_S\mathbf{i} + y_S\mathbf{j} + z_S\mathbf{k}$, bu vektörün hesaplarda asıl gerekli olan O;xy düzlemi üzerindeki izdüşümü $\mathbf{r} = x_S\mathbf{i} + y_S\mathbf{j}$ şeklinde gösterilip daimi dönme hareketinin kinematiğinden kütle merkezinin ivmesi

$$\mathbf{a}_S = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{9.1.3}$$

şeklinde hesap yapılarak

$$\mathbf{a}_S = -(y_S\alpha + x_S\omega^2)\mathbf{i} + (x_S\alpha - y_S\omega^2)\mathbf{j} \tag{9.1.4}$$

olarak belirlenirse, kütle merkezinin hareketi için (9.1.1) yerine skaler

$$\begin{aligned} R_x &= -m(y_S\alpha + x_S\omega^2) \\ R_y &= m(x_S\alpha - y_S\omega^2) \\ R_z &= 0 \end{aligned} \tag{9.1.5}$$

denklemleri, dönme hareketi için ise (9.1.2) yerine (2.3.8) de de verilmiş olan

$$\begin{aligned} M_x^O &= -I_{xz}^O\alpha + I_{yz}^O\omega^2 \\ M_y^O &= -I_{yz}^O\alpha - I_{xz}^O\omega^2 \\ M_z^O &= I_{zz}^O\alpha \end{aligned} \tag{9.1.6}$$

denklemleri elde edilir. (9.1.5) ve (9.1.6) denklemleri, ω açısal hızı ve α açısal ivmesiyle dönebilmesi için rotora uygulanması gereken kuvvetler sisteminin O noktasına indirgenmiş karşılığını vermektedir. (9.1.5) denklemlerinin sonuncusundan, rotora bu hareketi yaptırmak için ona z ekseni doğrultusunda bir kuvvet uygulanması gerekmediği anlaşılmaktadır. Öte yandan, (9.1.6) denklemlerinin sonuncusundaki M_z^O momenti, doğrudan doğruya, rotorun α açısal ivmesiyle hareket ettirilebilmesi için gereken döndürme momentinden başka bir şey değildir. Rotora bu moment dışında hiç bir *verilmiş* kuvvet uygulanmadığı kabul edilirse, (9.1.5) ve (9.1.6) denklemlerinden geri kalan terimlerin, makinanın sabit uzvunun mevcut yatak ya da yataklarda rotora uyguladığı tepki (kısıt) kuvvetleri sisteminin O noktasına

indirgenmiş halinden; bunların ters işaretlisinin ise rotorun sabit uzva uyguladığı sarsma kuvvetleri sistemininkinden ibaret olacağı anlaşılır. Buna göre sabit uzva etkiyecek *sarsma kuvvetleri* sistemi, O noktasına indirgenmiş haliyle,

$$\mathbf{F}^S = -(R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}) = m(y_S\alpha + x_S\omega^2)\mathbf{i} - m(x_S\alpha - y_S\omega^2)\mathbf{j} \qquad (9.1.7)$$

kuvveti ve

$$\mathbf{M}_O^S = -(M_x^O\mathbf{i} + M_y^O\mathbf{j}) = (I_{xz}^O\alpha - I_{yz}^O\omega^2)\mathbf{i} + (I_{yz}^O\alpha + I_{xz}^O\omega^2)\mathbf{j} \qquad (9.1.8)$$

momentinden ibarettir. Esas olarak rotora etkiyen eylemsizlik kuvvetleri ve onların O ya göre momentlerinden başka bir şey olmayan bu büyüklükler bazen *dinamik kuvvet ve momentler* adıyla da anılırlar. Dikkat edilirse bu kuvvet ve moment vektörlerinin şiddetleri

$$F^S = m\sqrt{x_S^2 + y_S^2}\cdot\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} = mr\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \qquad (9.1.9)$$

ve

$$M_O^S = \sqrt{(I_{xz}^O)^2 + (I_{yz}^O)^2}\cdot\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \qquad (9.1.10)$$

şeklinde olup, α açısal ivmesinde bir dalgalanma olmadıkça bir sarsma etkisi yaratacak biçimde değişmezler. Sarsma etkisini yaratan, bu vektörlerin doğrultusunun, rotora bağlı eksen takımıyla birlikte yön değiştirmesidir.

Şimdi bir rotorda sarsma kuvvetlerini yok etmek (sarsma kuvvetleri sistemini sıfıra denk bir sistem haline getirmek) için neler yapılabileceğini görmek üzere (9.1.7) ve (9.1.8) eşitlikleri dikkate alınırsa hemen şu sonuçlara varılır:

i) (9.1.7) eşitliğine göre sarsma kuvvetleri sisteminin bileşkesini sıfıra eşit kılmak için $x_S = 0$, $y_S = 0$ $\rightarrow$ r=0 yapılmalı; yani *rotorun kütle merkezi dönme ekseni üzerine getirilmelidir*. Böyle bir rotor, dönme ekseni yatay olacak biçimde yerleştirildiğinde kendi ağırlık kuvveti bir döndürme momenti vermeyeceği ve rotor her açısal konumda statik dengede olacağı için buna *rotorun statik dengesi* adı verilir.

Kütle merkezinin denklem (2.2.5) teki tanımının anımsanmasıyla, statik dengenin koşulları, rotorun sürekli kütle dağılımına sahip bir rijid cisim ve m_i kütleli n adet parçacığın oluşturduğu rijid bir bütün olarak görülmesi halleri için ayrı ayrı olmak üzere

$$\begin{aligned} \int x\,dm = 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = 0 \\ \int y\,dm = 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i m_i = 0 \end{aligned} \qquad (9.1.11)$$

şeklinde yazılabilir.

ii) (9.1.8) eşitliğine göre sarsma kuvvetleri sisteminin O noktasına göre momentini sıfıra eşit kılmak için $I_{xz}^{O} = I_{yz}^{O} = 0$ yapılmalı; yani O;z ekseni rotorun bir asal eylemsizlik ekseni haline getirilmelidir. Eylemsizlik çarpımlarının denklem (2.2.8) deki tanımlarının anımsanmasıyla bu koşullar da

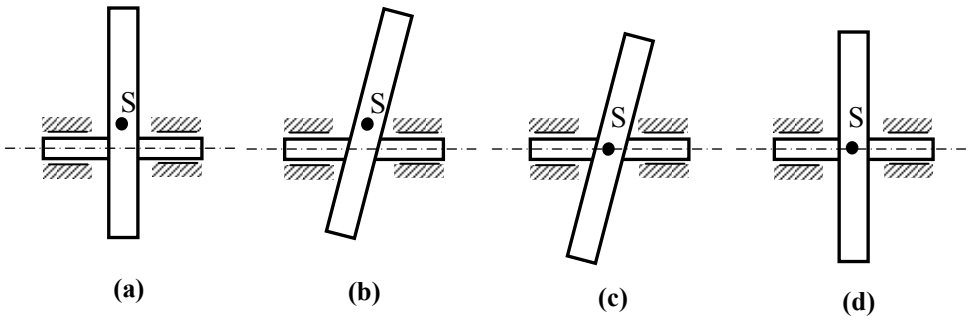
$$I_{xz}^{O} = \int xzdm = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i z_i m_i = 0$$

$$I_{yz}^{O} = \int yzdm = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i = 0 \qquad (9.1.12)$$

şeklinde yazılabilir.

(i) ve (ii) deki koşulların her ikisi birden sağlandığında sarsma kuvvetleri sistemi sıfıra denk bir sistem haline gelir. Artık sistemin yalnızca O noktasına değil, her noktaya göre momenti sıfır olur. (Bunun anlamı, artık yalnız seçilmiş O noktasını başlangıç alan O;z ekseninin değil, başlangıç noktası seçiminden bağımsız olarak z ekseninin bütünüyle cismin bir asal eylemsizlik ekseni haline gelmesidir.[1]) Bu durumda rotorun hareketi yüzünden sabit uzva hiç bir dinamik kuvvet etkimez. Buna *rotorun dinamik dengesi* adı verilir.

Rotorların statik ve dinamik dengesi hakkında bir fikir vermek üzere, Şekil 9.1.2 de statik ve dinamik bakımdan dengeli ve dengesiz rotor örnekleri gösterilmiştir.



Şekil 9.1.2 Dengeli ve Dengesiz Rotorlar

(**a**), (**b**): Statik ve Dinamik Dengesiz,
(**c**): Statik Dengeli Dinamik Dengesiz,
(**d**): Statik ve Dinamik Dengeli.

[1] **Alıştırma**: Verilmiş bir O noktası için (9.1.12) koşullarının yanısıra (9.1.11) koşulları da geçerliyken (9.1.12) koşullarının z ekseni üzerindeki her nokta için sağlanacağını matematiksel olarak kanıtlayınız ve bundan yararlanarak, (9.1.12) koşullarının, z ekseni üzerindeki iki farklı nokta için sağlanmasının rotorun dinamik dengesi için yeterli olduğunu gösteriniz.

9.2 ROTORLARIN DENGELENMESİ

Bir rotor tasarlanırken (9.1.11) ve (9.1.12) koşulları sağlanacak; yani dönme ekseni bir asal eylemsizlik ekseni olacak biçimde tasarlanmaya çalışılır. Bu sağlanmadığında doğacak sarsma kuvvetleri (9.1.9-10) eşitliklerinden görüldüğü gibi rotorun açısal hızının karesiyle artacağından, yüksek hızda çalışmak üzere tasarlanan rotorlarda buna özellikle dikkat edilmelidir. Kağıt üzerindeki tasarımda rotorun dinamik dengesi gözetilmiş olsa bile, üretim ve montaj sırasında doğabilecek hatalar ya da makinanın çalışması sırasında oluşabilecek (aşınma vb. gibi) etkiler bu dengeyi bozabilir. Bu gibi durumlarda rotorun uygun yerlerine kütle eklenmesi ya da çıkartılmasıyla dengenin yeniden sağlanmasına çalışılır. Buna *rotorun dengelenmesi* (*balansı*) adı verilir. Türbinler, fanlar, otomobil tekerlekleri gibi yüksek hızlı rotorlarda dengeleme işlemleri düzenli olarak uygulanır. Bu bölümde, rotorların dengelenmesi konusu ele alınacaktır.

9.2.1 STATİK DENGELEME

Yukarıda belirtildiği gibi, statik dengeleme denildiğinde rotorun kütle merkezinin dönme ekseni üzerine getirilmesi anlaşılır. Kütlesi m, kütle merkezinin dönme ekseninden kaçıklığı r olan bir rotorda bunu yapmak için, rotorun bu iş için elverişli bir $\mathcal{D}$ düzlemine, kütle merkeziyle tam zıt yönde

$$m_d r_d = mr \tag{9.2.1}$$

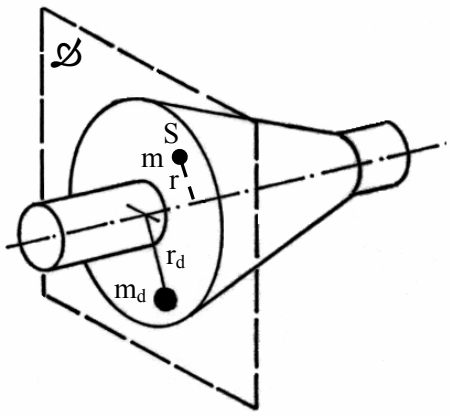
eşitliği sağlanacak biçimde bir kütle eklenmesi; ya da kütle merkeziyle aynı yönde böyle bir kütlenin çıkartılmasının yeterli olacağı açıktır (Şek. 9.2.1). Buradaki

$$D=mr \tag{9.2.2}$$

büyüklüğüne *dengesizlik*,

$$\Delta = m_d r_d \tag{9.2.3}$$

büyüklüğüne ise *dengeleme büyüklüğü* adı verilir.



Şekil 9.2.1 Statik Dengeleme

Sarsma kuvvetlerinin bileşkesini yok etmekle birlikte sarsma momentini yok etmeyeceği bilinen böyle bir dengeleme ancak göreli olarak düşük hızlı ve kısa rotorlarda yeterli sayılabilir. Ancak, aşağıda görüleceği gibi, tüm sarsma etkisini yok edecek bir dinamik dengeleme, rotorun en az iki düzlemine dengeleme büyüklükleri yerleştirilmesini gerektirdiğinden, bu işe uygun yalnızca bir tek düzleme sahip olan rotorlarda bununla yetinmek zorunda kalınabilir.

9.2.2 DİNAMİK DENGELEME

9.2.2.1 Rotorun İki Dengesizliğe İndirgenmesi

Her rijid rotor, sarsma kuvvetleri bakımından, keyfi seçilmiş iki düzleme yerleştirilecek iki dengesizliğe eşdeğerdir. Rotorların dinamik dengelemesi konusuna geçmeden önce, bu gerçeğin ortaya konulması yararlı olacaktır.

Bunu göstermek üzere önce denklem (9.1.7) ve (9.1.8) den, aynı (mx_S), (my_S), I_{xz}^O ve I_{yz}^O büyüklüklerine sahip olan iki rotorun birbiriyle aynı sarsma etkisini yaratacağına dikkat edelim, ardından da, buna dayanarak, rotoru n adet maddesel noktadan oluşan bir eşdeğer noktasal kütleler sistemine indirgemeyi düşünelim. i. maddesel noktanın koordinatlarına x_i, y_i, z_i denilirse eşdeğerlik koşulları

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i x_i) = mx_S, \qquad \sum_{i=1}^{n}(m_i y_i) = my_S,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(m_i x_i) z_i = I_{xz}^O, \qquad \sum_{i=1}^{n}(m_i y_i) z_i = I_{yz}^O \tag{9.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Eldeki bu 4 denkleme karşılık her bir maddesel nokta için $(m_i x_i)$, $(m_i y_i)$, z_i şeklinde 3 bilinmeyenden toplam 3n adet bilinmeyen hesaplamak isteyelim. Buna göre indirgeme probleminin çözülebilmesi için $3n \geq 4 \rightarrow n \geq 2$ olmalıdır. Bunun anlamı, her rotorun sarsma kuvvetleri bakımından eşdeğer olarak en az iki maddesel nokta içeren bir maddesel noktalar sistemine indirgenebileceğidir. En küçük sayı olan n=2 seçilirse 4 denkleme karşı 6 bilinmeyenlik bir problem söz konusu olur ve bilinmeyenlerden 6-4=2 sine keyfi değerler verilebilir. Biz keyfi olarak $z_1 = 0$ ve $z_2 = a$; a>0 seçelim. Bunun, kütle yerleştirilecek iki düzlemin (Soldakine D_L, sağdakine D_R diyelim.) keyfi olarak seçilmesi ve kullanılan eksen takımının O;xy düzleminin D_L ile çakıştırılması anlamına geldiğine dikkat çektikten sonra, bu değerlerle (9.2.4) eşitliklerine dönülürse

$$(m_1 x_1) + (m_2 x_2) = mx_s, \qquad (m_1 y_1) + (m_2 y_2) = my_s$$
$$(m_2 x_2) \cdot a = I_{xz}^O, \qquad (m_2 y_2) \cdot a = I_{yz}^O \tag{9.2.5}$$

bunların çözülmesiyle de

$$(m_1x_1) = mx_S - \frac{I_{xz}^O}{a}, \qquad (m_1y_1) = my_S - \frac{I_{yz}^O}{a}$$

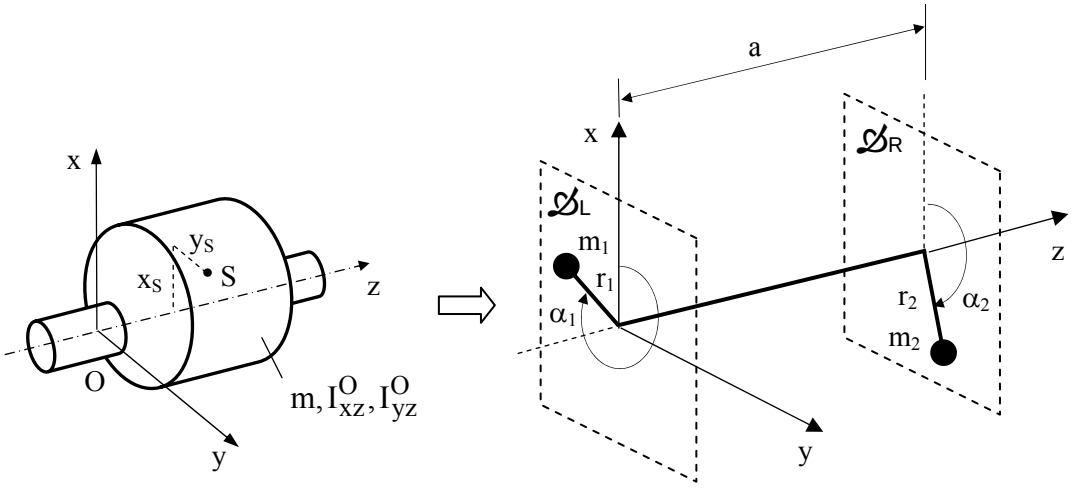
$$(m_2x_2) = \frac{I_{xz}^O}{a}, \qquad (m_2y_2) = \frac{I_{yz}^O}{a} \tag{9.2.6}$$

elde edilir. İstenirse bu sonuç, $(m_ir_i) = \sqrt{(m_ix_i)^2 + (m_iy_i)^2}$, $\alpha_i = \tan^{-1}\left(\frac{m_iy_i}{m_ix_i}\right)$; i=1,2 şeklinde hesap yapılıp kutupsal koordinatlara geçilerek

$$D_1 = (m_1r_1) = \sqrt{\left(mx_S - \frac{I_{xz}^O}{a}\right)^2 + \left(my_S - \frac{I_{yz}^O}{a}\right)^2}, \quad \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{my_S - \frac{I_{yz}^O}{a}}{mx_S - \frac{I_{xz}^O}{a}}\right)$$

$$D_2 = (m_2r_2) = \frac{1}{a}\sqrt{\left(I_{xz}^O\right)^2 + \left(I_{yz}^O\right)^2}, \quad \alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{I_{yz}^O}{I_{xz}^O}\right) \tag{9.2.7}$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece, her rijid rotorun, sarsma kuvvetleri bakımından, keyfi seçilmiş iki düzleme yerleştirilecek iki dengesizliğe eşdeğer olduğu hükmü doğrulanmış ve bu dengesizliklerin büyüklük ve açısal konumlarının nasıl hesaplanacağı gösterilmiş olmaktadır (Şek. 9.2.2).



Şekil 9.2.2 Rotorun İki Dengesizliğe İndirgenmesi

9.2.2.2 İki Düzlemde Dinamik Dengeleme

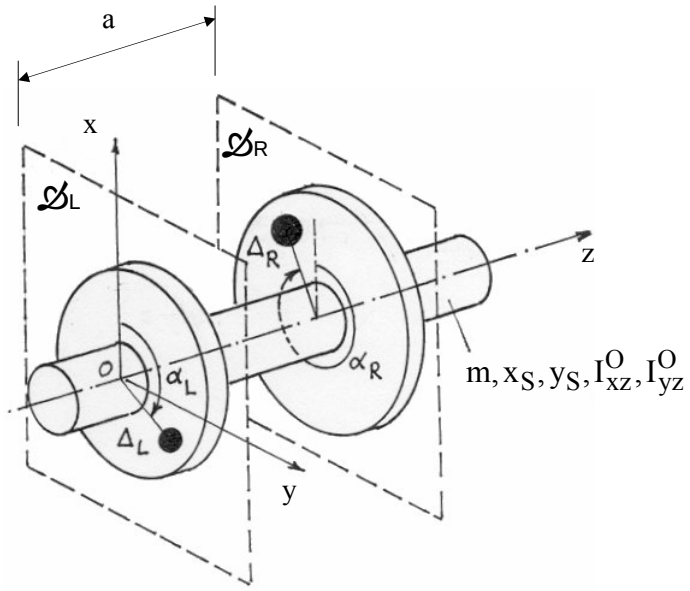
Her rijid rotorun, sarsma kuvvetleri bakımından, keyfi seçilmiş iki düzleme yerleştirilecek iki dengesizliğe eşdeğer oluşunun doğal sonucu, böyle rotorların iki keyfi düzleme yerleştirilecek iki dengeleme büyüklüğüyle dengelenebilmesidir. Bunu yapmanın yolunun, (9.2.7) deki indirgemede bulunan dengesizliklere eşit dengeleme büyüklüklerinin, orada hesaplanan açısal konumların 180° zıttına yerleştirilmesi olduğu açıktır (Şek. 9.2.3). Buna göre kütlesi, kütle merkezinin dönme eksenine dik düzlemdeki konumu ve ilgili eylemsizlik çarpımları m, x_S, y_S, I_{xz}^O, I_{yz}^O olarak bilinen rijid bir rotoru dengelemek için O;xy düzlemiyle çakışık bir $\mathcal{D}_L$ *sol dengeleme düzlemi*ne, şiddet ve açısal konumu

$$\Delta_L = (m_d r_d)_L = \sqrt{\left(\frac{I_{xz}^O}{a} - mx_S\right)^2 + \left(\frac{I_{yz}^O}{a} - my_S\right)^2}\ ,\quad \alpha_L = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{I_{yz}^O}{a} - my_S}{\frac{I_{xz}^O}{a} - mx_S}\right) \qquad (9.2.8)$$

şeklinde hesaplanacak bir *sol dengeleme büyüklüğü* ile, sol dengeleme düzleminin keyfi bir a uzaklığı kadar sağında yer alan bir $\mathcal{D}_R$ *sağ dengeleme düzlemi*ne, şiddet ve açısal konumu

$$\Delta_R = (m_d r_d)_R = \frac{1}{a}\sqrt{\left(-I_{xz}^O\right)^2 + \left(-I_{yz}^O\right)^2}\ ,\quad \alpha_R = \tan^{-1}\left(\frac{-I_{yz}^O}{-I_{xz}^O}\right) \qquad (9.2.9)$$

şeklinde hesaplanacak bir sağ *dengeleme büyüklüğü*nü*n* yerleştirilmesi yeterlidir[1].



Şekil 9.2.3 İki Düzlemde Dinamik Dengeleme

[1] **Alıştırma**: Bu yapıldığında (9.1.11) ve (9.1.12) deki dinamik dengeleme koşullarının sağlandığını gösteriniz.

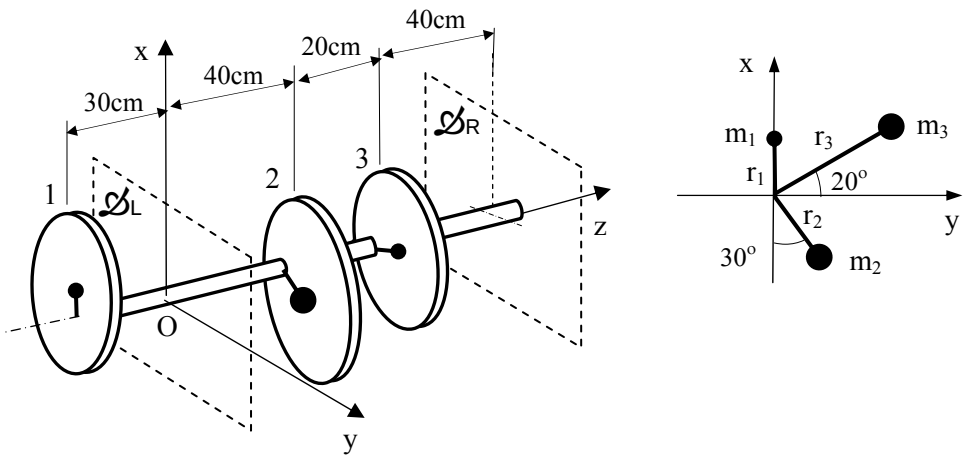
Rotorlarda oluşan sarsma kuvvetleri, makinanın titreşimli ve gürültülü çalışmasına, yorulma sonucu yataklarının tahrip olmasına neden olduğundan, şüphe yok ki hiç istenmeyen kuvvetlerdir. Burada ortaya konulan dinamik dengeleme yöntemi, rijid rotorlarda bu sorunun önüne geçmenin son derece basit fakat bir o kadar da etkili bir mühendislik çözümünü oluşturmaktadır. Bunu dikkate alan bir mühendis, işlevsel geometrisi dengesizliğe yol açan bir rotor tasarlamak durumunda kaldığında, buradaki yöntemle tasarımının dinamik dengesini sağlayabilir. Yine, iyi bir tasarımcı mühendis, tasarladığı rotorun çalışma sırasında dinamik dengesinin bozulabileceğini ve dinamik dengeleme gerektirebileceğini önceden düşünüp, uygun iki dengeleme düzlemini ve yapıyı tahrip etmeden kütle eklenip çıkartılmasına olanak veren bir düzenlemeyi tasarımına ekleyebilir (ki bunun örnekleri vardır).

Bugün, bir rotorda mevcut dengesizlikleri titreşim ölçümleri aracılığıyla belirleyen ve yukarıdaki hesapları gerçekleştirerek kullanılması gereken dengeleme büyüklüklerini konumlarıyla birlikte bildiren modern cihazlar yardımıyla rotorlar bulundukları yerde dengelenebilmektedir.

Bu bölümü, yukarıda ortaya konulan bilgilerin geçerlilik sınırları hakkında bir noktanın altını çizerek kapatalım. Buradaki inceleme, rotorun bir rijid cisim olduğu kabulüne dayandırılmıştır. Buna bağlı olarak, eylemsizlik kuvvetlerinin sabit uzva etkisinden ibaret olan sarsma kuvvetleri incelenirken, aynı kuvvetlerin rotorda yol açacakları iç gerilmeler üzerinde durulmamıştır. Oysa iki düzlemde dinamik dengeleme gerçekleştirildiğinde bile bu gerilmeler var olmaya devam eder ve özellikle narin yapılı (ince uzun) rotorlarda eğilmelere yol açar. Bu ise rotorun kütle dengesinin değişmesi demektir. Bunun doğrudan sonucu, rijid cisim davranışı gösteren rotorların dengesinin açısal hız ve ivmeden tamamen bağımsız oluşuna karşılık elastik davranış gösteren rotorlarınkinin (eylemsizlik kuvvetlerini, dolayısıyla da milin alacağı şekli etkileyen) bu büyüklüklere bağımlı oluşudur. Buradan anlaşılacağı gibi elastik rotorların dengelenmesi problemi, burada verilenden farklı esaslara dayanan ve bu dersin çerçevesini aşan apayrı bir problemdir.

ÖRNEK PROBLEMLER

Problem 9.2.1



Şekil Pr.9.2.1-1

Şekilde, üzerinde üç disk taşıyan bir milden ibaret olan bir rotor gösterilmiştir. Bu rotorda milin kendisi dinamik dengeye sahip olmakla birlikte, dönme eksenine dik yerleştirilmiş birer homojen dairesel levhadan ibaret olan disklerin her birinde birer miktar merkez kaçıklığı bulunmaktadır. Bu rotoru dinamik olarak dengelemek üzere, şekilde gösterilen $\mathcal{D}_L$ ve $\mathcal{D}_R$ düzlemlerine, dönme ekseninden 20 cm uzağa dengeleme kütleleri yerleştirilecektir. Bu kütleleri ve yerleştirilmeleri gereken açısal konumları belirleyiniz.

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 5 \text{ kg}, \quad m_3 = 4 \text{ kg}, \quad r_1 = 0.5 \text{ mm}, \quad r_2 = 0.8 \text{ mm}, \quad r_3 = 1.2 \text{ mm}$$

Çözüm:

Problemi önce genel bir bakışla ele alalım. (9.2.8-9) bağıntıları yardımıyla hesap yapılacağına göre önce rotorun mx_S, my_S, I_{xz}^O, I_{yz}^O büyüklükleri belirlenmelidir. Dengeli olduğu belirtilen milin kütle merkezi dönme ekseni üzerindedir. Buna göre mx_S ve my_S nin hesabında yalnızca disk kütleleri hesaba katılacak ve i indisi disk numarasını, α_i i-inci disk kütle merkezinin x eksenine göre açısal konumunu göstermek üzere

$$mx_S = \sum_i m_i x_i = \sum_i m_i r_i \cos\alpha_i, \quad my_S = \sum_i m_i y_i = \sum_i m_i r_i \sin\alpha_i \qquad \text{(i)}$$

şeklinde hesap yapılacaktır. Dengeli olan milin, rotorun I_{xz}^O ve I_{yz}^O eylemsizlik çarpımlarına da bir katkısı yoktur. Öte yandan, dönme eksenine dik homojen birer levha olduklarına göre, her bir diskin kütle merkezinden geçen z ye paralel eksen bu disk için bir asal eylemsizlik eksenidir ve bu eksene göre eylemsizlik çarpımları

sıfırdır. Disklerin O;xyz eksen takımına göre eylemsizlik çarpımları da (2.2.12) deki Huygens-Steiner formülü yardımıyla hesaplanırsa rotorun eylemsizlik çarpımları için

$$I_{xz}^{O} = \sum_i m_i x_i z_i = \sum_i m_i r_i \cos\alpha_i z_i \ , I_{yz}^{O} = \sum_i m_i y_i z_i = \sum_i m_i r_i \sin\alpha_i z_i \quad \text{(ii)}$$

yazılabilir. (i) ve (ii) eşitliklerinin, bu problemde ele alınan tipte rotorların bir dizi dengesizlik taşıyan bir mil gözüyle görülebileceğini ortaya koyduğuna işaret ettikten sonra bu eşitliklerle (9.2.8-9) bağıntılarına gidilirse

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_x} &= (m_d r_d)_{L_x} = -\sum_i (1-\tfrac{z_i}{a}) m_i r_i \cos\alpha_i \\
\Delta_{L_y} &= (m_d r_d)_{L_y} = -\sum_i (1-\tfrac{z_i}{a}) m_i r_i \sin\alpha_i \\
\Delta_{R_x} &= (m_d r_d)_{R_x} = -\sum_i \tfrac{z_i}{a} m_i r_i \cos\alpha_i \\
\Delta_{R_y} &= (m_d r_d)_{R_y} = -\sum_i \tfrac{z_i}{a} m_i r_i \sin\alpha_i
\end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

gösterilimleriyle, sol dengeleme büyüklüğü ve açısal konumu için

$$\Delta_L = (m_d r_d)_L = \sqrt{(\Delta_{L_x})^2 + (\Delta_{L_y})^2} \ , \quad \alpha_L = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta_{L_y}}{\Delta_{L_x}}\right) \qquad \text{(iv)}$$

sağ dengeleme büyüklüğü ve açısal konumu için ise

$$\Delta_R = (m_d r_d)_R = \sqrt{(\Delta_{R_x})^2 + (\Delta_{R_y})^2} \ , \quad \alpha_R = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta_{R_y}}{\Delta_{R_x}}\right) \qquad \text{(v)}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu genel belirlemelerden sonra eldeki probleme dönülür ve problemin verileri aşağıdaki gibi bir tabloda toplandıktan sonra hesaba geçilirse, (iii) eşitliklerinden

i	m_i [kg]	r_i [mm]	z_i [cm]	α_i [°]
1	2	0.5	-30	0
2	5	0.8	40	150
3	4	1.2	60	70
a=100 cm				

$$\Delta_{L_x} = -(1+\tfrac{30}{100})2\cdot 0.5\cdot\cos 0 - (1-\tfrac{40}{100})5\cdot 0.8\cdot\cos 150 - (1-\tfrac{60}{100})4\cdot 1.2\cdot\cos 70 = 0.1218\text{kg.mm}$$

$$\Delta_{L_y} = -(1+\tfrac{30}{100})2\cdot 0.5\cdot\sin 0 - (1-\tfrac{40}{100})5\cdot 0.8\cdot\sin 150 - (1-\tfrac{60}{100})4\cdot 1.2\cdot\sin 70 = -3.0042\text{kg.mm}$$

$$\Delta_{R_x} = +\tfrac{30}{100}2\cdot 0.5\cdot\cos 0 - \tfrac{40}{100}5\cdot 0.8\cdot\cos 150 - \tfrac{60}{100}4\cdot 1.2\cdot\cos 70 = 0.7006\text{kg.mm}$$

$$\Delta_{R_y} = +\tfrac{30}{100}2\cdot 0.5\cdot\sin 0 - \tfrac{40}{100}5\cdot 0.8\cdot\sin 150 - \tfrac{60}{100}4\cdot 1.2\cdot\sin 70 = -3.5063\text{kg.mm}$$

hesaplanır. Böylece (iv) ve (v) ten de sol dengeleme büyüklüğü, açısı ve kütlesi için

$$\Delta_L = (m_d r_d)_L = \sqrt{0.1218^2 + (-3.0042)^2} = 3.0067 \text{ kg.mm}$$

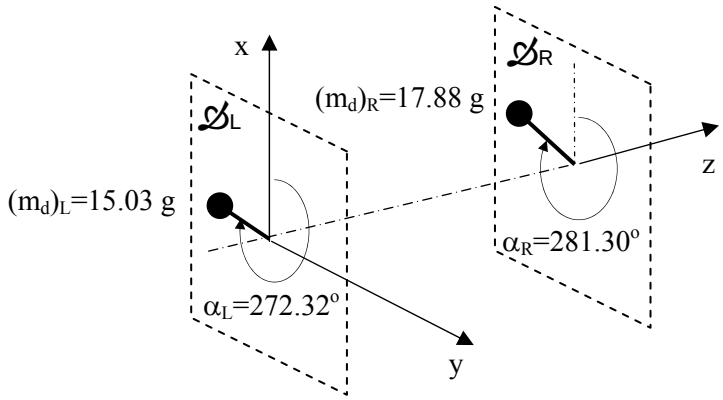
$$\alpha_L = \tan^{-1}\left(\frac{-3.0042}{0.1218}\right) = 272{,}32^\circ \;,\; (m_d)_L = \frac{\Delta_L}{(r_d)_L} = \frac{3.0067}{200} = 15.03\cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

sağ dengeleme büyüklüğü, açısı ve kütlesi için ise

$$\Delta_R = (m_d r_d)_R = \sqrt{0.7006^2 + (-3.5063)^2} = 3.5756 \text{ kg.mm}$$

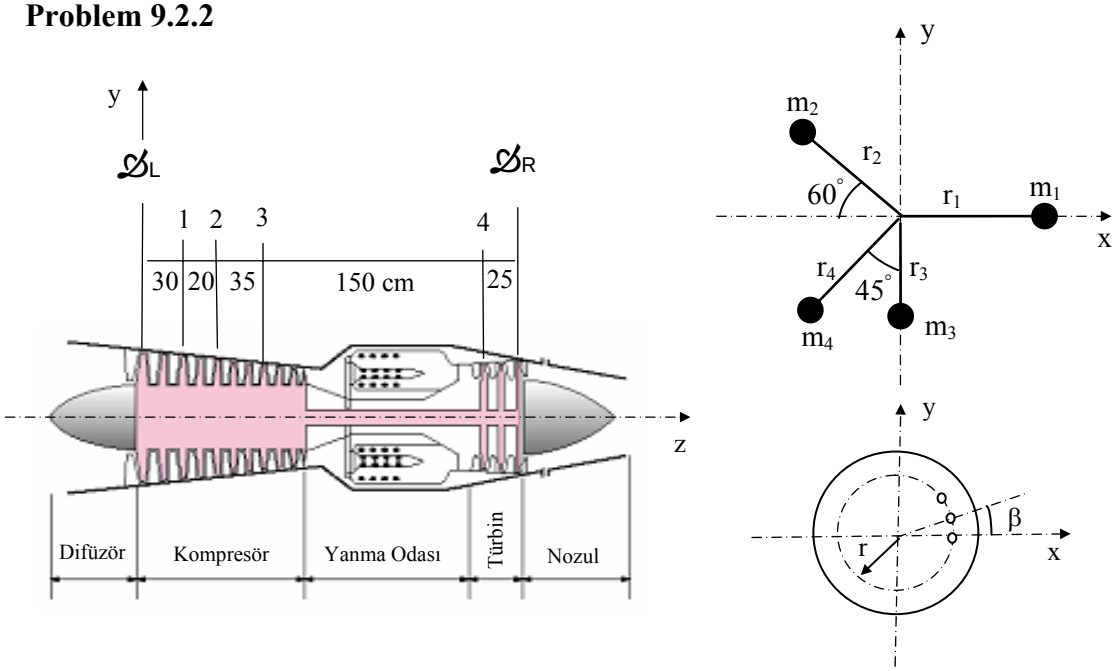
$$\alpha_R = \tan^{-1}\left(\frac{-3.5063}{0.7006}\right) = 281.30^\circ,\; (m_d)_R = \frac{\Delta_R}{(r_d)_R} = \frac{3.5756}{200} = 17.88\cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

bulunur. Buna göre ele alınan rotor, $\mathcal{D}_L$ ve $\mathcal{D}_R$ düzlemlerine aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi iki dengeleme kütlesinin yerleştirilmesiyle dinamik olarak dengelenmiş olacaktır.



Şekil Pr.9.2.1-2

Problem 9.2.2



Şekil Pr.9.2.2 Jet Motoru

Şekilde bir jet motoru ve ona ait rotor gösterilmiştir. Rijid cisim kabul edilebilen rotorun kompresör düzlemlerinin üçünde ve türbin düzlemlerinin birinde $D_i=m_ir_i$ dengesizlikleri mevcuttur. m_1=30 g, m_2=25 g, m_3=20 g, m_4=15 g, r_1=44 cm, r_2=40 cm, r_3=34.3 cm, r_4=45 cm verildiğine göre;

a) Bu rotoru dengelemek üzere şekilde gösterilen $\mathcal{D}_L$ ve $\mathcal{D}_R$ dengeleme düzlemlerine yerleştirilmesi gereken dengeleme büyüklüklerini ve yerleştirilmeleri gereken açısal konumları belirleyiniz.

b) Dengelemenin $\mathcal{D}_L$ ve $\mathcal{D}_R$ düzlemlerinde $\mathbf{r_L=37}$ **cm** ve $\mathbf{r_R=44}$ **cm** yarıçaplı çemberler üzerine $\boldsymbol{\beta=5^o}$ lik eşit açısal aralıklarla dizili civataların gramajı farklı civatalarla değiştirilmesi yoluyla yapılması düşünüldüğüne göre hangi civatalarda ne kadar değişiklik yapılmalıdır?

Çözüm:

a) Problemin verileri aşağıdaki gibi tablolandıktan sonra Problem 9.2.1 deki (iii) denklemleri uyarınca hesap yapılırsa

i	m_i [g]	r_i [cm]	z_i [cm]	α_i [^{o}]
1	30	44	30	0
2	25	40	50	120
3	20	34.3	85	270
4	15	45	235	225
a=260 cm				

$$\Delta_{L_x} = -\sum_{i=1}^{4}(1-\frac{z_i}{a})m_i r_i \cos\alpha_i = -0.718 \text{ kg.cm}$$

$$\Delta_{L_y} = -\sum_{i=1}^{4}(1-\frac{z_i}{a})m_i r_i \sin\alpha_i = -0.192 \text{ kg.cm}$$

$$\Delta_{R_x} = -\sum_{i=1}^{4}\frac{z_i}{a}m_i r_i \cos\alpha_i = 0.375 \text{ kg.cm} \qquad \text{(i)}$$

$$\Delta_{Ry} = -\sum_{i=1}^{4}\frac{z_i}{a}m_i r_i \sin\alpha_i = 0.489 \text{ kg.cm}$$

elde edilir. Buradan, sol dengeleme büyüklüğü ve açısal konumu için

$$\Delta_L = \sqrt{(\Delta_{L_x})^2 + (\Delta_{L_y})^2} = 0.743 \text{ kg.cm}, \quad \alpha_L = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta_{L_y}}{\Delta_{L_x}}\right) = 194{,}96^o \cong 195^o \qquad \text{(ii)}$$

sağ dengeleme büyüklüğü ve açısal konumu için ise

$$\Delta_R = \sqrt{(\Delta_{R_x})^2 + (\Delta_{R_y})^2} = 0.616 \text{ kg.cm}, \quad \alpha_R = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta_{R_y}}{\Delta_{R_x}}\right) = 52.50^o \qquad \text{(iii)}$$

bulunur.

b) Sol dengeleme düzleminde, ya 195° konumundaki civatanın, kütlesi

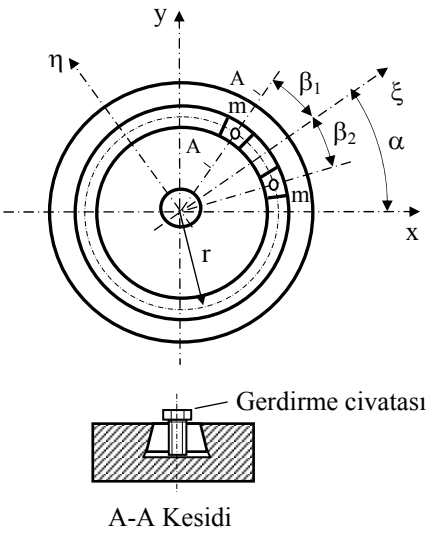
$$\Delta m_L = \frac{\Delta_L}{r_L} = \frac{0.743}{37} \cong 0.02 \text{ kg} = 20 \text{ g} \qquad \text{(iv)}$$

daha büyük olan bir civatayla, ya da 195-180=15° konumundaki civatanın, kütlesi aynı miktarda daha küçük olan bir civatayla değiştirilmesi; sağ dengeleme düzleminde ise, ya 50° ve 55° konumlu civataların, kütleleri

$$\Delta m_R = \frac{\Delta_R}{2r_R} = \frac{0.616}{2x44} \cong 0.007 \text{ kg} = 7 \text{ g} \qquad \text{(v)}$$

daha büyük olanlarla, ya da 230° ve 235° konumlu olanların, kütleleri aynı miktarda daha küçük olanlarla değiştirilmesi gerekir.

Problem 9.2.3



Şekil Pr.9.2.3

Şekilde, gerektiğinde kolayca dengelenebilecek biçimde düşünülmüş bir rotorun dengeleme düzlemi tasarımı gösterilmiştir. Bu tasarımda, açılır etekli birer somun şeklindeki iki özdeş m kütlesi, geçirildikleri r yarıçaplı dairesel kanal içerisinde serbestçe gezdirilebilmekte ve bir gerdirme civatası yardımıyla istenilen açısal konuma sabitlenebilmektedir.

m=100g, r=40cm olarak verildiğine göre, Δ=0.04 kg.m lik bir dengeleme büyüklüğünün $\alpha=20^o$ lik açısal konuma yerleştirilmesini gerektiren bir dengelemede β_1 ve β_2 açısal konumları hangi değerlere ayarlanmalıdır?

Çözüm: Önce problem genel olarak ele alınsın ve ξ ekseni dengeleme büyüklüğünün yerleştirilmesi gereken α radyal doğrultusuyla çakışan $\xi-\eta$ eksen takımında çalışılsın. Bu eksen takımında dengeleme büyüklüğünün ξ bileşeninin Δ, η bileşeninin ise sıfır olması gerektiğinden, m kütlelerinin β_i konumları

$$mr\cos\beta_1 + mr\cos\beta_2 = \Delta \qquad \text{(i)}$$

$$mr\sin\beta_1 + m\sin\beta_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

eşitliklerini sağlamalıdır. (ii) den hemen

$$\beta_2 = -\beta_1 \qquad \text{(iii)}$$

bu bilgiyle (i) den de

$$\beta_1 = \cos^{-1}\frac{\Delta}{2mr} \qquad \text{(iv)}$$

elde edilir. (iv) bağıntısına göre bu düzenekle $0 \le \Delta \le 2mr$ aralığındaki her dengeleme büyüklüğünü gerçekleştirmek mümkündür, (iii) bağıntısına göre de bu, iki m kütlesinin istenen dengeleme konumunun iki yanına bakışımlı olarak yerleştirilmesiyle sağlanacaktır.

Bu belirlemelerden sonra eldeki probleme gelinirse, (iv) den sayısal verilerle

$$\beta_1 = -\beta_2 = \cos^{-1}\frac{0.04}{2x0.1x0.4} = 60^o \qquad \text{(v)}$$

hesaplanır. Burada α açısı da dikkate alınırsa, m kütlelerinin x eksenine göre $\alpha_1=80^o$ ve $\alpha_2=320^o$ konumlarına yerleştirilmeleri gerektiği anlaşılır.

KAYNAKLAR

Mekanik Esaslar:

CHETAEV, N. G., Theoretical Mechanics, Springer Verlag, 1999.

GOLDSTEIN, H., Classical Mechanics (2nd edition), Addison -Wesley, 1980.

HESTENES, D., New Foundations For Classical Mechanics (2nd edition), Springer Verlag, 1999.

ROSENBERG, R. H., Analytical Dynamics Of Discrete Systems, Plenum Press, 1977.

ŞUHUBİ, E. S., Rijid Cisimler Dinamiği, İ.T.Ü. Fen-Edebiyat Fak., 1988.

ŞUHUBİ, E. S., Akışkanlar Mekaniği, İ.T.Ü. Fen-Edebiyat Fak., 1993.

Makina Dinamiği:

BOTSALI, F. M., Teori ve Problemlerle Makina Dinamiği, Nobel, 2005.

DAUGHTY, S., Mechanics of Machines, John Wiley & Sons, 1988.

GROSJEAN, J., Kinematics and Dynamics of Mechanisms, McGraw-Hill, 1991.

HIRSCHHORN, J., Dynamics of Machinery, Nelson, 1967.

MABİE, H. H., REINHOLTZ, C. F., Mechanisms and Dynamics of Machinery (4th edition), John Wiley & Sons, 1987.

PASİN, F., Makina Dinamiği (3. Baskı), Birsen Yayınevi, 1994.

PAUL, B., Kinematics and Dynamics of Planar Machinery, Prentice-Hall, 1979.

SABUNCU, M., Makina Dinamiği, Birsen Yayınevi, 1991.

SÖYLEMEZ, E. Makina Dinamiği, Birsen Yayınevi, 2007.

WILSON, C. E., SADLER, J. P., MICHELS, W., J., Kinematics and Dynamics of Machinery, Harper Collins Publishers, 1983.